ТРУДЫ Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН

ISSN 2542–0380
Том 12 (2017), № 2, с. 152–156
УДК 519.624,534.1

http://proc.uimech.org/uim2017.2.022
DOI: 10.21662/uim2017.2.022

Получена: 25.11.2017
Принята: 8.12.2017

Восстановление линейного потенциала в задаче Штурма–Лиувилля[1]

Ахтямов А.М., Утяшев И.М.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Рассматривается задача идентификации переменного коэффициента упругости среды по собственным частотам колеблющейся в этой среде струны. Найден метод решения задачи, основанный на представлении линейно независимых решений дифференциального уравнения в виде рядов Тейлора по двум переменным, подстановки их в частотное уравнение и определения неизвестных коэффициентов полинома из этого частотного уравнения. Также разработан аналитический метод, который позволяет доказывать единственность или неединственность восстановленного линейного коэффициента упругости среды по конечному числу собственных частот колебаний струны, а также находить класс изоспектральных задач, т.е краевых задач, для которых спектры собственных значений совпадают. Последний основан на методе вариации произвольной постоянной. Рассматриваются примеры поиска изоспектральных классов, а также единственных краевых задач, имеющих заданный спектр.

Ключевые слова: спектральная задача, линейный потенциал, собственные значения, задача Штурма–Лиувилля

Обратная задача Штурма–Лиувилля рассматривалась во многих работах [1–14]. После выпуска классических работ В.А. Марченко [3] и Б.М. Левитана [4], где потенциал $q(x)$ представлял собой либо непрерывную, либо суммируемую функцию, основные усилия ученых были направлены на обобщение полученных результатов как в направлении восстановления более общих потенциалов и дифференциальных уравнений [5–7], так и в направлении использования более общих краевых условий [8–14]. Во всех этих работах для восстановления непрерывной функции или более общей функции $q(x)$ требуется как минимум два бесконечных набора собственных чисел. Однако на практике такой подход малоэффективен, так как в реальности мы не можем с помощью частотомеров определить бесконечные наборы собственных частот. К тому же, как правило, об идентифицируемом объекте имеется некоторая дополнительная информация, которая позволяет конкретизировать класс искомых функций. Поэтому возникает задача идентификации потенциала специального вида по конечному числу собственных частот. О необходимости решения этой задачи ученые высказывались и ранее. Об этом говорил, в частности, академик М. Отелбаев. Тем не менее эффективных методов решения этой задачи предложено не было.

Ранее авторами настоящей работы решались задачи идентификации видов и параметров краевых условий по конечному числу собственных частот [15–19]. При идентификации краевых условий для краевой задачи с переменным потенциалом был предложен метод разложения в ряд Тейлора по двум переменным x и λ фундаментальной системы решений. Было замечено [19], что если разложить в ряды фундаментальные решения задачи Штурма–Лиувилля с линейным потенциалом $q(x) = q_0 + q_1 x$, коэффициенты которого q_0 и q_1 неизвестны, то их можно восстановить по собственным значениям задачи Штурма–Лиувилля, используя только главную часть ряда. Причем в ряде случаев получается единственное решение, а в ряде — нет. Единственность полученного решения весьма условна, поскольку она получена не аналитически, а числен-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 16-31-00077-мол_а, 17-41-020230-р_а, 17-41-020400-р_а).

но. Требовался аналитический метод для доказательства единственности или неединственности решения, полученного численными методами. Такой метод удалось получить и ниже он изложен на примере линейного потенциала.

Обозначим через L_0 и L_1 следующие задачи Штурма–Лиувилля для уравнения

$$ly = -y'' + q(x)\,y = \lambda\,y = s^2\,y, \tag{1}$$

где

$$q(x) = q_0 + q_1\,x, \tag{2}$$

а q_m $(m = 1, 2)$ — вещественные постоянные.

Задача L_0:

$$ly = -y'' + q(x)y = \lambda y = s^2 y,\ \ y(0) = y(\pi) = 0. \tag{3}$$

Задача L_1:

$$ly = -y'' + q(x)y = \lambda y = s^2 y,\ \ y'(0) = y(\pi) = 0. \tag{4}$$

Лемма. *Произвольное решение $y(x) = y(x,\lambda)$ уравнения (1) может быть записано в виде:*

$$\begin{gathered} y(x) = y(0)\,\cos(sx) + C_2\,\frac{\sin(sx)}{s} + \\ + q_0\,\Big(-\cos(s\,x)\int\limits_0^x \frac{\sin(s\,\xi)}{s}\,y(\xi)\,d\xi + \\ + \frac{\sin(sx)}{s}\int\limits_0^x \cos(s\,\xi)\,y(\xi)\,d\xi\Big) + \\ + q_1\,\Big(-\cos(s\,x)\int\limits_0^x \xi\,\frac{\sin(s\,\xi)}{s}\,y(\xi)\,d\xi + \\ + \frac{\sin(sx)}{s}\int\limits_0^x \xi\,\cos(s\,\xi)\,y(\xi)\,d\xi\Big), \end{gathered} \tag{5}$$

где C_2 — некоторое постоянное число.

