



ISSN: 2658-5782

Номер 3

Июль-Сентябрь 2018

# МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

[mfs.uimech.org](http://mfs.uimech.org)





## Изучение течения жидкости через деформируемый пьезоэлементом канал<sup>1</sup>

Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Даринцев О.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В работе изучается течение жидкости через трубку, деформируемую пьезоэлементом по гармоническому закону. Сравниваются линейные деформации для граничных условий Дирихле и Неймана на поверхности контакта трубки и пьезоэлемента. Исследуется течение жидкости через деформированный канал для двух режимов течения: в трубке с одним закрытым концом за счет деформации трубки; для трубки с двумя открытыми концами за счет деформации трубки и приложенного к каналу перепада давления. Рассчитывается расход жидкости в зависимости от частоты деформаций, перепада давления и физических параметров жидкости.

**Ключевые слова:** гидродинамика, гидросопротивление, пьезоэлемент, линейная упругость, метод конечных элементов

### 1. Введение

В последнее время интенсивно развивается новое направление в гидродинамике — микрогидродинамика, описывающая поведение сверхмалых объёмов и потоков жидкостей в каналах, размеры которых не превышают сотни микрон. В качестве областей применения чаще всего рассматриваются молекулярная биология, *in vitro* системы диагностики, лаборатории-на-чипе (англ. *lab-on-the-chip*), устройства регулирования микропотоков, капельные системы. Применяемые при расчетах методики получены эмпирическим путем и достаточно грубы — в таких системах, в первую очередь, принято учитывать возросшее влияние свойств поверхности канала, требования к которым зависят от способа и области применения микрофлюидной техники. Кроме того, в данных методиках гипотетически предполагаются малая шероховатость и однородность микроканала на всем

протяжении, что гарантирует ламинарный характер течения жидкости, а, например, для интенсивного перемешивания растворов необходимо обеспечить турбулентное течение, т.е. внутренняя поверхность должна быть более «грубой».

В известных системах [1, 2] в основном рассматривается формирование потоков или капель в микроканалах с использованием шприцевых дозаторов с электроприводом, диффузных систем и других механизмов, имеющих нелинейную выходную характеристику, поэтому актуальным видится разработка теоретического обоснования возможности создания приводов, использующих прямые преобразователи рода энергии, например, пьезоприводы. Пьезопривод имеет линейную механическую характеристику, что позволяет получить необходимый вид микроперемещения (линейное или вращательное) без дополнительных устройств. Диапазон этих перемещений, от десятка мкм до долей нм, сравним с требуемыми объемами перемещаемой жидкости за цикл (пкл). Усилий, развиваемых пьезоприводом, достаточно для деформации толстостенных каналов, выполненных из упругих материалов.

Компьютерное моделирование течения жидкости в микроканалах, индуцированное внешним

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президиума РАН № 29 «Актуальные проблемы робототехнических систем».

воздействием (например, перепадом давления, поступательным движением границы или деформацией канала), в последнее время активно развивается. Например, авторами настоящей работы ранее были разработаны компьютерные модели, которые могут быть использованы в качестве элемента вычислительного стенда для одного элемента технического устройства (поршень и гидродинамическое сопротивление). Модель поршня для осциллирующего перепада давления была построена в работе [3] методами факторного вычислительного эксперимента второго порядка с учетом пяти параметров (амплитуда и частота перепада давления, трение поршня, жесткость пружины, отношение силы трения покоя и трения скольжения). В работе [4] построена модель стационарного течения жидкости через цилиндрическое гидросопротивление с учетом перепада давления и радиуса проходного отверстия гидросопротивления, но без учета зависимости жидкости от температуры. В [5] представлено расширение данной модели для описания работы элемента во всей рабочей области температур. В работе [6] изучалось течение жидкости через систему трех элементов. Во всех этих исследованиях геометрия канала была фиксированной.

В статье [7] изучалось течение жидкости в плоском канале с гидросопротивлением для двух случаев динамического изменения геометрии канала: поперечное сжатие проходного отверстия гидросопротивления (течение вызывается приложенным к слою перепадом давления) и продольное движение гидросопротивления вдоль канала (течение вызывается этим движением). Получено, что динамическое изменение геометрии канала позволяет регулировать расход жидкости.

В настоящей работе исследуется трехмерная компьютерная модель различных режимов течения жидкости через канал, деформируемый пьезоэлементом. Рассматривается влияние двух видов деформаций трубки на форму ее внутренней поверхности, определяющей, в свою очередь, геометрию канала, по которому течет жидкость. А, именно, деформаций, описываемых граничными условиями Дирихле и Неймана на поверхности контакта трубки и пьезоэлемента. Изучаются два режима течения жидкости в микроканале:

- один конец канала закрыт и течение происходит за счет деформации трубки. Данный режим позволяет провести тестирование компьютерной модели;
- оба конца канала открыты и течение происходит как за счет деформации трубки, так и за счет приложенного к слою перепада давления.

Целью работы является разработка трехмерной компьютерной модели течения жидкости в канале с гидросопротивлением, где форма гидросопротивления изменяется по периодическому закону и определяется деформациями трубки пьезоэлементом.

Данная компьютерная модель, описывающая поведение жидкости в микроканалах при использовании пьезоэлектрических приводов, является первым шагом в разработке теоретического базиса для создания микроприводов и исполнительных микромеханизмов. Микроустройства, базирующиеся на микрофлюидике, и обладающие хорошими расчетными характеристиками, будут востребованы при проектировании новых перспективных конструкций микророботов и исполнительных микроустройств.

## 2. Основные уравнения

Рассматривается трехмерное течение жидкости через трубку с внутренним  $R_1$  и внешним  $R_2$  радиусами и длиной  $L$ , центральная часть которой расположена внутри пьезоэлемента длины  $\ell$ . На рис. 1 представлена геометрия задачи и введены следующие обозначения:  $\Gamma_1$  — внешняя поверхность трубки;  $\Gamma_2$  — внутренняя поверхность трубки;  $\Gamma_3$  — входное отверстие;  $\Gamma_4$  — выходное отверстие. В декартовой системе координат ось  $Ox$  является центральной осью трубки, а начало отсчета расположено в геометрическом центре трубки.

Упругие деформации твердого тела описываются уравнением движения (второй закон Ньютона), связывающим динамическое изменение вектора перемещений  $\mathbf{d}$  и действия внутренних, описываемых тензором напряжений  $\bar{\sigma}$ , и объемных сил  $\mathbf{f}_v$  [8]:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{d}}{\partial t^2} = \nabla \bar{\sigma} + \mathbf{f}_v,$$

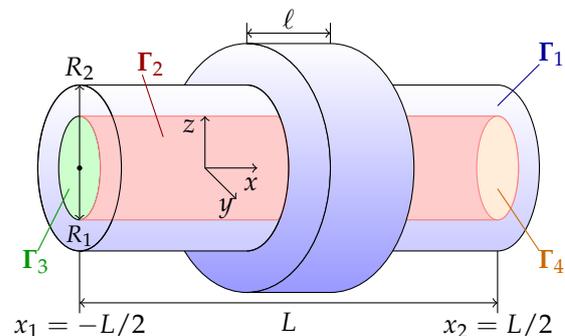


Рис. 1. Геометрия и основные обозначения модели сжатия трубки пьезоэлементом

где  $\rho$  — плотность жидкости;  $t$  — время;  $\nabla$  — оператор набла.

Предполагаем, что после приложения силы прошло достаточно времени для установления поля деформации. Тогда статическое условие равновесия в отсутствии объемных сил ( $\mathbf{f}_v = 0$ ) имеет вид:

$$\nabla \bar{\sigma} = 0. \quad (1)$$

В изотропном теле тензор напряжений  $\bar{\sigma}$  зависит от тензора деформаций  $\bar{\varepsilon}$  и вектора перемещений  $\mathbf{d} = (d_x, d_y, d_z)$  следующим образом:

$$\bar{\sigma} = 2\mu\bar{\varepsilon} + \lambda(\nabla\mathbf{d})\bar{I}, \quad (2)$$

где  $\bar{I}$  — единичный тензор; а коэффициенты Ламе

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

зависят от модуля Юнга  $E$  и коэффициента Пуассона  $\nu$ .

Подставляя (2) в уравнение (1) и исключая тензор деформаций  $\bar{\varepsilon}$  согласно определению

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{d} + (\nabla\mathbf{d})^T),$$

получим уравнение равновесия, содержащее только вектор перемещений:

$$\nabla \left[ \mu (\nabla\mathbf{d} + (\nabla\mathbf{d})^T) + \lambda(\nabla\mathbf{d})\bar{I} \right] = 0. \quad (3)$$

Деформации  $\mathbf{d}$  определялись решением уравнения (3) численно в вариационной формулировке (в пакете численного моделирования FreeFem++ [9]) методом конечных элементов:

$$\int_{\Omega} \frac{\mu}{2} (\nabla\mathbf{d} + \nabla\mathbf{d}^T) \cdot (\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T) + \lambda(\nabla\mathbf{d})(\nabla\mathbf{v})d\Omega = 0, \quad (4)$$

где  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  — пробные функции; интегрирование производится по всему объему  $\Omega$  трубки.

Рассмотрим два вида граничных условий: граничное условие Неймана (ГУН), когда «мягкий» пьезоэлемент давит на трубку с давлением  $P_p$  и граничное условие Дирихле (ГУД), когда «жесткий» пьезоэлемент сдавливает трубку со смещением  $\Delta d$ . В случае ГУН в левой части уравнения (4) добавляется поверхностный интеграл

$$\int_S (-P_p)(\mathbf{N} \cdot \mathbf{v})f_p(t) dS, \quad (5)$$

где  $\mathbf{N}$  — единичный вектор нормали в точке на поверхности контакта трубки и пьезоэлемента  $S$ ;

скалярное произведение можно записать в виде  $(\mathbf{N} \cdot \mathbf{v}) = (y \cdot v_y + z \cdot v_z)/R_2$ ,  $(y, z) \in S$ ;  $f_p(t)$  — нормированная форма сигнала на пьезоэлементе ( $0 \leq f_p(t) \leq 1$ ). В расчетах функция  $f_p(t)$  выбрана в виде:

$$f_p(t) = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi t}{T} \right), \quad (6)$$

где  $T$  — период колебаний.

ГУД определяет смещение на  $\mathbf{d}$ ,  $|\mathbf{d}| = f_p(t)\Delta d$  области контакта  $S$  с компонентами смещения:

$$d_y = f_p(t)\Delta d \cdot y/R_2, \quad d_z = f_p(t)\Delta d \cdot z/R_2, \quad (7)$$

для  $(y, z) \in S$ .

Дополнительное условие: концы трубки зафиксированы ( $\mathbf{d} = 0$ ).

Течение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса и неразрывности, которые имеют следующий вид [10]:

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \nabla \bar{\sigma}^f = 0, \\ \nabla \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  — вектор скорости жидкости;  $\bar{\sigma}^f$  — тензор напряжений, имеющий вид

$$\bar{\sigma}_{ij}^f = -p\delta_{ij} + \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right), \quad (9)$$

где  $p$  — давление;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $\eta$  — динамическая вязкость жидкости;  $i$  и  $j$  могут принимать значения  $x, y, z$ . Подставляя (9) в (8) получим уравнение Навье–Стокса в переменных скорость–давление:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) + \nabla p - \eta \Delta \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \mathbf{u} = 0, \quad (10)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа.

Для численного моделирования уравнения (10) записывались в вариационной форме и решались методом конечных элементов.

Уравнение неразрывности в вариационной форме (с пробной функцией  $q$ ) запишем со стабилизационным слагаемым, имеющим смысл малой искусственной сжимаемости ( $\nabla \mathbf{u} + \varepsilon_p p = 0$ ,  $\varepsilon_p \sim 10^{-10}$ ):

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^{n+1} q d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_p p q d\Omega = 0. \quad (11)$$

Для численного решения уравнения Навье–Стокса проведем дискретизацию по времени по

схеме Эйлера. Поделив первое уравнение на  $\rho$ , получим

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} + (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu_l \Delta \mathbf{u}^{n+1} = 0,$$

где  $\nu_l = \eta/\rho$  — кинематическая вязкость жидкости;  $n+1$  и  $n$  обозначают текущий и предыдущий момент времени соответственно, а  $\tau = t^{n+1} - t^n$  — шаг по времени. Линеаризуем уравнение заменой нелинейного слагаемого по схеме Пикарда

$$(\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} \approx (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1}$$

и перепишем в вариационной форме (с пробными функциями  $\mathbf{w}$ ):

$$\int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} \mathbf{w} \, d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} p \nabla \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Omega} \nu_l \nabla \mathbf{u}^{n+1} \nabla \mathbf{w} \, d\Omega = 0. \quad (12)$$

Рассмотрим граничные условия. На стенке канала  $\Gamma_2$  выполняется условие залипания — скорость жидкости равна скорости границы. За шаг по времени  $\tau$  стенка смещается на величину  $\mathbf{d}$  со скоростью  $\mathbf{d}/\tau$ . На входе  $\Gamma_3$  и выходе  $\Gamma_4$  добавим условие параллельности течения. Общие граничные условия примут вид:

$$\begin{cases} \Gamma_2: & \mathbf{u} = \mathbf{d}/\tau, \\ \Gamma_3, \Gamma_4: & u_y = 0, u_z = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Для различных режимов течения добавим задающие эти режимы условия. Первый режим (PI) — течение за счет деформации канала пьезоэлементом с закрытым входом  $\Gamma_3$ . Данный режим позволяет сравнить изменение объема канала с объемом прошедшей через выход  $\Gamma_4$  жидкости, что дает возможность проверить качество построенной компьютерной модели. Второй режим (PII) — оба конца открыты и к слою приложен перепад давления  $\Delta p = p_1 - p_2$ , где  $p_1$  и  $p_2$  — давления на границах  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$  соответственно. Режим PII позволяет регулировать течение жидкости путем изменения частоты сжатия пьезоэлемента и величины перепада давления. Запишем граничные условия для этих режимов:

$$\text{PI: } \mathbf{u} = 0 \text{ на } \Gamma_3; \quad (14)$$

$$\text{PII: } p(\Gamma_3) - p(\Gamma_4) = \Delta p. \quad (15)$$

Начальные условия для режима PI — жидкость покоится ( $\mathbf{u} = 0$ ) и вдоль канала давление постоянно ( $p = 0$ ); для режима PII компонента скорости

вдоль канала соответствует Пуазейлевскому течению:

$$u_x = \frac{\Delta p}{4\eta L} (R_1^2 - y^2 - z^2), \quad u_y = 0, \quad u_z = 0,$$

и распределение давления линейно:

$$p = \frac{\Delta p}{L} (x_2 - x),$$

где  $x_2 = L/2$  — координата правой границы  $\Gamma_4$ .

На каждом шаге итерации Пикарда решается система уравнений (11), (12) с граничными условиями (13) и соответствующему выбранному режиму течения условию из (14)–(15), пока норма поправки решений  $\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|$  не станет меньше  $\varepsilon_u$  с обновлением решений  $\mathbf{u}^{n+1} \rightarrow \mathbf{u}^n$ ,  $p^{n+1} \rightarrow p^n$ .

### 3. Результаты

В расчетах деформаций использовалось два диапазона значений параметров для граничных условий: в случае ГУД — смещение  $\Delta d = 0 \div 7.5$  мкм и в случае ГУН — давление  $P_p = 0 \div 0.8$  МПа. Колебание пьезоэлемента гармонические с частотой  $f = 1/T = 0.75 \div 1.25$  кГц (форма сигнала рассчитывалась по формуле (6)). Геометрические параметры системы: длина пьезоэлемента вдоль оси  $Ox$  —  $\ell = 50$  мкм; внешний радиус трубки  $R_2 = 100$  мкм; внутренний радиус трубки  $R_1 = 50$  мкм; длина трубки  $L = 500$  мкм. В качестве материала трубки использовалась силиконовая резина с модулем Юнга  $E = 5 \cdot 10^6$  Па и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.49$ .

