ТРУДЫ Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН

ISSN 2542–0380
Том 12 (2017), № 1, с. 109–114
УДК 534.113

http://proc.uimech.org/uim2017.1.016
DOI: 10.21662/uim2017.1.016

Получена: 25.11.2017
Принята: 6.12.2017

Определение скорости движущейся трехслойной полосы и толщины ее заполнителя по собственным частотам изгибных колебаний[1]

Хакимов А.Г.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Исследованы собственные поперечные колебания участка постоянной длины прямолинейной трехслойной полосы с заполнителем, движущейся вдоль нейтральной линии недеформированного состояния. Перемещение происходит между двумя фиксированными соосными направляющими (зажимами), расстояние между которыми равно длине колеблющейся части полосы. Предполагается, что вдоль нейтральной линии действует постоянная продольная сила. Получено, что с увеличением скоростного параметра происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний трехслойной полосы с заполнителем. Показано, что с увеличением толщины заполнителя происходит увеличение собственных частот изгибных колебаний полосы. По двум частотам изгибных колебаний можно определить скорость и толщину заполнителя движущейся трехслойной полосы с заполнителем. Результаты работы могут находить технические применения в задачах динамики и прочности машин и механизмов при производстве трехслойных полос с заполнителем и могут быть применены для определения скорости полосы и толщины заполнителя по двум собственным частотам изгибных колебаний.

Ключевые слова: движение полосы, трехслойная полоса, изгибные колебания, собственные частоты, прямая и обратная задачи

1. Введение

В работах [1, 2] исследованы собственные поперечные колебания участка постоянной длины прямолинейного тонкого стержня, движущегося вдоль нейтральной линии недеформированного состояния, где перемещение происходит между двумя фиксированными соосными направляющими, расстояние между которыми равно длине колеблющейся части трехслойной полосы. Вдоль нейтральной линии трехслойной полосы с заполнителем действует постоянная продольная сила. Результаты работы могут находить технические применения в задачах динамики и прочности машин и механизмов при производстве трехслойных полос с заполнителем и могут быть применены для определения скорости полосы и толщины заполнителя по двум собственным частотам изгибных колебаний. В настоящей работе решена обратная задача определения скоростного параметра и толщины заполнителя движущейся трехслойной полосы по двум собственным частотам изгибных колебаний.

2. Постановка задачи

Исследуются собственные частоты изгибных колебаний трехслойной полосы с заполнителем, находящейся под действием растягивающей силы и движущейся между двух опор, представляющих скользящую заделку. Требуется определить скорость и толщину заполнителя трехслойной полосы по собственным частотам изгибных колебаний. Изгибная жесткость заполнителя не учитывается. Уравнение изгибных колебаний трехслойной полосы с заполнителем по модели Кирхгоффа имеет вид [3, 4]:

$$EJ\frac{\partial^4 w_*}{\partial x^4} + \left[(2\rho h + \rho_s h_s)V^2 - T\right]\frac{\partial^2 w_*}{\partial x^2} +$$
$$+2(2\rho h + \rho_s h_s)V\frac{\partial^2 w_*}{\partial x \partial t} + (2\rho h + \rho_s h_s)\frac{\partial^2 w_*}{\partial t^2} = 0,$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-01-020400-р_а).

$$J=\frac{h^3}{6}+\frac{h(h+h_s)^2}{2}=\frac{2h^3}{3}+h^2h_s+\frac{hh_s^2}{2},$$

где E, ρ, J, h — модуль упругости, плотность, осевой момент инерции и толщина полос; T — погонное усилие натяжения в полосе; V — скорость трехслойной полосы с заполнителем; ρ_s, h_s — плотность материала и толщина заполнителя; w_* — прогиб трехслойной полосы с заполнителем; x — координата, направленная по оси трехслойной полосы с заполнителем; t — время. Перейдя к безразмерным величинам

$$\xi=\frac{x}{L},\ \ w=\frac{w_*}{L},\ \ \tau=\nu t,\ \ \nu^2=\frac{Eh^2}{\rho L^4},$$

$$N=\frac{TL^2}{EJ},\ \ \alpha=\frac{V}{\nu L},$$

$$\beta=\left(2+\frac{\rho_s h_s}{\rho h}\right)\Big/\left(\frac{2}{3}+\frac{h_s}{h}+\frac{h_s^2}{2h^2}\right),$$

$$p=\alpha^2\beta-N,\ \ q=2\alpha\beta\Omega,\ \ r=-\beta\Omega^2,\ \ \Omega^2=\frac{\rho L^4\omega^2}{Eh^2},$$