Доказательство. Уравнение (1) можно переписать в виде:

$$y'' + s^2\,y = q(x)\,y. \tag{6}$$

Однородное уравнение $y'' + s^2\,y = 0$ имеет фундаментальную систему решений $\cos(sx)$ и $\dfrac{1}{s}\,\sin(sx)$. Поэтому, рассматривая (6) как неоднородное уравнение с правой частью $q(x)\,y$ и применяя метод вариации произвольных постоянных, получим уравнение

$$\begin{gathered} y = C_1\,\cos(sx) + C_2\,\frac{\sin(sx)}{s} - \\ - \cos(s\,x)\int\limits_0^x \frac{\sin(s\,\xi)}{s}\,q(\xi)\,y(\xi)\,d\xi + \\ + \frac{\sin(sx)}{s}\int\limits_0^x \cos(s\,\xi)\,q(\xi)\,y(\xi)\,d\xi. \end{gathered}$$

Если $x = 0$, то из последнего уравнения получаем $y(0) = C_1 \cdot 1 + 0$. Откуда

$$\begin{gathered} y = y(0)\,\cos(sx) + C_2\,\frac{\sin(sx)}{s} - \\ - \cos s\,x\int\limits_0^x \frac{\sin(s\,\xi)}{s}\,q(\xi)\,y(\xi)\,d\xi + \\ + \frac{\sin(sx)}{s}\int\limits_0^x \cos(s\,\xi)\,q(\xi)\,y(\xi)\,d\xi. \end{gathered} \tag{7}$$

Так как $q(\xi) = q_0 + q_1\,\xi$, то выполняется уравнение (5). Что и требовалось доказать.

Пример 1. Известно, что в случае $q(x) \equiv 0$ собственными значениями задачи L_0 являются числа $\lambda_i = s_i^2 = i^2$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Пусть по первым двум собственным числам $\lambda_i = s_i^2 = i^2$, $i = 1, 2$ задачи (3) требуется восстановить линейную функцию $q(x) = q_0 + q_1\,x$. Если $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ — линейно независимые решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} &y_1(0, \lambda) = 1, \quad y_1'(0, \lambda) = 0, \\ &y_2(0, \lambda) = 0, \quad y_2'(0, \lambda) = 1, \end{aligned} \tag{8}$$

то характеристическим определителем задачи (3) с потенциалом $q(x) \equiv 0$ является функция

$$\Delta(\lambda) = y_2(\pi, \lambda) = \frac{\sin(s\,x)}{s}. \tag{9}$$

Найдем $y_2'(0, s_1)$ из формулы (7):

$$1 = y_2'(0, s_1) = 0 + C_2 \cdot 1 - 0 \tag{10}$$

Откуда $C_2 = 1$.

Подставив первые два собственных значения $\lambda_i = s_i^2 = i^2$, $i = 1, 2$ задачи (3), $C_2 = 1$ и выражение (9) в качестве y в формулу (5), получим систему двух уравнений:

$$\begin{gathered} y_2(\pi, \lambda_1) = y_2(0) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + \\ + q_0\,\left(\int\limits_0^\pi \sin^2(\xi)\,d\xi + 0\right) + q_1\,\left(\int\limits_0^\pi \xi\,\sin^2(\xi)\,d\xi + 0\right), \\ y_2(\pi, \lambda_2) = y_2(0) \cdot 1 + 1 \cdot 0 + \\ + q_0\,\left(-\int\limits_0^\pi \sin^2(\xi)\,d\xi + 0\right) + q_1\,\left(-\int\limits_0^\pi \xi\,\sin^2(\xi)\,d\xi + 0\right) \end{gathered}$$

или

$$q_0\,\frac{\pi}{2} + q_1\,\frac{\pi^2}{4} = 0, \quad -q_0\,\frac{\pi}{8} - q_1\,\frac{\pi^2}{16} = 0. \tag{11}$$

Отсюда следует, что $q_1 = -\dfrac{2}{\pi}\,q_0$.