Размерность сетки составляла 180 узлов вдоль трубки и 120 узлов по окружности трубки (всего 63578 узлов, 244153 объемных элементов, 92940 граничных элементов, погрешность объема не более 0.1%).

Рассматриваемые уравнения на упругие деформации являются линейными и отклик системы должен быть пропорционален внешнему воздействию. Сравнивая результаты расчетов, получим обобщенную формулу перехода от ГУД к ГУН для рассматриваемой геометрии и материала: ГУД с заданным значением  $\Delta d$  приводит к тому же внутреннему радиусу проходного отверстия  $R_1^*$  гидросопротивления, что и ГУН с давлением, определяемым по формуле

$$P_p = \alpha \Delta d,$$

где  $\alpha$  — размерный коэффициент подобия (для  $R_1 = 50$  мкм и  $R_2 = 100$  мкм  $\alpha = 1.067 \cdot 10^{11}$  Па/м). Отметим, что коэффициент  $\alpha$  зависит нелинейно как от  $R_1$ , так и от  $R_2$ . При фиксированном значении  $R_1$  с ростом  $R_2$  значение коэффициента увеличивается (например, при  $R_1 = 50$  мкм, для

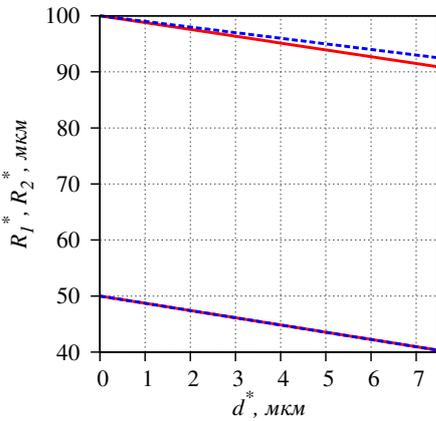


Рис. 2. Зависимость внешнего  $R_2^*$  и внутреннего  $R_1^*$  радиусов в центральном поперечном сечении трубки ( $x = 0$ ) от эквивалентной деформации  $d^*$  для ГУН (сплошная красная линия) и ГУД (пунктирная синяя линия)

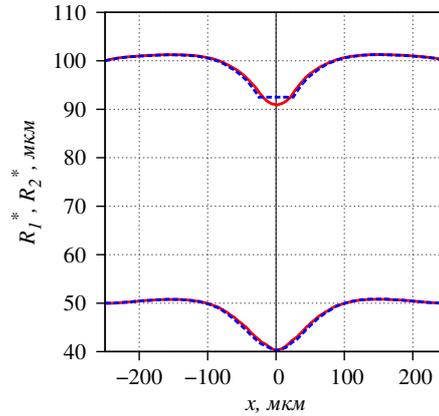


Рис. 3. Профили внешней и внутренней поверхности трубки вдоль оси  $Ox$  для ГУН с  $P_p = 0.8$  МПа (красная сплошная линия) и ГУД с  $\Delta d = 7.5$  мкм (синяя штриховая линия)

$R_2 = 75$  мкм  $\alpha = 5.87 \cdot 10^{10}$  Па/м; для  $R_2 = 125$  мкм  $\alpha = 1.39 \cdot 10^{11}$  Па/м), а при фиксированном значении  $R_2$  с ростом  $R_1$  — уменьшается (например, при  $R_2 = 125$  мкм, для  $R_1 = 75$  мкм  $\alpha = 6.9 \cdot 10^{10}$  Па/м).

Для сравнения результатов расчетов с разными граничными условиями введем эквивалентную деформацию  $d^*$ : для ГУД  $d^* = \Delta d$ , а для ГУН  $d^* = P_p / \alpha$ . На рис. 2 показана зависимость внешнего и внутреннего радиусов в центральном поперечном сечении трубки от эквивалентной деформации  $d^*$  для двух граничных условий. Как и предполагалось, зависимость является линейной.

В работе [4] было показано, что расход жидкости при течении через гидросопротивление зависит как от радиуса проходного отверстия, так и от формы самого гидросопротивления. Проверим как граничные условия на внешней поверхности повлияют на форму внутреннего канала. На рис. 3 показаны профили внешней и внутренней поверхностей трубки вдоль оси  $Ox$  для ГУН с  $P_p = 0.8$  МПа и ГУД с  $\Delta d = 7.5$  мкм. Параметры подобраны таким образом, чтобы внутренние радиусы проходного отверстия при ГУН и ГУД совпадали (см. рис. 2). Видно, что несмотря на сильные различия профилей на внешней поверхности, на внутренней поверхности профили практически совпадают (максимальная относительная погрешность равна 0.9%), следовательно, и течение жидкости будет одинаковым. Таким образом, подбором параметров на внешней границе моделирование с помощью ГУД можно заменить на моделирование с помощью ГУН так, чтобы деформации внутренней границы совпали в обоих случаях. Данная замена

может потребоваться при моделировании системы пьезоэлементов, когда согласование ГУД на соседних пьезоэлементах является сложным, в то время, как для ГУН проблем в согласовании не возникает.

Далее геометрия канала строилась на основе расчетов деформации трубки пьезоэлементом с ГУН при  $P_p = 0.8$  МПа. Поскольку внутренняя поверхность трубки является стенкой канала, по которому течет жидкость, то сначала строилась трубка радиусом  $R_1$ , затем она деформировалась по полю деформации  $d$  на поверхности  $\Gamma_2$ . Такой способ позволяет независимо моделировать упругую и гидродинамическую задачи, сохраняя при этом согласованность двух расчетных сеток. Размерность сетки составляла 80 узлов вдоль канала и 30 узлов по окружности канала (всего 3204 узлов, 11216 объемных элементов, 5100 граничных элементов, погрешность объема не более 0.6%). Изучалось течение для трех технических жидкостей при температуре  $20^\circ\text{C}$ , физические параметры которых представлены в табл. 1.

Таблица 1. Физические свойства технических жидкостей при  $20^\circ\text{C}$

Жидкость	Динамическая вязкость $\eta, 10^{-3}$ Па·с	объемная плотность $\rho, \text{кг/м}^3$
вода	1	998.2
толуол	0.586	867
уайт-спирит	0.529	790

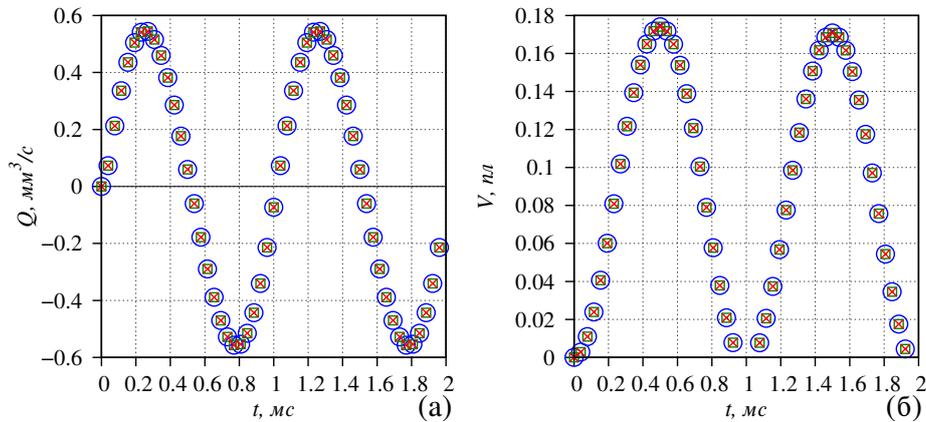


Рис. 4. Расход (а) и суммарный объем (б) жидкости, протекающей через правую границу  $\Gamma_4$ , для режима течения PI и различных технических жидкостей: вода (○), толуол (□), уайт-спирит (×).

На рис. 4 показаны расход и суммарный объем жидкости, протекающей через правую границу  $\Gamma_4$ , для режима течения PI. Течение полностью обусловлено деформацией стенки канала (объем жидкости, проходящий через границу  $\Gamma_4$ , равен изменению объема канала за счет деформации) и поэтому не зависит от типа используемой жидкости (расход течения для всех трех жидкостей совпадает). Данный режим позволяет провести тестовые расчеты для проверки корректности численной схемы — изменения объема канала и объема, прошедшей через границу  $\Gamma_4$  жидкости, должны совпадать в пределах погрешности расчета. Максимальная погрешность составила 0.17% на каждой половине периода, а на полном периоде погрешность уменьшилась до значения 0.002%. Это объясняется тем, что при периодическом течении ошибки округления компенсируются за каждый период. Течение

за второй период полностью повторяет течение за первый период, следовательно, в выбранной численной схеме (итерации Пикарда) шаг по времени  $\tau$  достаточен для установления периодического течения (характерное время релаксации скорости  $\tau_u = \rho R_1^2 / \eta \approx 2.5 \cdot 10^{-3}$  с; в расчетах для частоты пьезоэлемента  $f = 1$  кГц выбран шаг по времени  $\tau = 4 \cdot 10^{-5}$  с). Течение остается ламинарным с числом Рейнольдса  $Re < 150$ , максимальный модуль скорости жидкости  $\max(|\mathbf{u}|) \approx 0.18$  м/с.

Рассмотрим второй режим течения PII, когда оба конца открыты и к слою приложен перепад давления  $\Delta p$ . При отсутствии перепада давления ( $\Delta p = 0$ ) при сжатии пьезоэлемента жидкость течет в обоих направлениях симметрично относительно центра канала (рис. 5). Расход жидкости в два раза ниже, чем при режиме PI, поскольку при деформации канала выдавливается тот же объем жидкости,

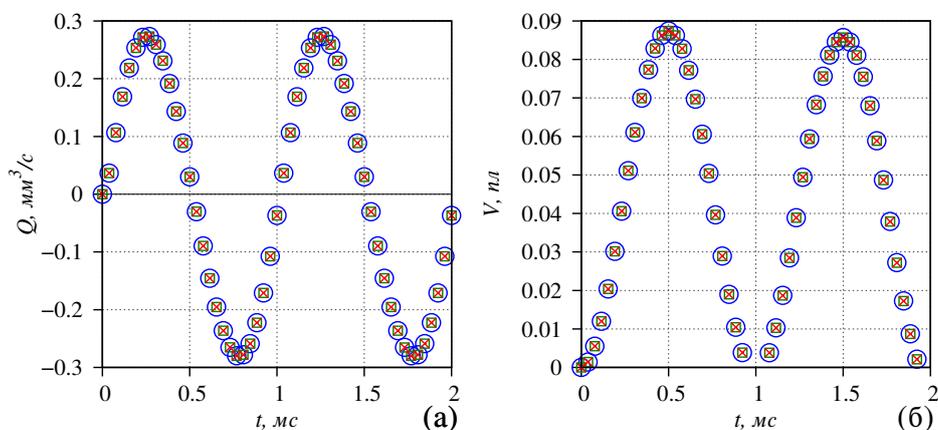


Рис. 5. Расход (а) и суммарный объем (б) жидкости, протекающей через правую границу  $\Gamma_4$ , для режима течения PII при  $\Delta p = 0$  Па для различных видов технических жидкостей: вода (○), толуол (□), уайт-спирит (×)

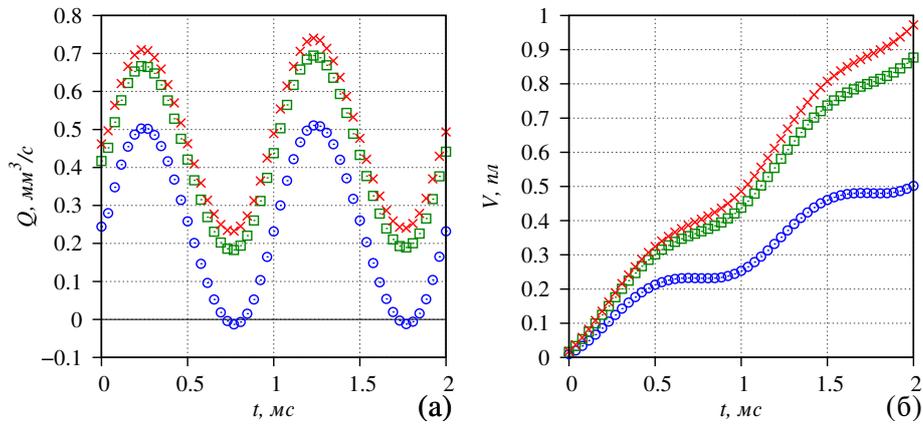


Рис. 6. Расход (а) и суммарный объем (б) жидкости, протекающей через правую границу  $\Gamma_4$ , для режима течения PII при  $\Delta p = 50$  Па для различных видов технических жидкостей: вода (o), толуол ( $\square$ ), уайт-спирит ( $\times$ )

но с двух сторон, а не с одной. Так как течение полностью обусловлено изменением объема канала, зависимость от физических параметров жидкости в данном случае также отсутствует.

Под действием перепада давления  $\Delta p \neq 0$  расход жидкости обратно пропорционально зависит от ее вязкости (на рис. 6 для примера представлен случай  $\Delta p = 50$  Па), постольку течение индуцируется перепадом давления, и скорость течения будет выше для жидкости с меньшей вязкостью.

Определим способ контроля расхода жидкости. Зависимость общего объема жидкости  $V$ , прошедшей через границу  $\Gamma_4$ , от времени определяется вязкостью жидкости  $\eta$ , перепадом давления  $\Delta p$  и частотой пьезоэлемента  $f$ . Если жидкость с вязко-

стью  $\eta_1$  имеет расход  $Q_1$  при перепаде давления  $\Delta p_1$ , то жидкость с вязкостью  $\eta_2$  при перепаде давления  $\Delta p_2$  и той же частоте будет иметь расход  $Q_2$ :

$$Q_2 = \frac{\eta_1 \Delta p_2}{\eta_2 \Delta p_1} Q_1,$$

как при течении в трубе, так и при течении через гидродинамическое сопротивление (см. [7]).

С ростом частоты пьезоэлемента скорость жидкости в области деформации канала растет, следовательно, растет и давление  $p_c$  в области центрального поперечного сечения канала. Направление течения жидкости на входе и выходе канала зависит от знака разностей давлений  $p_1 - p_c$  и  $p_c - p_2$  соответственно.