сделаем подстановку $w=W(\xi)\exp(i\Omega\tau)$ и получим уравнение, определяющее форму изгибных колебаний трехслойной полосы с заполнителем:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial\xi^4}+p\frac{\partial^2 W}{\partial\xi^2}+iq\frac{\partial W}{\partial\xi}+rW=0, \tag{1}$$

где Ω — круговая частота; L — расстояние между опорами.

Граничные условия для защемленной по краям трехслойной полосы с заполнителем:

$$w=0,\quad \frac{\partial w}{\partial\xi}=0\quad(\xi=0,1). \tag{2}$$

Общее решение уравнения (1) будем определять в виде $W(\xi)=\exp(k\xi)$, тогда получим характеристическое уравнение для нахождения неизвестных значений комплексного волнового параметра $k=k_j(\alpha,\beta,\Omega)$, $j=1,2,3,4$:

$$k^4+pk^2+iqk+r=0. \tag{3}$$

Согласно формул Феррари запишем резольвенту уравнения (3):

$$z^3-\frac{p}{2}z^2-rz+\frac{rp}{2}+\frac{q^2}{8}=0,$$

которое, подстановкой $z=y+\dfrac{p}{6}$ приводится к виду:

$$y^3+p_1y+q_1=0,\ \ p_1=-\left(r+\frac{p^2}{12}\right),$$

$$q_1=-\frac{p^3}{108}+\frac{pr}{3}+\frac{q^2}{8}.$$

Если какое либо решение кубического уравнения z_1 найдено, то решения уравнения (3) находятся как решения двух квадратных уравнений:

$$k^2-\sqrt{2z_1-p}k+\frac{q}{2\sqrt{2z_1-p}}+z_1=0,$$

$$k^2+\sqrt{2z_1-p}k-\frac{q}{2\sqrt{2z_1-p}}+z_1=0,$$

$$k_{1,2}=\frac{\sqrt{2z_1-p}}{2}\pm\sqrt{-2z_1-p-\frac{2q}{\sqrt{2z_1-p}}},$$

$$k_{3,4}=-\frac{\sqrt{2z_1-p}}{2}\pm\sqrt{-2z_1-p+\frac{2q}{\sqrt{2z_1-p}}},$$

и общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$W(\xi)=\sum_{j=1}^{4}C_j\exp(k_j\xi), \tag{4}$$

где $k_j=k_j(\omega,\alpha,\beta)$ — волновые числа.

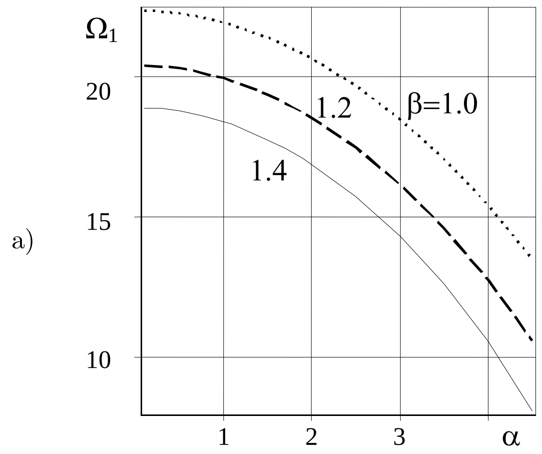
Подставляя (4) в граничные условия (2), получим однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных постоянных C_j. Для того, чтобы постоянные C_j не были равны нулю одновременно, необходимо, чтобы определитель основной матрицы был равен нулю. Это условие дает частотное уравнение [1]

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4\\ e^{k_1} & e^{k_2} & e^{k_3} & e^{k_4}\\ k_1e^{k_1} & k_2e^{k_2} & k_3e^{k_3} & k_4e^{k_4}\end{vmatrix}=0.$$

Также отметим, что здесь не рассматриваются кратные корни однородной системы, которые приводят к появлению так называемых «сверхнизких частот» [5] .