Таблица 1. Собственные значения для различных $q(x)$

$q(x) \equiv 0$	1.0000	2.0000	3.0000	4.0000	5.0000
$q(x) = 0.01 - 0.02\,x/\pi$	1.0000	2.0000	3.0000	4.0000	5.0000
$q(x) = 0.1 - 0.2\,x/\pi$	0.99978	2.0000	3.0000	4.0000	5.0000
$q(x) = 0.5 - x/\pi$	0.99458	2.0008	3.0003	4.0001	5.0001
$q(x) = 1 - 2\,x/\pi$	0.97827	2.0031	3.0013	4.0006	5.0003
$q(x) = 5 - 10\,x/\pi$	0.25696	2.0450	3.0306	4.0147	5.0078

Вычисления собственных значений задачи (3) с $q(x) = q_0 - \dfrac{2}{\pi} q_0 x$ (где q_0 — произвольное число), выполненные в пакете символьных вычислений, подтверждают, что собственные значения задачи (3) с $q(x) = q_0 - \dfrac{2}{\pi} q_0 x$ и $q(x) \equiv 0$ совпадают. Таким образом, лемма позволяет доказывать неединственность решения. Заметим, что отличные от нуля решения находятся и численно. Мы получаем локальный класс практически изоспектральных задач. Изоспектральность верна лишь локально при $q(x)$ близких к нулю. Связано это с тем, что при доказательстве $q(x)$ считается равным нулю. А, поэтому, чем дальше от нуля отдаляется $q(x)$, тем больше собственные значения задачи Штурма–Лиувилля отдаляются от значений $\lambda_i = s_i^2 = i^2$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ В табл. 1 приведены собственные значения для различных $q(x)$, подтверждающие этот вывод.

Рассмотрим еще один пример.

Пример 2. Если разложить линейно независимые решения уравнения Штурма–Лиувилля в ряд Тейлора по переменным x и λ и первые 120 членов этого ряда, а также собственные значения $\lambda_i = s_i^2$, $i = 1, 2$, подставить в характеристический определитель задачи L_1, получим систему двух уравнений относительно неизвестных q_0 и q_1. Если подсчитать решение этой системы в пакете аналитических вычислений с точностью до 20 значащих цифр, то получим решение: $q_0 = -2.57578 \cdot 10^{-18}$, $q_1 = 2.76750 \cdot 10^{-18}$. Попытки найти другое решение в пакете аналитических вычислений не дают результата. Это наводит на мысль, что единственным решением задачи идентификации линейного потенциала является функция $q(x) \equiv 0$. Проверим это с помощью нашей леммы.

В случае $q(x) \equiv 0$ собственными значениями задачи L_1 являются числа $\lambda_i = s_i^2 = \left(\dfrac{1}{2} + i\right)^2$, $i = 1, 2, 3, \ldots$. Пусть по первым двум собственным числам $\lambda_i = s_i^2$, $i = 1, 2$ задачи (4) требуется восстановить линейную функцию (2).

Если $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ — линейно независимые решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям (8), то характеристическим определителем задачи (4) с потенциалом $q(x) \equiv 0$ является функция

$$\Delta(\lambda) = y_1(\pi, \lambda) = \cos(s\, x). \tag{12}$$

Первым собственным значением является $\lambda_i = s_i^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$. Подставив первые два собственных значения $\lambda_i = s_i^2 = \left(\dfrac{1}{2} + i\right)^2$, $i = 1, 2$ задачи (4) и выражение (12) в качестве y в формулу (5), получим систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} y_1(\pi, \lambda_i) &= y_1(0) \cdot \cos(s_i\, \pi) + C_2 \cdot \frac{\sin(s_i\, \pi)}{s_i} + \\ &+ q_0\, \Big(-\frac{\cos(s_i\, \pi)}{s_i} \int\limits_0^\pi \sin(s_i\, \xi)\, \cos(s_i\, \xi) d\xi + \\ &+ \frac{\sin(s_i\, \pi)}{s_i} \int\limits_0^\pi \cos^2(s_i\, \xi)\, d\xi \Big) + \\ &+ q_1\, \Big(-\frac{\cos(s_i\, \pi)}{s_i} \int\limits_0^\pi \xi\, \sin(s_i\, \xi)\, \cos(s_i\, \xi) d\xi + \\ &+ \frac{\sin(s_i\, \pi)}{s_i} \int\limits_0^\pi \xi\, \cos^2(s_i\, \xi)\, d\xi \Big), \qquad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Найдем $y_2(0, s_1)$ из формулы (7):

$$0 = y_2(0, s_1) = 0 + C_2 \cdot 2 + 0.$$

Отсюда получаем систему двух уравнений:

$$\begin{aligned} q_0\, \pi + 2\, q_1 \left(-1 + \frac{\pi^2}{4}\right) &= 0, \\ -\frac{1}{3}\, q_0\, \pi - \frac{2}{3}\, q_1 \left(-\frac{1}{9} + \frac{\pi^2}{4}\right) &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Следовательно, $q_0 = 0$, $q_1 = 0$.

Г. Боргом была доказана теорема об однозначной идентификации непрерывной функции по спектрам двух краевых задач [20]. В частности, из этой теоремы следует, что непрерывная функция $q(x)$ может быть однозначно восстановлена по спектрам задач L_0 и L_1. Это наводит на мысль о том, что линейный потенциал может быть восстановлен с помощью использования конечного числа собственных значений двух краевых задач L_0 и L_1.