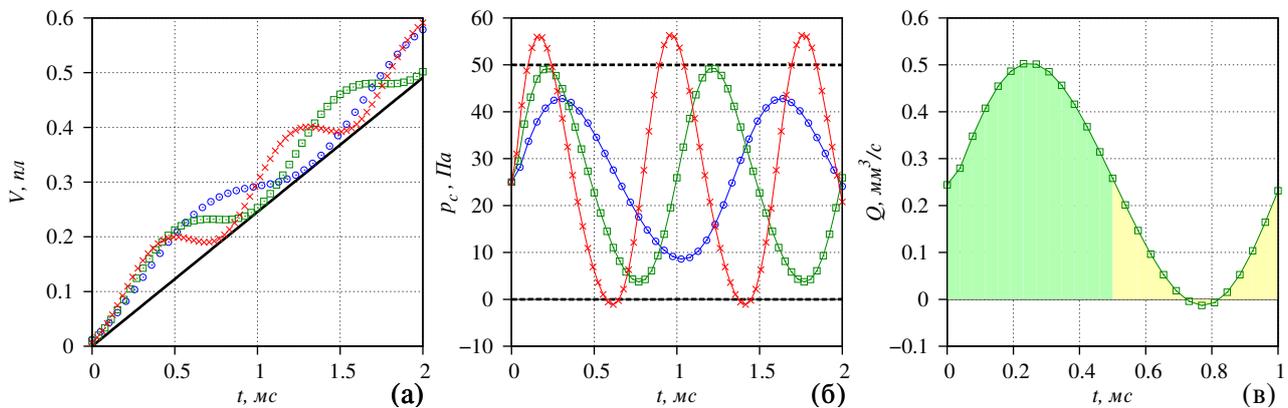


Рис. 7. Суммарный объем воды, протекающий через правую границу  $\Gamma_4$  (а), давление в центре канала (б) и расход жидкости (в) при режиме течения PII для  $\Delta p = 50$  Па и различных значений частоты  $f$ : 0.75 кГц (o); 1 кГц ( $\square$ ); 1.25 ( $\times$ ). На левом графике черная линия обозначает данные для пуазейлевского течения в трубе. На среднем графике верхняя пунктирная линия обозначает давление  $p_1 = 50$  Па на входе, а нижняя — давление  $p_2 = 0$  Па на выходе канала

На рис. 7(а) показан суммарный объем жидкости  $V$ , протекающей через правую границу  $\Gamma_4$ , от времени для трех различных значений частоты  $f$ . Видно, что для частоты  $f = 1$  кГц при сжатии пьезоэлемента объем вытекшей жидкости растет, поскольку разность давлений в центре и на правой границе канала  $p_c - p_2 > 0$  (см. рис. 7(б)), а при сокращении — расход малый ( $p_c - p_2 \sim 0$ ) и на графике образуется «плато» — суммарный объем жидкости остается практически постоянным ( $V \equiv \text{const}$ ) в течении некоторого промежутка времени. Более наглядно это показано на рис. 7(в). Объем жидкости соответствует площади под кривой расхода жидкости. Во время сжатия пьезоэлемента (первая половина периода, зеленая заливка) протекает больше жидкости, чем при расширении (вторая половина периода, желтая заливка). Отношение площадей соответствует соотношению объемов протекающей жидкости (в рассматриваемом случае отношение примерно равно 5.2), что и приводит к появлению «плато». Если частота уменьшается (например, на рис. 7 приведены данные для величины  $f = 0.75$  кГц), то значение  $p_c > p_2$  весь период, т.е. расход жидкости всегда положителен и «плато» отсутствует. С ростом частоты ( $f = 1.25$  кГц на рис. 7) при сжатии пьезоэлемента объем растет, т.к.  $p_c - p_2 > 0$ , а при сокращении расход отрицательный ( $p_c - p_2 < 0$ ), в этом случае направление течения жидкости меняется, а суммарный расход жидкости падает.

При моделировании дозатора жидкости одной из актуальных является задача определения частоты для заданного перепада давления, при которой во время сжатия пьезоэлемента расход жидкости будет практически отсутствовать («плато» на графике при  $f = 1$  кГц, рис. 7). Сам же перепад давления должен выбираться таким образом, чтобы за заданный интервал времени через правую границу протекал объем жидкости, необходимый для образования капли. Например, для  $\Delta p = 50$  Па,  $f = 1$  кГц за период колебаний выдавливается капля объемом 0.25 пл (характерные размеры капель создаваемые в микрофлюидных устройствах составляют от 0.05 пл до 1 нл [11]). Объем формируемой капли находится в обратной зависимости от частоты колебаний пьезоэлемента.

Для сравнения на рис. 7(а) приведен объем жидкости от времени для пуазейлевского течения в трубе (черная линия). Видно, что объемы в среднем за весь период течения в трубе и осциллирующем гидросопротивлении практически совпадают. Во время сжатия пьезоэлемента объем выше, чем в трубе, за счет выдавливания дополнительного объема при деформации пьезоэлемента, а при сжатии

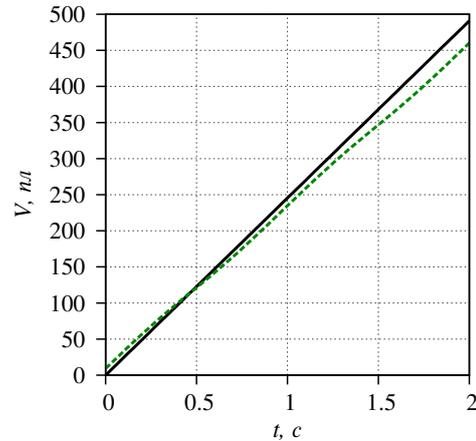


Рис. 8. Суммарный объем воды, протекающий через правую границу  $\Gamma_4$ , при режиме течения ПИИ для  $\Delta p = 50$  Па и  $f = 1$  Гц (зеленая пунктирная линия) для пуазейлевского течения в трубе (черная сплошная линия).

пьезоэлемента расход жидкости низкий и объем жидкости приближается к объему пуазейлевского течения.

Для объяснения того, что объем жидкости при течении через канал с действующим пьезоэлементом выше, чем при течении в трубе, заметим следующее: колебание пьезоэлемента добавляет энергию в систему и скорость течения при сжатии увеличивается, а при расширении заполнение объема происходит в основном за счет всасывания жидкости через левый конец трубки. На рис. 7(б) видно, что в моменты времени, когда  $p_c - p_2 \approx 0$  (течение жидкости в правой половине трубки практически отсутствует), имеет место  $p_1 - p_c > 0$  (в левой половине жидкость течет в положительном направлении). Уменьшение скорости движения жидкости в правой половине трубки происходит благодаря инерции жидкости, это и приводит к тому, что справа в канал попадает значительно меньший объем жидкости, чем слева. Асимметрия объясняется тем, что жидкость течет в положительном направлении и характерное время релаксации скорости  $\tau_u$  сравнима с обратной частотой сжатия пьезоэлемента ( $\tau_u \sim 1/f = 1/(1 \text{ кГц})$ ).

В подтверждение этого факта рассмотрим случай, когда  $1/f \gg \tau_u$ . На рис. 8 показана зависимость, аналогичная представленной на рис. 7, но при частоте  $f = 1$  Гц. Видно, что в среднем за период через трубку с пьезоэлементом протекает меньший объем жидкости, чем через обычную трубу того же радиуса.

#### 4. Заключение

В работе исследованы различные режимы течения жидкости через трубку круглого сечения, сжимаемую пьезоэлементом по периодическому закону. Деформация трубки под воздействием пьезоэлемента рассчитывалась уравнениями линейной теории упругости для граничных условий Дирихле и Неймана. Показано, что подбором давления  $P_p$  пьезоэлемента на внешнюю часть трубки можно получить такую же деформацию внутренней части трубки, как и при задании перемещения поверхности контакта внутрь на определенную величину  $\Delta d$  (зависимость является линейной), что означает взаимозаменяемость рассматриваемых граничных условий.

Было изучено два режима течения жидкости в деформированной трубке: вход трубки закрыт, течение индуцируется деформацией трубки; оба конца открыты, течение индуцируется как деформацией трубки, так и приложенным к слою перепадом давления. Первый режим позволяет провести тестирование компьютерной модели, а второй — предложить механизм дозирования жидкости управляемый двумя параметрами: частотой сжатия пьезоэлемента и величиной перепада давления.

Получены следующие результаты:

- расход жидкости зависит от частоты сжатия пьезоэлемента и, если перепад давления отсутствует, не зависит от физических параметров жидкости. Это теоретически дает возможность реализации гидравлического микропривода с линейной «механической» (расходной) характеристикой;
- под действием перепада давления к периодической составляющей расхода жидкости добавляется постоянная составляющая обратно пропорциональная вязкости жидкости;
- показано, что подбором параметров (частота, перепад давления) можно получить режим

течения, соответствующий выдавливанию капль. С ростом частоты объем выдавливаемой за период капли уменьшается.

#### Список литературы

- [1] Bruus H. Theoretical microfluidics. Lecture notes third edition. MIC Department of Micro and Nanotechnology Technical University of Denmark. 2006. URL: [http://homes.nano.aau.dk/lg/Lab-on-Chip2008\\_files/HenrikBruus\\_Microfluidics%20lectures.pdf](http://homes.nano.aau.dk/lg/Lab-on-Chip2008_files/HenrikBruus_Microfluidics%20lectures.pdf) (дата обращения: 10.04.2018).
- [2] Stroock A.D., Dertinger S.K.W., Ajdari A. et al. Chaotic Mixer for Microchannels // *Science*. 2002; Vol. 295(5555). Pp. 647–651. (DOI: 10.1126/science.1066238)
- [3] Насибуллаев И.Ш. Разработка компьютерной модели основного элемента агрегата дозирования топлива // *Вычислительные технологии*. 2016. Т. 21, № 2. С. 26–41. (<http://www.ict.nsc.ru/jct/annotation/1724>)
- [4] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Денисова Е.В. Динамика течения жидкости в технических системах с жиклерами // *Известия Уфимского научного центра РАН*. № 4. 2015. С. 20–25. ([http://sciencerb.ru/vyp/4\\_2015/20-25.pdf](http://sciencerb.ru/vyp/4_2015/20-25.pdf))
- [5] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Влияние температуры на динамику течения жидкости в технических системах с жиклерами // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН*. 2016. Т. 11, № 1. С. 1–9. (DOI: 10.21662/uim2016.1.001)
- [6] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Течение жидкости через систему связанных элементов технического устройства типа труба–гидросопротивление–труба // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН*. 2016. Т. 11, № 2. С. 141–149. (DOI: 10.21662/uim2016.2.021)
- [7] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Течение жидкости через гидросопротивление с динамически изменяемой геометрией // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН*. 2017. Т. 12, № 1. С. 59–66. (DOI: 10.21662/uim2017.1.009)
- [8] Ландау Л., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
- [9] Hecht, F. New development in FreeFem++ // *J. Numer. Math.* 20 (2012), no. 3–4, 251–265. 65Y15. (DOI: 10.1515/jnum-2012-0013)
- [10] Ландау Л., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
- [11] Белоусов К.И., Евстапов А.А., Кухтевич И.В., Посмитная Я.С. Основы нанотехнологий. Часть 1. Микро- и нанотехнологии для биологических и медицинских исследований. Часть 2. Капельная микрофлюидика: Учеб. пособие. СПб: Университет ИТМО, 2015. 56 с. (<http://books.ifmo.ru/file/pdf/1839.pdf>)



## Study of fluid flow through a channel deformed by piezoelement

Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V.

Mavlutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa

The flow of a liquid through a tube deformed by a piezoelectric cell under a harmonic law is studied in this paper. Linear deformations are compared for the Dirichlet and Neumann boundary conditions on the contact surface of the tube and piezoelectric element. The flow of fluid through a deformed channel for two flow regimes is investigated: in a tube with one closed end due to deformation of the tube; for a tube with two open ends due to deformation of the tube and the differential pressure applied to the channel. The flow rate of the liquid is calculated as a function of the frequency of the deformations, the pressure drop and the physical parameters of the liquid.

**Keywords:** hydrodynamics, hydrodynamic resistance, piezoelement, linear elasticity, finite element method



## Численное моделирование динамики пузырьков в центральной области стримера<sup>1</sup>

Аганин А.А., Давлетшин А.И., Халитова Т.Ф.

Институт механики и машиностроения – обособленное структурное подразделение ФИЦ КазНЦ РАН, Казань

Разработаны математическая модель и методика расчета сильного расширения–сжатия кавитационных пузырьков, находящихся в центральной области стримера, где пузырьки остаются практически неподвижными. По существу данные модели и методики представляют собой эффективное сочетание созданных ранее авторами моделей и методик для расчета динамики взаимодействующих слабонесферических пузырьков в стримере и динамики одиночного осесимметричного пузырька. Первые применяются на стадиях расширения и низкоскоростного сжатия, где гидродинамическое взаимодействие пузырьков существенно, вторые – в финальной высокоскоростной стадии сжатия пузырьков, где оно несущественно. Приведен пример, иллюстрирующий особенности применения разработанных модели и методики расчета в случае простейшего стримера из трех пузырьков. Показано, что при сильном расширении–сжатии изначально сферического кавитационного пузырька наличие соседних пузырьков может существенно отклонять динамику пара в его полости от аналогичного случая одиночного пузырька.

**Ключевые слова:** кавитационный пузырек, гидродинамическое взаимодействие пузырьков, ударные волны, деформация пузырьков

### 1. Введение

Одной из привлекательных особенностей динамики пузырьков в жидкости является возможность достижения в них очень высоких термодинамических параметров (давлений, плотностей и температур). Экспериментально установлено [1], что на режиме периодического свечения одиночного пузырька внутри него кратковременно может возникать плазма с температурой более 16000 К. О достижении еще более высоких параметров в кавитационных пузырьках сообщается в ряде публикаций Талиархана с соавторами [2, 3]. Возможность реализации в пузырьках очень высоких температур можно

использовать, например, в сонохимии [4] для интенсификации химических реакций.

Наиболее высокие параметры в пузырьке достигаются тогда, когда его форма в ходе коллапса остается близкой к сферической, а внутри него в финальной стадии коллапса возникают близкие к сферическим радиально-сходящиеся ударные волны [5]. Схождение и фокусировка таких волн и приводит к достижению очень высоких значений температуры, плотности и давления в небольшой центральной области пузырька. Большие отклонения формы пузырька или возникающей в нем ударной волны от сферической могут значительно снизить достигаемые в пузырьке максимумы термодинамических параметров (большая несферичность пузырька может даже привести к разрушению его целостности при коллапсе). Считается [6], что наиболее высоких степеней сжатия среды в пузырьке можно

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 16-01-00433).

добиться в том случае, когда пузырек находится в центральной области кластера. Это объясняется, в частности, тем, что сжимающее пузырек давление в центральной области кластера оказывается выше, чем на периферии.

С учетом вышеизложенного для оценки возможности достижения в пузырьках высоких термодинамических параметров важную роль играет анализ уровня их деформаций и влияния этих деформаций на динамику содержимого кавитационных пузырьков в финале сжатия. Для оценки эволюции малых деформаций одиночных пузырьков на режиме их сильного сжатия можно воспользоваться моделями работ [7, 8], а для немалых деформаций поверхности одиночных пузырьков и возникающих в них ударных волн на режиме сильного сжатия — моделями работ [9, 10]. Представляется, что возможности проведения подобных оценок для пузырьков, находящихся в кластере, значительно более ограничены. Модели динамики пузырьков, которыми можно было бы воспользоваться для таких оценок в общем случае, когда кластер пузырьков является трехмерным (пространственным), авторам неизвестны. Вместе с тем приближенные оценки влияния соседних пузырьков в трехмерном кластере можно получить, используя вместо кластера стример, под которым понимается ряд пузырьков, распложенных на одной прямой. Отметим, что образование стримеров наблюдалось в экспериментах по акустическому сверхсжатию кавитационных пузырьков в дейтерированном ацетоне [11]. В случае стримера проведение указанных оценок упрощается, поскольку трехмерная задача взаимодействия пузырьков в кластере общего вида при переходе к стримеру сводится к двумерной (осесимметричной). Для оценки малых деформаций кавитационных пузырьков в стримере при их однократном сильном совместном расширении–сжатии можно воспользоваться моделью работы [12]. Однако эта модель не может дать ответ на вопрос о том, что происходит в этом случае внутри пузырька в финале его сжатия. Еще более открытым остается вопрос о динамике пузырька в случае его немалых деформаций в конце коллапса.