Таким образом, в приведенной простейшей модели движущейся трехслойной полосы с заполнителем фигурируют параметры N, α и β, которые зависят от усилия растяжения в трехслойной полосе с заполнителем T, скорости полосы V и отношения толщины заполнителя к толщине полосы. Подробнее остановимся на влиянии этих параметров на собственные частоты изгибных колебаний. Зависимости первой и второй собственной частот изгибных колебаний стержня от параметра α для различных значений параметра N и анализ полученных результатов приводятся в [1]. В отличие от [1] в настоящей работе дается постановка и решение обратной задачи определения скорости трехслойной полосы и толщины заполнителя по двум собственным частотам изгибных колебаний.

При $\alpha=0$, $\beta=1$ и $N=0$ собственные функции $W(\xi)$ действительны и совпадают с собственными



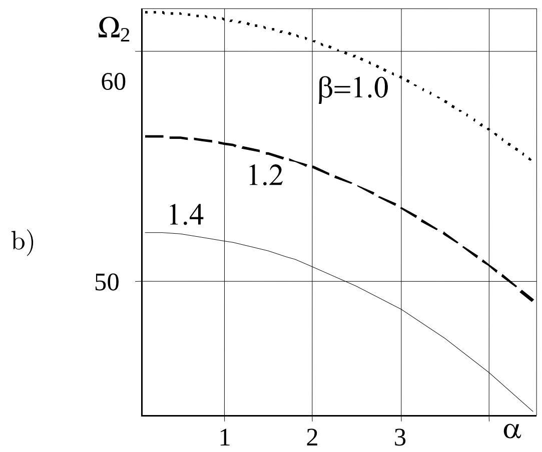


Рис. 1. Зависимости первой (a), второй (b) собственных частот изгибных колебаний трехслойной полосы с заполнителем от скоростного параметра α для различных значений параметра β

функциями трехслойной полосы с заполнителем с жестко защемленными концами [1].

Если $\beta = 1$ и $N = 0$, то характеристическое уравнение (3) допускает факторизацию и его корни k_j находятся в явном виде как функции частоты Ω. Для вещественных собственных частот $\Omega_n(\alpha)$ находится довольно простое вековое уравнение, которое решается одним из численных методов [6, 7].

В общем случае корни характеристического уравнения находятся с помощью формул Феррари, которые, по мнению авторов [1], почти не применялись в задачах математической физики и механики (редким исключением являются работы [1, 2]).

3. Прямая задача

Следует отметить, что параметр β уменьшается с увеличением отношения толщины заполнителя к толщине полосы. Расчеты проведены для следующих параметров трехслойной полосы с заполнителем: $E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, $\rho = 7800$ кг/м^3, $h = 2$ мм, $\rho_s = 500$ кг/м^3, $h_s = 2$ мм, $T = 0$, $V = 10$ м/с, $L = 1$ м ($\alpha = 0.9874$, $\beta = 0.9526$). Решение прямой задачи для трехслойной полосы с заполнителем с вышеприведенными параметрами дает, что первая и вторая собственные частоты трехслойной полосы с заполнителем $f_1 = 36.2833$ Гц, $f_2 = 101.3667$ Гц ($\Omega_1 = 22.5107$, $\Omega_2 = 62.8894$). На рис. 1 даются зависимости первой (a), второй (b) собственных частот изгибных колебаний трехслойной полосы с заполнителем от скоростного параметра α для различных значений параметра β. На рис. 2 даются зависимости первой (a), второй (b) собственных частот изгибных колебаний трехслойной полосы с заполнителем от параметра β для различных значений скоростного параметра α. Из рис. 1 видно, что с увеличением скоростного параметра α происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний трехслойной полосы с заполнителем. Из рис. 2 видно, что с увеличением параметра β или уменьшением толщины заполнителя происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний трехслойной полосы. Отметим, что с увеличением толщины заполнителя происходит уменьшение параметра β.

4. Обратная задача

Для определения скоростного и силового параметров запишем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} D_1 = D_1(\alpha, \beta, \Omega_1) = 0, \\ D_2 = D_2(\alpha, \beta, \Omega_2) = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений определяется методом последовательных приближений в области однозначной зависимости параметров α и β от частоты колебаний движущейся трехслойной полосы с заполнителем.