Пример 3. Система, составленная из первого уравнения (11) и первого уравнения системы (13) имеет единственное решение $q_0 = q_1 = 0$. Значит линейная функция $q(x)$ может быть однозначно восстановлена по одному собственному значению задачи L_0 и одному собственному значению задачи L_1.

Список литературы

[1] Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения Штурма–Лиувилля по двум спектрам // Изв. АН СССР, сер. матем. 1964. Т. 28, № 1. С. 63–78.

[2] Левитан Б.М., Гасымов М.Г. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам // УМН. 1964. Т. 19, № 2(116). С. 3–63.

[3] Марченко В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка. 1977. 329 с.

[4] Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля и их приложения. М.: Наука, 1984. 240 с.

[5] Шкаликов А.А., Савчук А.М. Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость // Функц. анализ и его прил. 2010. Т. 44, № 4. С. 34–53.

[6] Гусейнов И.М., Набиев И.М. Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов // Математический сборник. 2007. Т. 198, №. 11. С. 47–66.

[7] Набиев И. М. Обратная квазипериодическая задача для оператора диффузии // ДАН. 2007. Т. 415, № 2. С. 168–170.

[8] Садовничий В.А. Единственность решения обратной задачи в случае уравнения второго порядка с нераспадающимися условиями, регуляризованные суммы части собственных чисел. Факторизация характеристического определителя // ДАН СССР. 1972. Т. 206, № 2. С. 293–296.

[9] Плаксина О.А. Обратные задачи спектрального анализа для операторов Штурма–Лиувилля с неразделенными граничными условиями // Матем. сб. 1986. Т. 131, № 1. С. 3–26.

[10] Плаксина О.А. Обратные задачи спектрального анализа для операторов Штурма–Лиувилля с неразделенными граничными условиями. II // Матем. сб. 1988. Т. 136, № 1. С. 140–159.

[11] Гасымов М.Г., Гусейнов И.М., Набиев И.М. Обратная задача для оператора Штурма–Лиувилля с неразделенными самосопряженными граничными условиями // Сибирский математический журнал, 1991. Т. 31, № 6, С. 46–54.

[12] Коротяев Е.Л., Челкак Д.С. Обратная задача Штурма–Лиувилля со смешанными краевыми условиями // Алгебра и анализ. 2009. № 21(5). С. 114–137.

[13] Mamedov Kh.R., Cetinkaya F. Inverse problem for a class of Sturm-Liouville operator with spectral parameter in boundary condition // Bound. Value Probl. 2013. Article ID 183. 16 p. electronic only. URL: http://link.springer.com/journal/volumesAndIssues/13661.

[14] Panakhov E.S., Koyunbakan H., Unal Ic. Reconstruction formula for the potential function of Sturm–Liouville problem with eigenparameter boundary condition // Inverse Problems in Science and Engineering. 2010. V. 18, No. 1, P. 173–180.

[15] Ахтямов А.М. К единственности решения одной обратной спектральной задачи // Дифференциальные уравнения. 2003. Т.39, № 8. С. 1011–1015.

[16] Ахтямов А.М, Аюпова А.Р. О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне // Журнал Средневолжского математического общества. Т. 12, № 3. С. 38–43.

[17] Ахтямов А.М. Распознавание закрепления кольцевой мембраны по собственным частотам ее колебаний // Известия РАЕН. Математика. Математическое моделирование. Информатика и управление. 2001. Т. 5, № 3. С. 103–110.

[18] Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий. Уфа: Гилем, 2008. 300 с.

[19] Ахтямов А.М., Утяшев И.М. Идентификация краевых условий на обоих концах струны по собственным частотам колебаний // Акустический журнал. 2015. Т. 61, № 6. С. 647–655.

[20] Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994. 206 с.

Restoration of the linear potential in the Sturm-Liouville problem

Akhtyamov A.M., Utyashev I.M.

Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa

The problem of identifying the variable coefficient of elasticity of a medium with respect to natural frequencies of a string oscillating in this medium is considered. A method for solving the problem is found, based on the representation of linearly independent solutions of the differential equation in the form of Taylor series with respect to two variables, substituting them into the frequency equation, and determining the unknown coefficients of the linear function from this frequency equation. An analytical method has also been developed that allows one to prove the uniqueness or nonuniqueness of the restored polynomial coefficient of elasticity of a medium by a finite number of natural frequencies of oscillations of a string, and also to find a class of isospectral problems, that is, boundary value problems for which the eigenvalue spectra coincide. The latter is based on the method of variation of an arbitrary constant. We consider examples of finding isospectral classes, and also unique boundary value problems having a given spectrum.

Keywords: spectral problem, linear potential, eigenvalues, Sturm-Liouville