В настоящей работе предлагаются математическая модель и методика расчета динамики кавитационных пузырьков, находящихся в центральной области стримера, в том случае, когда деформации пузырьков в конце их сильного коллапса могут быть и немалыми. Центральная область стримера отличается от периферийной тем, что пузырьки в ней остаются практически неподвижными. Предлагаемые модель и методика по существу представляют собой эффективное сочетание моделей

и методик расчета динамики взаимодействующих пузырьков работы [13] и динамики одиночного пузырька работы [9]. Эффективность такого сочетания обусловлена учетом особенностей задачи. На стадии низкоскоростного расширения и сжатия гидродинамическое взаимодействие пузырьков существенно влияет на эволюцию их формы, в то время как пузырьки остаются близкими к гомобарическим, а деформации их поверхности — малыми. Это позволяет использовать здесь экономичную упрощенную модель динамики пузырька работы [13]. В финальной высокоскоростной стадии сжатия пузырьков важно учитывать сжимаемость жидкости, неоднородность пара в пузырьках, испарение и конденсацию на межфазной поверхности, образование и фокусировку несферических ударных волн в центральной области пузырька, а взаимодействие пузырьков наоборот уже несущественно. С учетом этого в финальной высокоскоростной стадии сжатия для пузырьков применяется модель динамики одиночного осесимметричного пузырька [9]. Ее применение требует гораздо больших затрат компьютерного времени, чем применение упрощенной модели, поэтому предлагается использовать ее лишь в финале сжатия. Приведен пример применения разработанных модели и методики для расчета динамики центрального пузырька при его сильном расширении–сжатии в простейшем стримере, состоящем из трех пузырьков.

## 2. Постановка задачи и математическая модель

Рассматривается однократное сильное совместное расширение–сжатие кавитационных (паровых) пузырьков в стримере в результате уменьшения и последующего увеличения давления жидкости по гармоническому закону. Стример состоит из изначально одинаковых кавитационных пузырьков, равноудаленных от соседних, с центрами, расположенными на одной прямой. Основное внимание направлено на пузырьки, расположенные в центральной области стримера. При достаточно большом количестве пузырьков пузырьки в центральной области стримера являются практически неподвижными. Неподвижным остается и центральный пузырек стримера из относительно небольшого нечетного количества пузырьков. Это объясняется тем, что воздействие ближайших соседей, расположенных по разные стороны, является одинаковым по величине, но противоположным по направлению.

Рассматриваемый стример является простей-

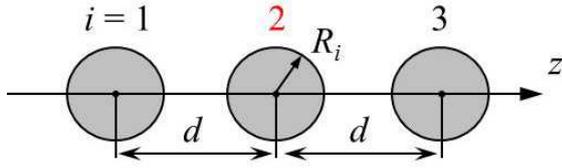


Рис. 1. Стример из 3-х одинаковых пузырьков ( $i$  – номера пузырьков,  $d$  – расстояние между центрами пузырьков,  $R_i$  – их радиус)

шей моделью, позволяющей оценить закономерности динамики пузырьков в центральной области кластеров, в частности, наблюдаемых в экспериментах по акустической кавитации дейтерированного ацетона [2, 3, 11].

Минимальное число пузырьков в стримере равно трем (рис. 1). В таком стримере группа центральных неподвижных пузырьков состоит лишь из одного пузырька. Два других (периферийных) пузырька являются подвижными. Они смещаются относительно центрального со скоростью, одинаковой по модулю, но противоположной по направлению.

### 3. Основные положения математической модели и методики расчета

На наиболее продолжительной низкоскоростной стадии, включающей совместное расширение пузырьков и большую часть их сжатия, где существенно гидродинамическое взаимодействие пузырьков (рис. 2, промежуток времени до отмеченного точкой момента), используется обобщение модели совместной динамики двух пузырьков [13]

на случай их произвольного количества с центрами на одной прямой. Искажения сферичности пузырьков в этой модели считаются малыми, так что уравнение поверхности пузырьков  $F(r_i, \theta_i, t) = F_i = 0$  ( $1 \leq i \leq K$ ,  $K$  – число пузырьков в стримере) представляется в виде:

$$F_i = r_i - R_i(t) - \sum_{n=2}^N a_{ni}(t) P_n(\cos \theta_i) = 0, \quad (1)$$

где  $r_i$ ,  $\theta_i$  – радиальная и широтная координаты сферической системы отсчета с началом в центре  $i$ -го пузырька;  $R_i$  – радиус  $i$ -го пузырька;  $a_{ni}$  – амплитуда отклонения формы  $i$ -го пузырька от сферической в виде осесимметричной сферической гармоники с номером  $n$ ;  $P_n$  – полином Лежандра степени  $n$ ;  $N$  – максимум среди номеров гармоник, определяющих форму пузырьков. Несферичность пузырьков мала, так что  $|\epsilon_{ni}| \ll 1$ , где  $\epsilon_{ni} = a_{ni}/R_i$  – безразмерная амплитуда отклонения.

Эффекты теплопроводности и испарения/конденсации учитываются упрощенно: давление внутри пузырьков полагается постоянным и равным давлению насыщенных паров при температуре окружающей жидкости. Влияние сжимаемости жидкости, неоднородности давления в паре, завихренности жидкости, плотности пара на деформацию пузырьков не учитывается в силу малости. В рамках данных допущений динамика взаимодействующих пузырьков описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно радиусов пузырьков  $R_i$ , координат их центров  $z_i$  и амплитуд отклонений их формы от сферической  $a_{ni}$  в виде сферических гармоник:

$$R_i \ddot{R}_i + \frac{3\dot{R}_i^2}{2} - \frac{\dot{z}_i^2}{4} - \frac{p_i - p_\infty}{\rho_0} + \frac{2\sigma}{\rho_0 R_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K \left[ \frac{\dot{B}_{0j}}{d_{ij}} - \frac{R_j^3 \dot{z}_j - B_{0j} (\dot{z}_i + 5\dot{z}_j)}{2s_{ij} d_{ij}^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^K \frac{3B_{0j} B_{0k}}{4s_{ij} s_{ik} d_{ij}^2 d_{ik}^2} - \right. \\ \left. - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^K \frac{(B_{0k} R_j^3)' }{2s_{ij} s_{jk} d_{ij}^2 d_{jk}^2} - \frac{R_j^3 \dot{z}_j (\dot{z}_i + 2\dot{z}_j)}{2d_{ij}^3} + \frac{3(R_j^2 \dot{z}_j a_{2j})'}{10s_{ij} d_{ij}^2} \right] + \Psi_{0i} + \Delta_i, \quad (2)$$

$$\left(1 - \frac{7\epsilon_{2i}}{5}\right) R_i \dot{z}_i + 3 \left(1 - \frac{4\epsilon_{2i}}{5}\right) \dot{R}_i \dot{z}_i - \frac{9\dot{z}_i \dot{a}_{2i}}{5} - \sum_{m=2}^N \frac{9\Theta_{m12}^{1,3} \dot{z}_i^2 \epsilon_{mi}}{5} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K \left[ -\frac{3(B_{0j} R_i)'}{s_{ij} d_{ij}^2} + \right. \\ \left. + \frac{3(R_i R_j^3 \dot{z}_j)'}{d_{ij}^3} - 6B_{0j} R_i \dot{z}_j + \frac{9R_i R_j^3 \dot{z}_j^2}{s_{ij} d_{ij}^4} + \frac{3(\dot{B}_{0j} a_{2i} + 3B_{0j} \dot{a}_{2i} + 4B_{0j} \dot{R}_i \epsilon_{2i})}{5s_{ij} d_{ij}^2} + \sum_{m=2}^N \frac{18\Theta_{m12}^{1,3} B_{0j} \dot{z}_i \epsilon_{mi}}{5s_{ij} d_{ij}^2} \right] + \Psi_{1i}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n+1} \left[ R_i \ddot{a}_{ni} + 3 \dot{R}_i \dot{a}_{ni} - (n-1) \ddot{R}_i a_{ni} - \frac{3}{2} \sum_{m=2}^N \left( \Theta_{m1n}^{2/3, n-2} \dot{z}_i a_{mi} - \Theta_{m1n}^{1,2} \dot{z}_i \dot{a}_{mi} \right) \right] + \frac{9\alpha_{11n} \dot{z}_i^2}{8} - \\
& - \frac{3\dot{z}_i}{2} \sum_{m=2}^N \left[ \frac{3}{2} \left( \sum_{\gamma=0}^{m+1} \frac{\Theta_{m1\gamma}^{1,2} \beta_{\gamma 1n}}{\gamma+1} - \chi_{m11n} \right) \dot{z}_i \epsilon_{mi} + \frac{\beta_{m1n} (\dot{a}_{mi} + 2\dot{R}_i \epsilon_{mi})}{m+1} \right] + \frac{(n-1)(n+2) \sigma \epsilon_{ni}}{\rho_0 R_i} = \\
& = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K \left\{ \frac{9\beta_{11n} B_{0j} \dot{z}_i}{4s_{ij} d_{ij}^2} - \frac{9\beta_{11n} R_j^3 \dot{z}_i \dot{z}_j}{4d_{ij}^3} - \frac{5\beta_{21n} R_i B_{0j} \dot{z}_i}{2d_{ij}^3} + \frac{15\beta_{21n} R_i R_j^3 \dot{z}_i \dot{z}_j}{4s_{ij} d_{ij}^4} + \frac{21\beta_{31n} R_i^2 B_{0j} \dot{z}_i}{8s_{ij} d_{ij}^4} + \right. \\
& + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^K \frac{9\beta_{11n} B_{0j} B_{0k}}{8s_{ij} s_{ik} d_{ij}^2 d_{ik}^2} + \frac{9\alpha_{11n} B_{0j} \dot{z}_i \epsilon_{2i}}{10s_{ij} d_{ij}^2} - \sum_{m=2}^N \left[ \frac{3\Theta_{m1n}^{1,2} (B_{0j} a_{mi})'}{2s_{ij} (n+1) d_{ij}^2} - \frac{\Theta_{m1n}^{2, m+1} B_{0j} (\dot{a}_{mi} + 2\dot{R}_i \epsilon_{mi})}{2s_{ij} (m+1) d_{ij}^2} - \right. \\
& \left. \left. - \frac{3B_{0j} \dot{z}_i \epsilon_{mi}}{2s_{ij} d_{ij}^2} \left( \sum_{\gamma=0}^{m+1} \frac{2\Theta_{\gamma 1n}^{1/2, \gamma+1} \Theta_{m1\gamma}^{1,2}}{\gamma+1} - 3\chi_{m11n} \right) \right] + \frac{5(R_i^2 B_{0j})'}{3d_{ij}^3} \delta_{2n} - \right. \\
& \left. - \frac{7(R_i^3 B_{0j})'}{4s_{ij} d_{ij}^4} \delta_{3n} - \frac{5(R_i^2 R_j^3 \dot{z}_j)'}{2s_{ij} d_{ij}^4} + 10R_i^2 B_{0j} s_{ij} \dot{d}_{ij} \right\} + \Psi_{ni}. \tag{4}
\end{aligned}$$

Здесь точка сверху и штрих означают производную по времени;  $p_\infty$  — давление жидкости на большом удалении от пузырьков;  $p_i$  — давление внутри  $i$ -го пузырька;  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $\rho_0$  — плотность жидкости;  $d_{ij} = |z_i - z_j|$  — расстояние между центрами  $i$ -го и  $j$ -го пузырьков;  $B_{0i} = -R_i^2 \dot{R}_i$ ;  $s_{ij} = (z_i - z_j)/d_{ij}$ ;  $\Theta_{\gamma 1\zeta}^{n,k} = n k \alpha_{\gamma 1\zeta} + \beta_{\gamma 1\zeta}$ ;  $\bar{\Theta}_{\gamma 1\zeta}^{n,k} = n k \alpha_{\gamma 1\zeta} - \beta_{\gamma 1\zeta}$ ;  $\beta_{\gamma 1\zeta} = [\gamma(\gamma+1) + 2 - \zeta(\zeta+1)] \alpha_{\gamma 1\zeta} / 2$ ;  $\delta_{nm}$  — символ Кронекера;

$$\begin{aligned}
\alpha_{\gamma 1\zeta} &= \frac{2\zeta+1}{2} \int_{-1}^1 \eta P_\gamma(\eta) P_\zeta(\eta) d\eta; \\
\chi_{\gamma 1\zeta} &= \frac{2\zeta+1}{2} \int_{-1}^1 (1-\eta^2) P_\gamma P_\zeta d\eta;
\end{aligned}$$

$\Psi_{0i}$ ,  $\Psi_{1i}$ ,  $\Psi_{ni}$ ,  $\Delta_i$  — поправки, учитывающие влияние вязкости и сжимаемости жидкости. Эффекты вязкости жидкости учитываются в предположении потенциальности ее движения [14]. Тогда поправки  $\Psi_{0i}$ ,  $\Psi_{1i}$ ,  $\Psi_{ni}$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Psi_{0i} &= -\frac{4\nu \dot{R}_i}{R_i}, \quad \Psi_{1i} = -\frac{12\nu}{R_i} \left[ \dot{z}_i (1 - \epsilon_{2i}) + \right. \\
& \left. + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K \left( \frac{B_{0j}}{s_{ij} d_{ij}^2} - \frac{R_j^3 \dot{z}_j}{d_{ij}^3} - \frac{B_{0j} \epsilon_{2i}}{s_{ij} d_{ij}^2} \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{ni} &= -\frac{2\nu}{R_i} \left[ (n+2) \dot{a}_{ni} + 2(n-1) \dot{R}_i \epsilon_{ni} + \right. \\
& + \sum_{m=2}^N \frac{3n \Theta_{m1n}^{2/n, n-2} \dot{z}_i \epsilon_{mi}}{2} - \\
& - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^K \left( \frac{10R_i B_{0j}}{d_{ij}^3} \delta_{2n} - \frac{21R_i^2 B_{0j}}{s_{ij} d_{ij}^4} \delta_{3n} - \right. \\
& \left. - \frac{15R_i R_j^3 \dot{z}_j}{s_{ij} d_{ij}^4} \delta_{2n} - \sum_{m=2}^N \frac{3n \Theta_{m1n}^{2/n, n-2} B_{0j} \epsilon_{mi}}{2s_{ij} d_{ij}^2} \right) \right],
\end{aligned}$$

где  $\nu = \mu/\rho_0$ ,  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости жидкости. Эффект сжимаемости жидкости предполагается малым, а потому описывается без учета деформаций и взаимодействия пузырьков [15]. При таком предположении поправка на сжимаемость  $\Delta_i$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Delta_i &= \frac{\dot{R}_i}{c_0} \left( R_i \ddot{R}_i + \frac{\dot{R}_i^2}{2} + \frac{\dot{z}_i^2}{4} + \frac{p_i - p_\infty}{\rho_0} \right) + \\
& + \frac{R_i}{c_0} \left( \frac{\dot{z}_i \dot{z}_i}{2} + \frac{\dot{p}_i - \dot{p}_\infty}{\rho_0} - \frac{4\nu \dot{R}_i}{R_i} \right), \tag{5}
\end{aligned}$$

где  $c_0$  — невозмущенная скорость звука в жидкости.

Система уравнений (2)–(4) решается численно высокоточным методом Дормана–Принса [16].