В точке $\mathrm{M}_0(\alpha_0, \beta_0)$ $D_1(\alpha_0, \beta_0, \Omega_1) = u_1$, $D_2(\alpha_0, \beta_0, \Omega_2) = u_2$, поэтому можем записать:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D_1}{\partial \alpha} d\alpha + \dfrac{\partial D_1}{\partial \beta} d\beta = -u_1, \\ \dfrac{\partial D_2}{\partial \alpha} d\alpha + \dfrac{\partial D_2}{\partial \beta} d\beta = -u_2. \end{cases}$$

По этим формулам определяются $d\alpha$ и $d\beta$, далее — $\alpha_0 = \alpha_0 + d\alpha$, $\beta_0 = \beta_0 + d\beta$. Процесс последовательных приближений продолжается до тех пор, пока не выполнится условие точности.

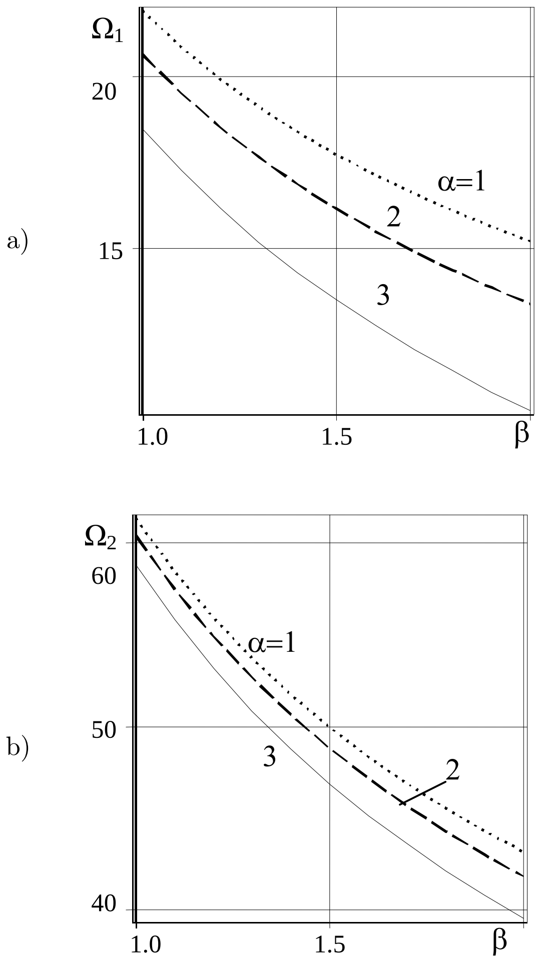


Рис. 2. Зависимости первой (a), второй (b) собственных частот изгибных колебаний трехслойной полосы с заполнителем для различных значений скоростного параметра α от параметра β