В финальной стадии сжатия (рис. 2, промежуток времени после отмеченного точкой момента) за счет сильного уменьшения размеров пузырьков взаимодействие между ними становится несущественным, распределение параметров пара в

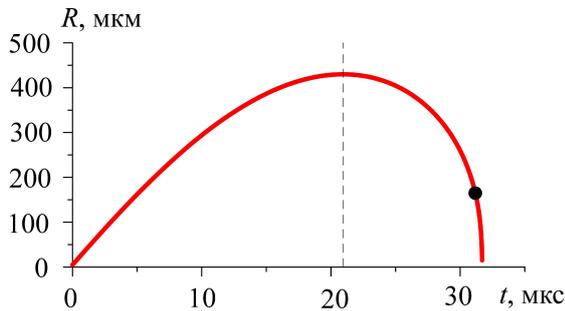


Рис. 2. Типичное изменение радиуса центрального пузырька при его расширении-сжатии. Вертикальной линией указана граница между расширением и сжатием, а точкой – момент, после которого влияние соседних пузырьков несущественно

пузырьках — все более неоднородным, внутри пузырьков могут зарождаться радиально сходящиеся ударные волны. На процесс сжатия оказывают влияние и такие эффекты, как нестационарная теплопроводность пара и жидкости, неравновесные испарение и конденсация на межфазной поверхности. Кроме того, необходимо принимать во внимание немало деформаций поверхности пузырька, несферичность динамики пара в пузырьке, в том числе и возникающих в нем ударных волн. С учетом этого в финальной высокоскоростной стадии сжатия для пузырьков применяется модель динамики одиночного осесимметричного пузырька [9]. Она является обобщением одномерной модели работы [6] и представляет собой следующую систему уравнений газовой динамики:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nabla p &= 0, \\ \rho \frac{dE}{dt} + \nabla \cdot (p\mathbf{u} - \kappa \nabla T) &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

замыкаемых широкодиапазонными уравнениями состояния жидкости и пара вида  $p = p(\rho, T)$ ,  $e = e(\rho, T)$  в форме Ми-Грюнайзена [6]. Здесь  $\rho$  — плотность;  $\mathbf{u}$  — скорость частицы среды;  $p$  — давление;  $E = e + \mathbf{u}^2/2$  — удельная полная энергия;  $e$  — удельная внутренняя энергия;  $T$  — температура;  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности.

Граничные условия на поверхности пузырька

имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho^+ (\mathbf{D} - \mathbf{u}^+) \cdot \mathbf{n} &= \rho^- (\mathbf{D} - \mathbf{u}^-) \cdot \mathbf{n} = j, \\ p^+ &= p^-, \quad T^+ = T^-, \\ \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right)^+ - \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right)^- &= jl, \end{aligned} \tag{7}$$

где  $\mathbf{D} = D \cdot \mathbf{n}$  — скорость смещения элемента поверхности пузырька;  $\mathbf{n}$  — внешняя единичная нормаль;  $l$  — теплота парообразования;  $j$  — интенсивность фазовых превращений (испарения или конденсации), отнесенная к единице времени и единице поверхности. Верхний знак «+» означает отношение к стороне жидкости, «-» — к стороне газа. Интенсивность фазовых преобразований  $j$  определяется по формуле Герца-Кнудсена-Ленгмюра [6]. Зависимости  $\kappa(T)$ ,  $l(T)$  представляют собой аппроксимации экспериментальных данных.

На большом удалении от пузырька имеем  $p = p_\infty$ ,  $T = T_\infty$ .

Уравнения (6)–(7) записываются в подвижных координатах относительно сферической или цилиндрической неподвижных систем отсчета. При этом сферическая система отсчета используется при малой и умеренной несферичности динамики пара в пузырьке, а при большой несферичности (определяется по уровню несферичности ударной волны) осуществляется переход к цилиндрической системе отсчета. При использовании сферической системы отсчета применяются радиально расходящиеся сетки. В момент перехода к цилиндрической системе в центральной части пузырька эти сетки меняются на близкие к декартовым. Решение находится с помощью эффективной модификации метода С.К. Годунова, имеющей второй порядок точности [9].

#### 4. Иллюстрация применения

Покажем применение предлагаемой методики на примере динамики центрального пузырька в простейшем случае стримера, когда он состоит из трех одинаковых пузырьков (рис. 1). Поскольку центральный пузырек в таком стримере лишь один, соответствующий индекс «2» далее опускается ( $R_2, \epsilon_{n,2}$  и т.д. заменяется на  $R, \epsilon_n$  и т.д.). Кроме того, в силу равенства расстояний между соседними пузырьками ( $d_{12} = d_{23}$ ) вместо  $d_{12}, d_{23}$  используется  $d$ .

##### 4.1. Входные данные

Жидкость — ацетон при температуре  $T_\infty = 273$  К. В начальный момент времени  $t = 0$  все три пузырька стримера одинаковые сферические, с радиусом 5 мкм, заполнены паром

ацетона, находящимся в состоянии насыщения с давлением  $p_i = 0.09$  бар. Давление жидкости  $p_\infty$  меняется по гармоническому закону

$$p_\infty = p_0 - p_a \cos \omega t,$$

с амплитудой  $p_a = 15$  бар и частотой  $\omega = 2\pi \times 19.3$  кГц относительно статического давления  $p_0 = 1$  бар. Сначала следует фаза понижения давления, а затем фаза его повышения, в результате чего пузырьки первоначально расширяются, а затем сжимаются. Начальное расстояние между центральным и соседними пузырьками равно семи радиусам центрального пузырька в момент его максимального расширения (что соответствует  $d(0) \approx 3$  мм).

#### 4.2. Влияние взаимодействия пузырьков при их коллапсе

Первым шагом при применении предлагаемой методики является определение момента времени  $t_{cr}$  на стадии коллапса центрального пузырька (т.е.  $t_{cr} > t_{max}$ , где  $t_{max}$  — момент максимального расширения центрального пузырька, отмеченный на рис. 2 вертикальной линией), после которого влияние взаимодействия пузырьков несущественно. Для этого применяется модель взаимодействующих пузырьков (1)–(5). При этом сначала рассчитывается расширение–сжатие пузырьков в стримере до завершения сжатия одного из пузырьков. Далее проводится серия аналогичных расчетов по этой же модели, но с отключением взаимодействия между пузырьками в некоторый момент  $t^*$  стадии их сжатия (т.е.  $t^* > t_{max}$ ). Момент отключения взаимодействия  $t^*$  последовательно удаляется от начала стадии сжатия (т.е. от момента  $t_{max}$ ) до тех пор, пока динамика центрального пузырька при включенном и выключенном взаимодействиях пузырьков не окажется близкой, что оценивается сопоставлением временных зависимостей радиуса центрального пузырька  $R(t)$  и амплитуд отклонений его формы от сферической  $a_n(t)$ .

На рис. 3 показано влияние момента отключения взаимодействия пузырьков на временные зависимости радиуса центрального пузырька и амплитуды отклонения его формы от сферической в виде второй поверхностной гармоники (амплитуды других отклонений в рамках модели (1)–(5) отсутствуют) в ходе коллапса. Видно, что при отключении в момент  $t^* = t_3$  взаимодействие между пузырьками несущественно. Это означает, что момент  $t_3$  можно принять в качестве момента  $t_{cr}$ .

#### 4.3. Уточнение радиальной составляющей динамики среды в центральном пузырьке в начальной стадии его коллапса

Следующим шагом при использовании предлагаемой методики является уточнение радиальной составляющей движения содержимого центрального пузырька в начальной стадии его коллапса (при  $t_{max} < t < t_{cr}$ ), где взаимодействие между пузырьками существенно. Необходимость уточнения обусловлена тем, что из-за малости влияния на изучаемый процесс при  $t_{max} < t < t_{cr}$  динамика содержимого центрального пузырька в модели взаимодействующих пузырьков описывается весьма приближенно (принимается, что пара в пузырьке находится в состоянии насыщения с постоянным давлением  $p_i$ ). Однако, при  $t > t_{cr}$  динамика пара в пузырьке становится значимой, так что для адекватного описания необходимо уточнение в конце начального интервала  $t_{max} < t < t_{cr}$ . В частности, на интервале  $t_{max} < t < t_{cr}$  требуется корректно описать изменение массы пара внутри пузырька, рост неоднородности распределения термодинамических параметров в полости пузырька. Для этого используется одномерная (сферически симметричная) версия модели динамики одиночного пузырька (6)–(7). С ее применением на отрезке  $t_{max} < t < t_{cr}$  проводится расчет динамики центрального пузырька (начальные данные определяются результатами численного решения по модели взаимодействующих пузырьков в момент  $t \approx t_{max}$ ). Это позволяет уточнить сферическую составляющую динамики пара в центральном пузырьке в начале финальной стадии коллапса пузырька (в момент  $t \approx t_{cr}$ ), где влияние взаимодействия между пузырьками несущественно. Вместе с тем, при одних и тех же входных данных, динамика одиночного пузырька на отрезке  $t_{max} < t < t_{cr}$  может отличаться от динамики центрального пузырька в стримере, где пузырьки взаимодействуют. Так, на рис. 3 видно, что зависимости  $R(t)$ , рассчитанные с учетом и без учета взаимодействия пузырьков с момента  $t_1$  до конца коллапса, довольно сильно расходятся. В настоящей работе за критерий близости динамики одиночного пузырька и центрального пузырька в стримере принимается близость их радиальных зависимостей  $R(t)$ . Удовлетворить этому условию можно по-разному, например, слегка изменив условия коллапса одиночного пузырька (температуру жидкости, ее давление, начальный радиус пузырька). В настоящей работе с этой целью варьируется давление жидкости  $p_\infty^*$  на внешней границе расчетной области, причем при коллапсе (при  $t > t_{max}$ ) оно считается постоянным. Значение  $p_\infty^*$  подбирается путем проведения серии расчетов

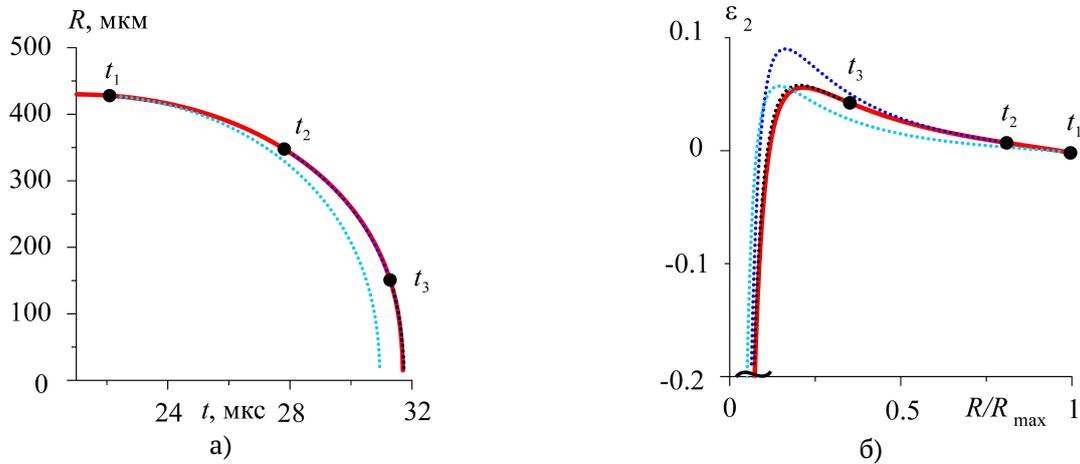


Рис. 3. Изменение радиуса центрального пузырька (а) и деформаций его поверхности в виде второй поверхностной гармоники (б) в ходе коллапса этого пузырька с учетом взаимодействия с соседними пузырьками (сплошные кривые) и без его учета (пунктирные кривые), начиная с моментов времени  $t_1 - t_3$ , указанных точками

по модели одиночного пузырька до тех пор, пока временная зависимость радиуса центрального пузырька  $R(t)$  на отрезке  $t_{max} < t < t_{cr}$  не окажется достаточно близкой к аналогичной зависимости радиуса центрального пузырька по модели взаимодействующих пузырьков.

На рис. 4 продемонстрировано, что временные зависимости радиуса центрального пузырька в ходе его коллапса до момента  $t_{cr}$ , рассчитанные по модели взаимодействующих пузырьков (1)–(5) и по одномерному (сферически симметричному) варианту модели динамики одиночного пузырька

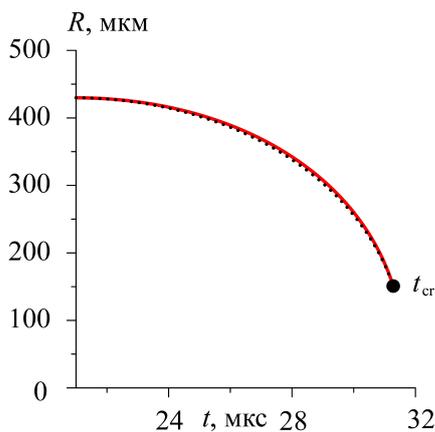


Рис. 4. Изменение радиуса центрального пузырька в ходе его коллапса до момента  $t_{cr}$  по модели взаимодействующих пузырьков (1)–(5) (сплошная красная кривая) и по одномерной версии модели одиночного пузырька (6)–(7) при  $p_{\infty}^* = 12.9$  бар (штриховая черная кривая)

ка (6)–(7) при  $p_{\infty}^* = 12.9$  бар, являются достаточно близкими. Это означает, что для уточнения радиальной составляющей динамики центрального пузырька на отрезке  $t_{max} < t < t_{cr}$ , где взаимодействие пузырьков существенно, можно использовать результаты расчетов динамики пузырька по одномерному (сферически симметричному) варианту модели динамики одиночного пузырька при давлении жидкости  $p_{\infty} = p_{\infty}^* = 12.9$  бар.

#### 4.4. Квазиодномерная аппроксимация начальной стадии коллапса пузырька

Завершающим шагом при использовании предлагаемой методики является переход к модели динамики одиночного осесимметричного пузырька (6)–(7) в момент  $t = t_{cr}$ . Входные данные для этой модели (двумерные поля давления, плотности, температуры как в жидкости, так и в паре, форма межфазной поверхности и другие необходимые характеристики) определяются по результатам расчетов сферической составляющей по одномерному варианту этой модели и несферической составляющей по модели взаимодействующих пузырьков. Фактически здесь происходит переход от квазиодномерного моделирования к полностью двумерному.

Возможность такого перехода иллюстрируют рис. 5 и 6, на которых сопоставляются результаты расчетов коллапса одиночного пузырька, полученные с применением квазиодномерной модели до момента  $t_{cr}$  с последующим переходом на двумерную модель, с результатами расчетов этой же задачи с использованием двумерной модели с самого начала коллапса. Как и в разделе 3.1, начальные условия (параметры сферической и несфери-

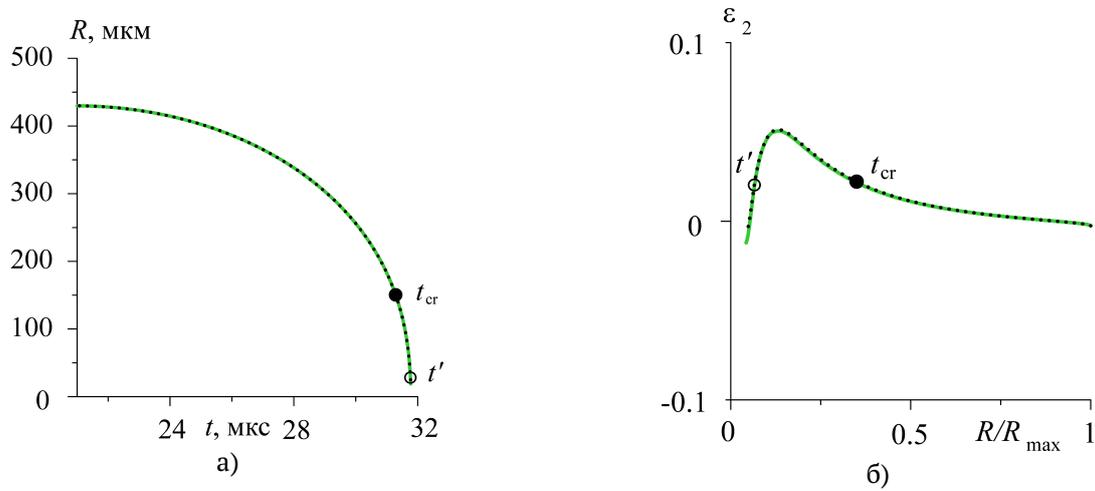


Рис. 5. Изменение радиуса пузырька (а) и деформаций его поверхности в виде второй поверхностной гармоники (б) в ходе коллапса одиночного пузырька при его расчете с применением двумерной модели (сплошные зеленые кривые) и с использованием квазиодномерной модели при  $t \leq t_{cr}$  и двумерной при  $t > t_{cr}$  (штриховые черные кривые). Момент  $t'$  соответствует данным рис. 6

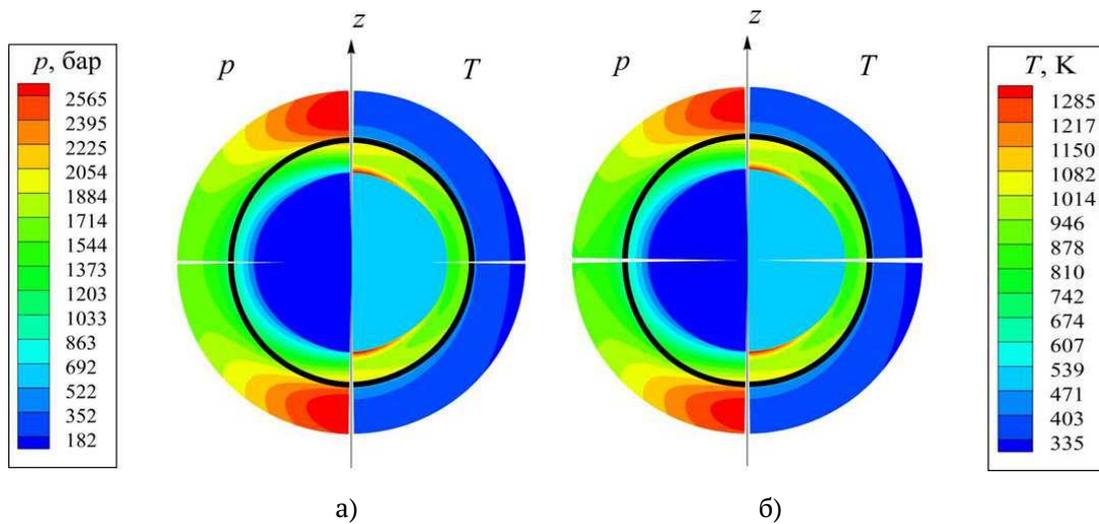


Рис. 6. Поля давления и температуры в пузырьке и окружающей жидкости в момент времени  $t'$  (указан на рис. 5),  $t' > t_{cr}$ , финальной стадии коллапса пузырька при его расчете с применением двумерной модели (а) и с использованием квазиодномерной модели при  $t \leq t_{cr}$  и двумерной при  $t > t_{cr}$  (б). Жирная черная линия — поверхность пузырька

ческой составляющих) соответствуют результатам расчетов стадии расширения пузырьков по модели с учетом их взаимодействия. Аналогично разделу 3.2 при квазиодномерном моделировании коллапса сферическая составляющая рассчитывается по одномерному варианту модели динамики одиночного пузырька, несферическая — по модели взаимодействующих пузырьков, но без учета их взаимодействия, а давление жидкости при коллапсе полагается постоянным и равным  $p_{\infty}^* = 12.9$  бар. Рис. 5 и 6 показывают, что погрешности используемого в методике перехода от квазиодномерного

моделирования к двумерному вполне приемлемы.

#### 4.5. Динамика центрального пузырька при однократном сильном расширении–сжатии в стримере из трех пузырьков

Рис. 7 и 8 иллюстрируют ряд важных особенностей динамики центрального пузырька при его однократном сильном расширении–сжатии в стримере из трех пузырьков в принятых условиях. На большей части расширения и сжатия форма пузырька определяется второй поверхностной гармоникой. На рис. 7 видно, что в ходе расширения относитель-

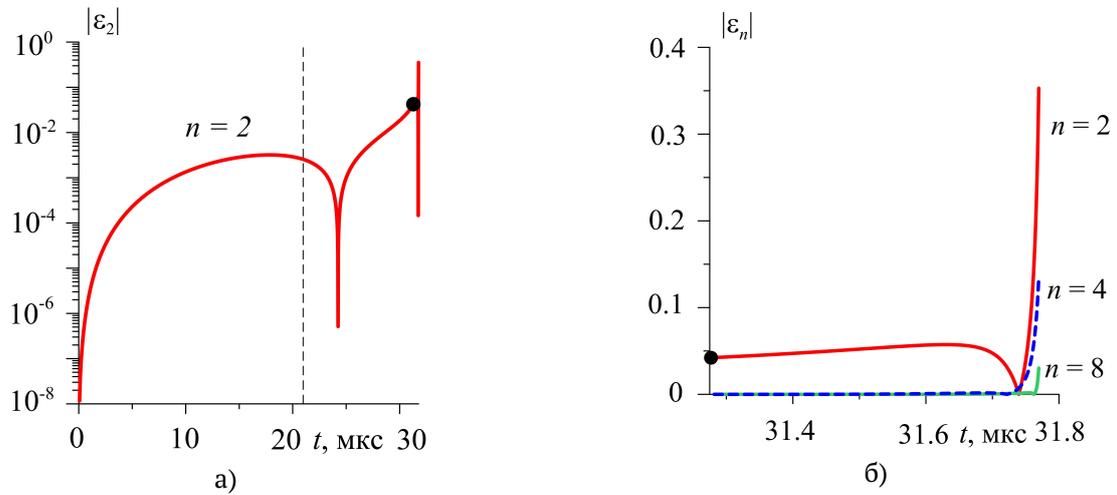


Рис. 7. Изменение амплитуд деформаций центрального пузырька: (а) в виде второй поверхностной гармоники при его расширении–сжатии, (б) в виде второй (красная кривая), четвертой (синяя кривая) и восьмой (зеленая кривая) гармоник в финальной стадии сжатия. Вертикальной линией указана граница между расширением пузырька и его сжатием, а точкой – момент, после которого влияние соседних пузырьков несущественно

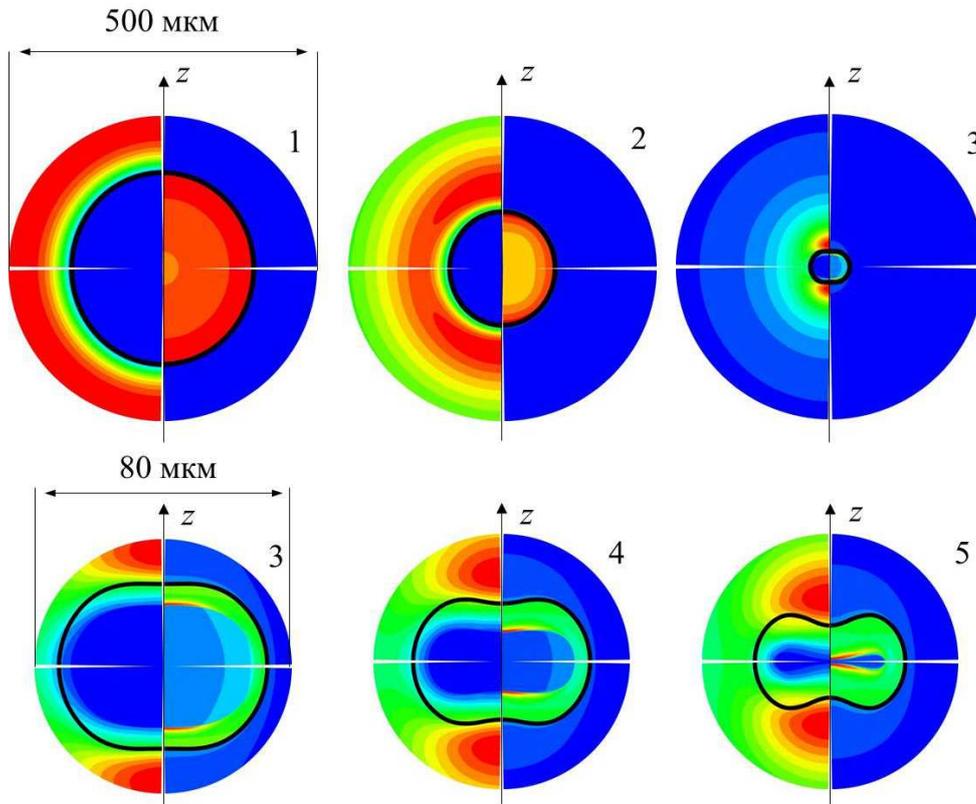


Рис. 8. Изменение полей давления (слева) и температуры (справа) в центральном пузырьке и окружающей жидкости в пять последовательных моментов времени  $t_k, k = 1 - 5$  финальной стадии сжатия. Жирная черная линия – поверхность пузырька. Числовые значения границ между цветами определяются по формуле  $f_i = f_m + (f_M - f_m) i / 16$ , где  $i = 1, 2, \dots, 15, f \equiv p, T$ , а максимальные и минимальные значения  $p$  и  $T$  приведены в табл. 1

Таблица 1

$k$	$t_k$ , мкс	$p_m$ , бар	$p_M$ , бар	$T_m$ , К	$T_M$ , К
1	31.282	0.08	36.7	273	362
2	31.629	2.9	140.5	273	444
3	31.760	5.8	2477	273	1382
4	31.765	6	3843	273	1938
5	31.770	6.8	6084	273	2257

ная амплитуда деформаций центрального пузырька  $|\varepsilon_2|$  в виде второй поверхностной гармоники (деформации по другим гармоника в рамках принятой модели малы) монотонно возрастает, что обусловлено влиянием соседних пузырьков. При этом изначально сферический пузырек становится все более сплюснутым вдоль оси симметрии  $z$ .

В ходе сжатия (рис. 7(а),(б)) величина  $|\varepsilon_2|$  сначала уменьшается до нуля, затем возрастает до некоторого максимума, после чего вновь падает до нуля и вновь возрастает. Другими словами, пузырек при сжатии из сплюснутого превращается в сферический, затем в вытянутый вдоль оси  $z$ , после чего вновь преобразуется в сферический, а далее — вновь в сплюснутый.

В конце финальной стадии сжатия в силу малости деформаций поверхности пузырька в его форму вносит вклад не только вторая, но и другие гармоники. На рис. 7(б) представлено изменение амплитуд трех наибольших по величине поверхностных гармоник в финале сжатия:  $|\varepsilon_2|$ ,  $|\varepsilon_4|$  и  $|\varepsilon_8|$ . Видно, что при  $t > 31.7$  мкс амплитуда  $|\varepsilon_4|$  примерно в 3 раза меньше, чем  $|\varepsilon_2|$ , а  $|\varepsilon_8|$  в 10 раз меньше, чем  $|\varepsilon_2|$ .

На рис. 8 видно, что в момент 1 финальной стадии сжатия поверхность пузырька, поля давления и температуры в пузырьке и окружающей жидкости близки к сферическим. Затем их несферичность довольно быстро и сильно нарастает. При этом нарастает и неоднородность как по угловой координате, так и в радиальном направлении. К моменту 3 пузырек становится сплюснутым, что соответствует росту амплитуды деформаций пузырька по второй гармонике. Дальнейшее увеличение сплюснутости приводит к образованию вмятин (моменты 4–5). Форма этих вмятин определяется в большей степени гармоникой с номером  $n = 4$  и в меньшей степени гармониками с  $n = 6, 8$ . В полости пузырька к моменту 4 сформировалась сильно несферическая сходящаяся к центру ударная волна с неоднородным распределением давления и температуры по ее фронту. Последующая фокусировка волны оказывается весьма далекой от сферической. В частности, начинающееся в мо-

мент 5 смыкание полости перед фронтом ударной волны реализуется в виде столкновения двух близких к плоским ударных волн. Эти волны распространяются навстречу друг к другу вдоль прямой, проходящей через центры пузырьков. Очевидно, что достигаемые при такой фокусировке максимальные степени сжатия будут намного ниже, чем при чисто сферической фокусировке.

Таким образом, показано, что при сильном расширении–сжатии изначально сферического кавитационного пузырька при наличии соседних пузырьков динамика пара в его полости может существенно отклоняться от того, что реализуется внутри аналогичного одиночного пузырька.

## 5. Заключение

Разработаны математическая модель и методика расчета сильного расширения–сжатия кавитационных пузырьков, находящихся в центральной области стримера, где пузырьки остаются практически неподвижными. По существу данные модели и методики представляют собой эффективное сочетание созданных ранее авторами для расчета динамики взаимодействующих слабонесферических пузырьков в стримере и динамики одиночного осесимметричного пузырька. Эффективность такого сочетания обусловлена учетом особенностей задачи. На стадии низкоскоростного расширения и сжатия гидродинамическое взаимодействие пузырьков существенно влияет на эволюцию их формы, в то время, как пузырьки остаются близкими к гомобарическим, а деформации их поверхности — малыми. Здесь применяется экономичная упрощенная модель динамики слабонесферических пузырьков. В финальной высокоскоростной стадии сжатия пузырьков их взаимодействие несущественно. Вместе с тем здесь нужно учитывать сжимаемость жидкости, неоднородность пара в пузырьках, испарение–конденсацию на межфазной поверхности, образование и фокусировку несферических ударных волн в центральной области пузырька. С учетом этого в финальной высокоскоростной стадии сжатия применяется модель динамики одиночного осесимметричного пузырька.

Приведен пример, иллюстрирующий особенности применения разработанных модели и методики для расчета динамики центрального пузырька при его сильном расширении–сжатии в простейшем стримере, состоящем из трех пузырьков. Показано, что при сильном расширении–сжатии изначально сферического кавитационного пузырька наличие соседних пузырьков может существенно отклонять динамику пара в его полости от аналогичного одиночного пузырька.