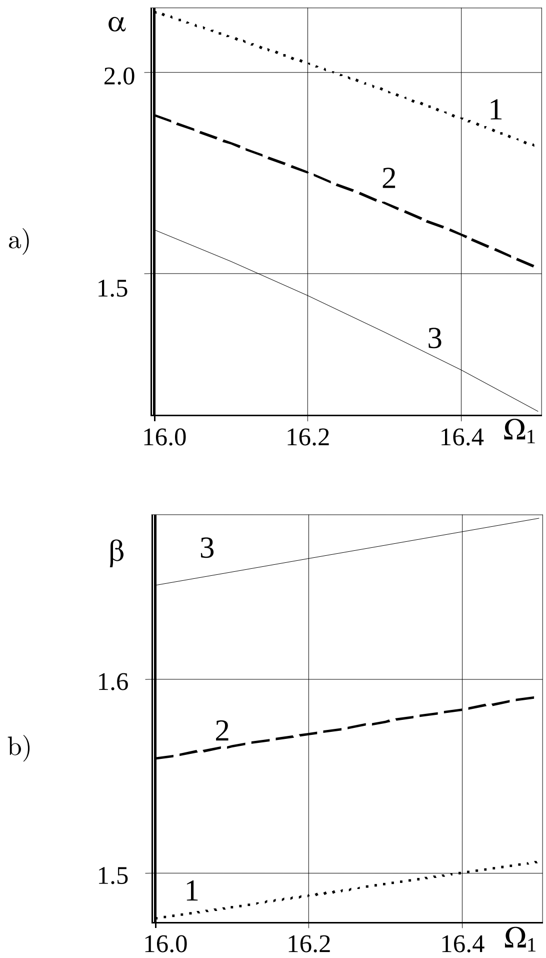


Рис. 3. Зависимости от первой частоты изгибных колебаний Ω_1 скоростного параметра α (a) и параметра β (b) для различных частот изгибных колебаний трехслойной полосы с заполнителем Ω_2: 49 — кривая 1, 48 — кривая 2, 47 — кривая 3

Решение обратной задачи для трехслойной полосы с заполнителем с вышеприведенными параметрами при $f_1 = 35.460$ Гц, $f_2 = 101.544$ Гц ($\Omega_1 = 22$, $\Omega_2 = 63$) дает, что $h_s = 2.04$ мм, $V = 16.96$ м/с (α=1.6747, β=0.9332). На рис. 3 приводятся зависимости от первой частоты изгибных колебаний Ω_1 скоростного параметра α (a) и параметра β (b) для различных частот изгибных колебаний трехслойной полосы с заполнителем Ω_2: 49 — кривая 1, 48 — кривая 2, 47 — кривая 3. По двум частотам изгибных колебаний можно определить скоростной параметр α и параметр β.

5. Заключение

Получено, что с увеличением скоростного параметра происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний трехслойной полосы с заполнителем. Показано, что с уменьшением толщины заполнителя происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний трехслойной полосы. По двум частотам изгибных колебаний можно определить скорость и толщину заполнителя движущейся трехслойной полосы. Результаты работы могут находить технические применения в задачах динамики и прочности машин и механизмов при производстве трехслойных полос и могут быть применены для определения скорости и толщины заполнителя движущейся трехслойной полосы по двум собственным частотам изгибных колебаний.

Список литературы

[1] Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Нестеров С.В. Спектр поперечных колебаний движущегося стержня // Известия РАН. МТТ. 2015. № 2. С. 139–144.

[2] Нестеров С.В., Акуленко Л.Д. Спектр поперечных колебаний движущегося стержня // Докл. РАН. 2008. Т. 420. № 1. С. 50–54.

[3] Ilgamov M.A. Static Problems of Hydroelasticity. M.: Nauka, Fizmatlit, 1998. 208 p.

[4] Светлицкий В.А. Механика стержней. Т. 2. М.: Высшая школа, 1987. 304 с.

[5] Григорьев В.Г. О парадоксах формального подхода к определению собственных значений одномерных краевых задач // Известия РАН. МТТ. 2008. № 1. С. 17–21.

[6] Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Изгибные колебания движущегося стержня // ПММ. 2008. Т. 72, вып. 5. С. 766–781.

[7] Kong L., Parker R.G. Approximate eigensolutions of axially moving beams with small flexural stiffness // J. Sound and Vibr. 2004. V. 276. P. 459–469.

Determining the velocity of a moving three-layered plate and the thickness of its filler using natural frequencies of flexural vibrations

Khakimov A.G.

Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa

Research has been performed on natural transverse vibrations of a portion of a constant length in a straight three-layered plate with a filler moving along the neutral line of a non-deformed state. The movement takes place between two rigidly fixed coaxial guides (clamps), the distance between them equalling the length of the vibrating portion. The longitudinal force is assumed to constantly act along the neutral line. It has been found that an increase in the natural frequencies of flexural vibrations of the plate occurs with an increase in the thickness of the filler. Using two frequencies of flexural vibrations, we can determine the velocity of the moving three-layered plate and the thickness of its filler. The results of the research work can find technological use in the problems on dynamics and strength of machines and mechanisms in manufacturing three-layered plate with fillers and can be used to determine the velocity of a plate and the thickness of its filler using two frequencies of flexural vibrations.

Keywords: plate movement, three-layered plate, flexural vibrations, natural frequencies, primal and inverse problems

Многофазные системы: модели, эксперимент, приложения
ИМех им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН

Статья рекомендована к публикации
Программным комитетом VI Российской конференции
«Многофазные системы: модели, эксперимент, приложения»