## Список литературы

- [1] Flannigan D. J., Suslick K. S. Inertially confined plasma in an imploding bubble // *Nature Physics*. 2010. V. 6. P. 598–601. (DOI: [10.1038/nphys1701](https://doi.org/10.1038/nphys1701))
- [2] Taleyarkhan R.P. et al. Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation // *Science*. 2002. V. 295, no. 5561. P. 1868–1873. (DOI: [10.1126/science.1067589](https://doi.org/10.1126/science.1067589))
- [3] Taleyarkhan R.P. et al. Nuclear emissions during self-nucleated acoustic cavitation // *Phys. Rev. Lett.* 2006. V. 96. P. 034301. (DOI: [10.1103/PhysRevLett.96.034301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.034301))
- [4] Suslick K.S. Sonochemistry // *Science*. 1990. V. 247. P. 1439–1445. (DOI: [10.1126/science.247.4949.1439](https://doi.org/10.1126/science.247.4949.1439))
- [5] Нигматулин Р.И., Аганин А.А., Топорков Д.Ю., Ильгамов М.А. Образование сходящихся ударных волн в пузырьке при его сжатии // *ДАН*. 2014. Т. 458, № 3. С. 282–286. (DOI: [10.7868/S0869565214270115](https://doi.org/10.7868/S0869565214270115))
- [6] Nigmatulin R.I., Akhatov I.Sh., Topolnikov A.S. et. al. The theory of supercompression of vapor bubbles and nano-scale thermonuclear fusion // *Phys. Fluids*. 2005. V. 17, no. 10. P. 1–31. (DOI: [10.1063/1.2104556](https://doi.org/10.1063/1.2104556))
- [7] Hilgenfeldt S., Grossmann S., Lohse D. Sonoluminescence light emission // *Phys. Fluids*. 1999. V. 11, no. 6. P. 1318–1330. (DOI: [10.1063/1.869997](https://doi.org/10.1063/1.869997))
- [8] Аганин А.А., Ильгамов М.А., Нигматулин Р.И., Топорков Д.Ю. Эволюция искажений сферичности кавитационного пузырька при акустическом сверхсжатии // *Известия РАН. МЖГ*. 2010. № 1. С. 57–69. (<https://elibrary.ru/item.asp?id=13001975>)
- [9] Аганин А.А., Халитова Т.Ф., Хисматуллина Н.А. Численное моделирование радиально сходящихся ударных волн в полости пузырька // *Математическое моделирование*. 2014. Т. 26, № 4. С. 3–20. (DOI: [10.1134/S2070048214060027](https://doi.org/10.1134/S2070048214060027))
- [10] Аганин А.А., Халитова Т.Ф. Деформация ударной волны при сильном сжатии несферических пузырьков // *Теплофизика высоких температур*. 2015. Т. 53, № 6. С. 923–927. (DOI: [10.1134/S0018151X15050016](https://doi.org/10.1134/S0018151X15050016))
- [11] Xu Y., Butt A. Confirmatory experiments for nuclear emissions during acoustic cavitation // *Nuclear Engin. and Design*. 2005. V. 235, № 11–12. P. 1317–1324. (DOI: [10.1016/j.nucengdes.2005.02.021](https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2005.02.021))
- [12] Аганин А.А., Давлетшин А.И., Топорков Д.Ю. Динамика расположенных в линию кавитационных пузырьков в интенсивной акустической волне // *Вычислительные технологии*. 2014. Т. 19, № 1. С. 3–19. (<http://www.ict.nsc.ru/jct/annotation/1587>)
- [13] Аганин А.А., Давлетшин А.И. Моделирование взаимодействия газовых пузырьков в жидкости с учетом их малой несферичности // *Математическое моделирование*. 2009. Т. 21, № 6. С. 89–102. (<http://mi.mathnet.ru/mm2847>)
- [14] Gavriluyk S.L., Teshukov V.M. Drag force acting on a bubble in a cloud of compressible spherical bubbles at large Reynolds number // *European Journal of Mechanics B/Fluids*. 2005. V. 24, № 4. P. 468–477. (DOI: [10.1016/j.euromechflu.2004.12.001](https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2004.12.001))
- [15] Doinikov A.A. Equations of coupled radial and translational motions of a bubble in a weakly compressible liquid // *Phys. Fluids*. 2005. V. 17, № 12. P. 128101. (DOI: [10.1063/1.2145430](https://doi.org/10.1063/1.2145430))
- [16] Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.



## Numerical simulation of bubble dynamics in central region of streamer

Aganin A.A., Davletshin A.I., Khalitova T.F.

Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Scientific Center of the RAS, Kazan

A mathematical model and a numerical technique for studying strong expansion and collapse of cavitation bubbles located in the central region of a streamer where the bubbles are almost motionless are developed. They are essentially efficient combinations of the models and techniques previously created by the authors for calculating the dynamics of interacting weakly-non-spherical bubbles in a streamer and the dynamics of a single axisymmetric bubble. The first model and technique are applied at the low-speed stage of expansion and compression of bubbles where their hydrodynamic interaction is significant. The second ones are used at the final high-speed stage of their collapse where the interaction is inessential. The simplest case of the streamer comprising three bubbles is considered as an example to illustrate the features of the developed model and numerical technique. It is shown that under the strong expansion and collapse of an initially spherical cavitation bubble, the presence of neighboring bubbles can substantially deflect the bubble cavity vapor dynamics from what is realized inside a similar but single bubble.

**Keywords:** cavitation bubble, hydrodynamic interaction of bubbles, shock waves, deformation of bubbles



## Коллапс слабонесферического кавитационного пузырька в ацетоне и тетрадекане<sup>1</sup>

Топорков Д.Ю.

Институт механики и машиностроения – обособленное структурное подразделение ФИЦ КазНЦ РАН, Казань

Исследуется коллапс слабонесферического кавитационного пузырька в ацетоне и тетрадекане. Радиус пузырька 500 мкм, температура и давление жидкости 293 К и 15 бар в случае ацетона и 663 К и 50 бар в случае тетрадекана. Используется гидродинамическая модель, в которой учитывается сжимаемость жидкости, нестационарная теплопроводность пара и жидкости, неравновесный теплообмен на поверхности пузырька, несовершенство пара, применяются реалистичные широкодиапазонные уравнения состояния. Установлено, что при коллапсе пузырька и в ацетоне и тетрадекане в его полости возникают сходящиеся ударные волны, а максимальные значения термодинамических параметров оказываются сравнимыми. Сравнение эволюции возмущения сферичности пузырька и движения в его полости ударной волны позволяет предположить, что тетрадекан является более благоприятной средой для реализации близкой к сферической кумуляции в пузырьке, чем ацетон.

**Ключевые слова:** коллапс пузырька, ударные волны, несферичность, возмущение сферической формы

### 1. Введение

Динамика пузырьков в жидкости представляет большой интерес для науки и приложений из-за возможности достижения в них высоких плотностей, давлений и температур [1, 2]. Экстремально высокие степени сжатия содержимого пузырьков реализуются в финальной стадии схождения формирующихся в их полости ударных волн. В малой центральной области пузырька в течение чрезвычайно короткого времени температуры и плотности могут принимать значения, превышающие  $10^7$  К и  $10$  г/см<sup>3</sup> соответственно [1–6]. Необходимым условием достижения сверхсжатия содержимого пузырька возникающей в нем сходящейся ударной волной является близость ее формы к сферической вплоть до вхождения в малую центральную область пузырька. Как известно, ударная волна в момент своего образования имеет форму межфазной поверхности. Таким образом, форма ударной волны вблизи момента ее фокусировки зависит от

изменения формы пузырька в ходе его коллапса. Поэтому изучение эволюции возмущения сферической формы пузырька является актуальным.

В [7] представлен критерий образования сходящихся ударных волн в пузырьке при его коллапсе. Согласно этому критерию более подходящими для реализации ударных волн являются парогазовые среды с большой молекулярной массой  $M$  и малым показателем адиабаты  $\gamma$ . С учетом этого, в работе [8] с применением приближенной математической постановки проведено сравнение возможности возникновения ударных волн в паровых пузырьках, коллапсирующих в ацетоне ( $M = 58$  г/моль,  $\gamma = 1.125$ ), реализация суперсжатия в котором была продемонстрирована в [6], и значительно более тяжеломолекулярной жидкости – тетрадекане ( $M = 198$  г/моль,  $\gamma = 1.0265$ ). Полученные приближенные оценки [8] показали, что тетрадекан является более перспективной средой для реализации сильного сжатия среды в коллапсирующих пузырьках по сравнению с ацетоном. С учетом этого в настоящей работе с применением существенно более сложной по сравнению с [8] математической модели анализируются возмож-

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01135)

ности реализации суперсжатия среды в кавитационном пузырьке в тетрадекане и проводится сравнение со случаем коллапса пузырька в ацетоне. Исследуется эволюция возмущений сферичности пузырька при его коллапсе в этих жидкостях.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается коллапс слабонесферического кавитационного пузырька в безграничном объеме неподвижной жидкости (ацетоне и тетрадекане). Температура  $T_0$  и давление  $p_0$  жидкости равны 293 К и 15 бар в случае ацетона и 663 К и 50 бар в случае тетрадекана. В начале коллапса давление пара в пузырьке с радиусом  $R_0 = 500$  мкм равно давлению насыщения  $p_S(T_0) = 0.24$  бар в ацетоне и 10.3 бар в тетрадекане. Несферичность пузырька считается малой.

Для описания движения пара и жидкости, изменения радиуса пузырька  $R(t)$  используется гидродинамическая модель [6, 9], в которой динамика пара и жидкости считается сферически симметричной, учитывается сжимаемость жидкости, нестационарная теплопроводность пара и жидкости, неравновесный тепломассообмен на поверхности пузырька, несовершенство пара, применяются реалистичные широкодиапазонные уравнения состояния [10, 11].

Для анализа роста несферичности пузырька при коллапсе возмущение  $\delta(t, \theta, \varphi)$  его сферической формы  $r = R(t)$  принимается в виде

$$\delta(t, \theta, \varphi) = \varepsilon_{nm}(t) Y_{nm}(\theta, \varphi). \quad (1)$$

Здесь  $r, \theta, \varphi$  – сферическая система координат с началом отсчета в центре пузырька,  $\varepsilon_{nm}(t) = a_{nm}(t)/R(t)$ ,  $a_{nm}(t)$  – амплитуда отклонения формы пузырька от сферической в виде поверхностной сферической гармоники  $Y_{nm}(\theta, \varphi)$  степени  $n$  порядка  $m$ ,  $|\varepsilon_{nm}| \ll 1$ . Для описания эволюции возмущения сферичности используется модель [9], согласно которой амплитуда возмущения  $a_{nm}(t)$  описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, в котором учитываются влияние поверхностного натяжения, вязкости жидкости и, аналогично [12], эффект содержимого пузырька. В дальнейшем индекс  $m$  опускается, так как эволюция величины  $\varepsilon_{nm}$  от  $m$  не зависит. Полагается, что в начале коллапса (при  $t = 0$ )  $a_n = a_{n,0}$ ,  $\dot{a}_n = 0$ .

## 3. Сжатие содержимого пузырька

На рис. 1 приведено изменение радиуса пузырька при коллапсе в ацетоне и тетрадекане. В обоих случаях в полости пузырьков в финальной

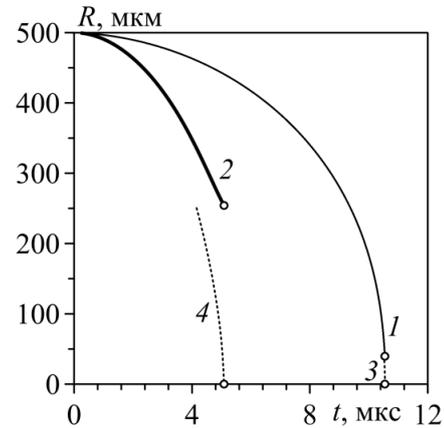


Рис. 1. Изменение радиуса пузырьков в ацетоне при  $T_0 = 293$  К и  $p_0 = 15$  бар (кривая 1) и тетрадекане при  $T_0 = 663$  К и  $p_0 = 50$  бар (кривая 2) в ходе их коллапса. Пунктирные линии соответствуют траектории ударных волн с момента их возникновения в ацетоне (кривая 3) и тетрадекане (кривая 4). Кружочками отмечены моменты достижения экстремальных значений термодинамических параметров в пузырьке.

стадии их коллапса образуются сходящиеся ударные волны. В ходе схождения их интенсивность быстро нарастает, и в момент фокусировки термодинамические параметры принимают сверхвысокие значения. Радиусы пузырьков в этот момент  $R_{extr}$  сильно различаются –  $R_{extr} = 39$  мкм в ацетоне и  $R_{extr} = 252$  мкм в тетрадекане. Также сильно различается максимальная радиальная скорость пузырьков – 600 м/с в ацетоне и 90 м/с в тетрадекане. Следует отметить, что если диапазон изменения радиуса пузырька (от  $R_0$  до  $R_{extr}$ ) в тетрадекане существенно меньше, чем в случае ацетона, то, как видно на рис. 1, изменение радиуса поверхности ударной волны (от момента ее возникновения до фокусировки) наоборот значительно больше, чем в случае ацетона.

На рис. 2 приведены распределения термодинамических параметров в момент экстремального сжатия пара в пузырьках, коллапсирующих в ацетоне и тетрадекане. Все параметры представлены вне малой центральной области с радиусом  $r = 0.25$  мкм, где из-за сверхсильного сжатия пара оказывается существенным влияние процессов диссоциации, ионизации, искажения сферичности ударной волны. Эти процессы не описываются в используемой математической постановке. Поэтому указанная малая центральная область пузырька не иллюстрируется. Из рис. 2 видно, что, несмотря на огромную разницу в кинематических характе-

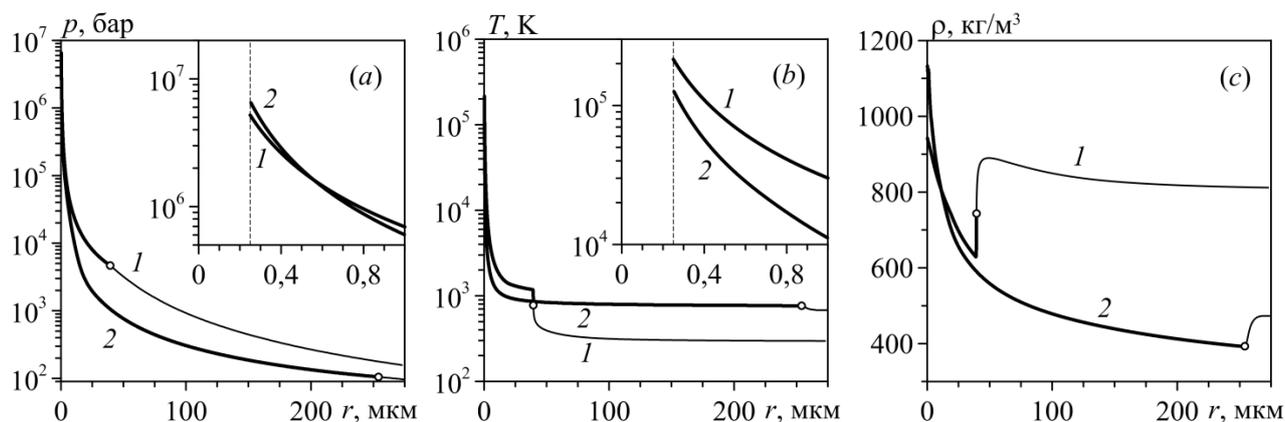


Рис. 2. Пространственные распределения давления (а), температуры (b) и плотности (с) в паре и окружающем его слое жидкости в момент максимального сжатия пара в пузырьке в ацетоне при  $T_0 = 293$  К и  $p_0 = 15$  бар (кривые 1) и тетрадекане при  $T_0 = 663$  К и  $p_0 = 50$  бар (кривые 2). Кружочками отмечены значения на поверхности пузырька.

ристиком коллапса пузырьков в ацетоне и тетрадекане, в обоих случаях максимальные значения термодинамических параметров при сохранении сферической формы ударной волны оказываются сравнимыми.

#### 4. Возмущения сферической формы пузырьков

В реальности поверхность пузырька и форма возникающей ударной волны всегда имеют несферические возмущения. Возмущения сферичности пузырька в ходе его коллапса при несущественном влиянии вязкости (когда номер гармоники  $n$  в (1) относительно невелик) возрастают в режиме колебаний по закону, близкому к степенному [13, 14]. Возмущение сферичности ударной волны в ходе ее схождения к центру пузырька также изменяется в режиме колебаний с возрастающей амплитудой, но, что является существенным аспектом, медленнее, чем возрастает несферичность пузырька [15]. При этом наиболее опасными для реализации сферической кумуляции являются низкочастотные возмущения сферичности ударной волны.

На рис. 3 представлена эволюция относительной амплитуды возмущения сферической формы пузырьков  $|\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0}|$  для некоторых низкочастотных гармоник с номерами  $n$  из диапазона  $2 \leq n \leq 10$  при коллапсе пузырьков в ацетоне и тетрадекане. В силу значительно меньшей глубины коллапса в случае тетрадекана количество колебаний величины  $\varepsilon_n$  относительно нулевого значения, которое соответствует сферическому состоянию, меньше, чем в ацетоне, для каждого из номеров  $n$ . Так, в случае ацетона для номеров  $n = 2$  и  $3$  форма пузырька один раз переходит через сферическое состояние,

для  $n = 4-7$  – два раза, для номеров  $n = 8-10$  – три раза. В случае тетрадекана для номеров  $n = 2$  и  $3$  форма пузырька ни разу не переходит через сферическое состояние, а для номеров  $n = 4-10$  только один раз.

На рис. 3 видно, что рост амплитуды возмущения сферичности пузырька в тетрадекане оказывается существенно меньше, чем в ацетоне. Для номеров  $n = 2-4$  разница оказывается более 30 раз. При увеличении номера  $n$  до  $n = 10$  различие уменьшается до 12 раз. Такая разница роста несферичности пузырьков, как уже было сказано, объясняется большим различием в глубине их коллапса (в 6.5 раза). Как следствие, начальное возмущение сферической формы ударной волны в пузырьке в тетрадекане будет более чем на порядок меньше, чем в пузырьке в ацетоне. Однако, как уже отмечалось, изменение радиуса ударной волны, то есть ее путь при схождении в пузырьке в тетрадекане значительно больше (в 6 раз), чем в случае ацетона. Как следствие, и рост несферичности ударной волны в тетрадекане будет сильнее, чем в ацетоне.

Таким образом, более скоростной рост возмущения сферичности пузырька продолжается дольше в случае ацетона, а менее скоростной рост несферичности ударной волны продолжается дольше в тетрадекане. Поэтому можно ожидать, что при одинаковых начальных возмущениях сферической формы пузырьков уровень несферичности возникающей в пузырьке ударной волны в финале ее схождения будет ниже в пузырьке в тетрадекане, чем в пузырьке в ацетоне.

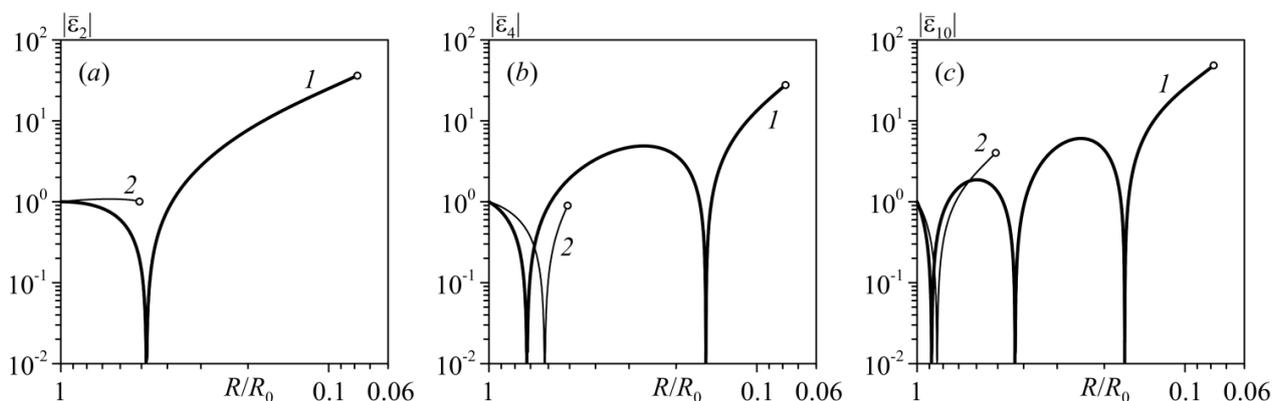


Рис. 3. Эволюция относительной амплитуды возмущения сферичности пузырьков  $|\bar{\varepsilon}_n| = |\varepsilon_n/\varepsilon_{n,0}|$ ,  $n = 2$  (a), 4 (b), 10 (c), при коллапсе в ацетоне (кривые 1) и тетрадекане (кривые 2). Кружками отмечены значения в моменты достижения максимальных значений термодинамических параметров в пузырьке.

## 5. Заключение

Проведено исследование коллапса слабонесферического кавитационного пузырька с начальным радиусом 500 мкм в ацетоне (с температурой и давлением жидкости 293 К и 15 бар) и тетрадекане (с температурой и давлением жидкости 663 К и 50 бар). В начале коллапса давление пара равно давлению насыщения. Использовалась гидродинамическая модель, в которой учитывается сжимаемость жидкости, нестационарная теплопроводность пара и жидкости, неравновесный теплообмен на поверхности пузырька, несовершенство пара, применяются реалистичные широкодиапазонные уравнения состояния.

Установлено, что в обоих случаях коллапса пузырька (в ацетоне и тетрадекане) внутри него возникают сходящиеся ударные волны, при фокусировке которых в случае сохранения их сферической формы максимальные значения термодинамических параметров достигают сравнимых значений. При этом радиус пузырька в тетрадекане в момент наибольшего сжатия пара оказывается в 6.5 раз больше, чем у пузырька в ацетоне. Изменение радиуса возникающей в пузырьке ударной волны, то есть ее путь от момента образования до фокусировки, в случае тетрадекана оказывается существенно больше (в 6 раз).

Установлено, что рост малых возмущений сферичности пузырька при его коллапсе в ацетоне оказывается значительно больше. Для исследуемого интервала номеров сферической гармоники 2-10 разница превышает 12 раз.

Учитывая, что рост возмущения сферичности пузырька при уменьшении его радиуса происходит интенсивнее увеличения несферичности ударной волны при уменьшении ее радиуса, можно ожи-

дать, что кумуляция в центральной области пузырька при его коллапсе в тетрадекане будет ближе к сферической, чем в случае ацетона. Для более детального ответа на вопрос об уровне несферичности ударной волны вблизи момента ее фокусировки необходимо дополнительное исследование эволюции несферической ударной волны.

## Список литературы

- [1] Taleyarkhan R.P., West C.D., Cho J.S., Lahey R.T. (Jr), Nigmatulin R.I., Block R.C. Evidence for nuclear emissions during acoustic cavitation // *Science*. 2002. V. 295. P. 1868–1873. (DOI: 10.1126/science.1067589)
- [2] Нигматулин Р.И., Лэхи Р.Т.(мл.), Талейархан Р.П., Вест К.Д., Блок Р.С. О термоядерных процессах в кавитирующих пузырьках // *УФН*. 2014. Т. 184, № 9. С. 947–960. (DOI: 10.3367/UFNr.0184.201409b.0947)
- [3] Taleyarkhan R.P., West C.D., Cho J.S., Lahey R.T. (Jr), Nigmatulin R.I., Block R.C. Additional evidence of nuclear emissions during acoustic cavitation // *Phys. Rev. E*. 2004. V. 69. 036109. (DOI: 10.1103/PhysRevE.69.036109)
- [4] Taleyarkhan R.P., West C.D., Cho J.S., Lahey R.T. (Jr), Nigmatulin R.I., Block R.C. Nuclear emissions during self-nucleated acoustic cavitation // *Phys. Rev. Lett.* 2006. V. 96. 034301. (DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.034301)
- [5] Xu Y., Butt A. Confirmatory Experiments for Nuclear Emissions During Acoustic Cavitation // *Nucl. Eng. Des.* 2005. V. 235. P. 1317–1324. (DOI: 10.1016/j.nucengdes.2005.02.021)
- [6] Nigmatulin R.I., Akhatov I.Sh., Topolnikov A.S., Bolotnova R.Kh., Vakhitova N.K., Lahey R.T. (Jr), Taleyarkhan R.P. The Theory of Supercompression of Vapor Bubbles and Nano-Scale Thermonuclear Fusion // *Phys. Fluids*. 2005. V. 17. 107106. (DOI: 10.1063/1.2104556)
- [7] Нигматулин Р.И., Аганин А.А., Топорков Д.Ю., Ильгамов М.А. Образование сходящихся ударных волн в пузырьке при его сжатии // *Доклады РАН*. 2014. Т. 458, № 3. С. 282–286. (DOI: 10.7868/S0869565214270115)
- [8] Аганин А.А., Топорков Д.Ю. Оценка возникновения ударных волн в кавитационном пузырьке при его коллапсе // *Учен.*

- зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2017. Т. 159, кн. 3. С. 271–281.  
([https://kpfu.ru/portal/docs/F\\_1783512310/159\\_3\\_phys\\_mat\\_1.pdf](https://kpfu.ru/portal/docs/F_1783512310/159_3_phys_mat_1.pdf))
- [9] Нигматулин Р.И., Аганин А.А., Топорков Д.Ю., Ильгамов М.А. Эволюция возмущений сферичности пузырька при его сильном сжатии // Доклады РАН. 2016. Т. 467, № 2. С. 168–172. (DOI: 10.7868/S0869565216080119)
- [10] Нигматулин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния органических жидкостей на примере ацетона // Доклады РАН. 2007. Т. 415, № 5. С. 617–621. (<https://elibrary.ru/item.asp?id=9533722>)
- [11] Нигматулин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонные уравнения состояния бензола и тетрадекана в упрощенной форме // ТВТ. 2017. Т. 55, № 2. С. 206–215. (DOI: 10.7868/S004036441701015X)
- [12] Lin H., Storey B.D., Szeri A.J. Inertially driven inhomogeneities in violently collapsing bubbles: the validity of the Rayleigh-Plesset equation // J. Fluid Mech. 2002. V. 452. P. 145–162. (DOI: 10.1017/S0022112001006693)
- [13] Plesset M.S., Mitchell T.P. On the stability of the spherical shape of a vapor cavity in a liquid // Quart. Appl. Math. 1956. V. 13, N 4. P. 419–430. (DOI: 10.1090/qam/79931)
- [14] Нигматулин Р.И., Аганин А.А., Ильгамов М.А., Топорков Д.Ю. Эволюция возмущений сферической формы кавитационного пузырька при его взрывном коллапсе // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2014. Т. 1556, кн. 1. С. 79–108. (<http://mi.mathnet.ru/rus/uzku/v156/i1/p79>)
- [15] Somogyi Z., Roberts P.H. Stability of an Imploding Spherical Shock Wave in a van der Waals Gas II // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2007. V. 60. P. 289–309. (DOI: 10.1093/qjmam/hbm006)



## Collapse of weakly-nonspherical cavitation bubble in acetone and tetradecane

Toporkov D.Yu.

Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Scientific Center of the RAS, Kazan

Collapse of a weakly-spherical cavitation bubble in acetone and tetradecane is studied. The bubble radius is 500  $\mu\text{m}$ , the temperature and pressure of the liquid are 293 K and 15 bar in the case of acetone and 663 K and 50 bar in the case of tetradecane. A hydrodynamic model is used in which the compressibility of the liquid, the nonstationary thermal conduction of the vapor and the liquid, and nonequilibrium heat and mass transfer on the bubble surface, as well as imperfection of the vapor, are considered. Realistic wide-range equations of state are used. It has been found that converging shock waves appear in the bubbles during its collapses in acetone and tetradecane. The maximum values of the thermodynamic parameters are comparable. A comparison of the evolution of the bubble sphericity perturbation and motion of the shock wave in the bubble allows suggesting that tetradecane is a more favorable medium for the realization of a near-spherical cumulation in a bubble than acetone.

**Keywords:** bubble collapse, shock waves, nonsphericity, perturbation of spherical shape



## О зависимости производства холодного воздуха от размера площади горячего выхода вихревой трубы

Ронжин Р.П. \*, Михайленко К.И.\*\*

\* Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

\*\* Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Представлена модель противоточной вихревой трубы для исследования зависимости влияния площади горячего выхода на эффект температурного разделения. Проведены вычислительные эксперименты для 37 моделей при разных значениях площади кольца горячего выхода. В ряде экспериментов изменяется давление подаваемого на вход воздуха для учета возможного влияния вычислительной и модельной погрешностей. Получен аномальный результат при значении площади горячего выхода  $\sim 30 \text{ см}^2$ . Сделаны выводы о диапазоне наиболее приемлемых площадей горячего выхода для рассматриваемой конфигурации вихревой трубы.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, газовая динамика, вихревая труба, эффект Ранка–Хилша, OpenFOAM, турбулентность

### 1. Введение

Вихревая труба — устройство, которое позволяет разделять поток сжатого газа, поданный через тангенциальные завихрители, на два вихря. При этом один из вихрей имеет более низкую температуру, чем у подаваемого газа, второй — более высокую.

Данный феномен был назван эффектом Ранка–Хилша в честь французского инженера Жоржа Жозефа Ранка, открывшего его в 1931 году при попытках совершенствования циклонов для очистки газов от пыли [1] и немецкого физика Рудольфа Хилша, который улучшил устройство и опубликовал экспериментальные исследования вихревой трубы [2].

По причинам простоты устройства возникают широкие возможности его применения: от обычных охладительных устройств до разделения смесей. Также большой интерес представляет тот факт, что при определенных условиях эффект температурного разделения наблюдается не только в газе,

но и в жидкостях [3].

В этой связи вихревые трубы вызывают законный интерес исследователей. К настоящему времени опубликовано значительное количество работ по итогам экспериментальных и теоретических исследований эффекта Ранка–Хилша [4–6]. Следует отметить, что в указанных обзорах подчёркивается тот факт, что до настоящего времени нет единой теории, которая бы в полной мере описывала рассматриваемый эффект. Не существует даже какого-либо общего мнения по поводу первопричин температурного разделения, поэтому ведётся множество теоретических и экспериментальных работ в данном направлении. В части работ, в первую очередь экспериментальных, рассматриваются разные конфигурации вихревых труб [7]. Теоретические работы более разнообразны. Большинство исследователей рассматривает воздействие сжимаемости, напряжения сдвига и турбулентной пульсации как причины возникновения эффекта, но в то же время существует альтернативное мнение о том, что причинами являются акустические эффекты, возникающие в трубе [8]. Также в последнее время стали рассматриваться более тонкие эффекты, связанные, например, с анализом произ-

водства локальной энтропии [9].

Отсутствие общепризнанной теории, объясняющей механизм рассматриваемого феномена не позволяет разрабатывать максимально эффективные конфигурации вихревой трубы. Сказанное определяет актуальность теоретических и экспериментальных исследований по этой теме. В представленной работе исследуется зависимость температурного разделения от площади горячего выхода средствами вычислительного моделирования с использованием среды OpenFOAM.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим противоточную вихревую трубу, схема которой приведена на рис. 1.

Происходящие в канале вихревой трубы процессы будем моделировать на основе системы уравнений газовой динамики, включающих:

- уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{U}) = 0;$$

- уравнение импульсов

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{U} \times \mathbf{U}) = -\nabla p + \nabla \tau;$$

- уравнение энергии

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{U} E) = -\nabla p \mathbf{U} + \nabla(\tau \times \mathbf{U});$$

- и уравнение состояния идеального газа для замыкания основной системы уравнений

$$p = (\gamma - 1)\rho e.$$

Здесь использованы стандартные обозначения:  $\mathbf{U}$  — вектор скорости;  $\rho$  — плотность;  $p$  — давление;  $E = \varepsilon + \frac{1}{2}|\mathbf{U}|^2$  — удельная полная энергия;  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия;  $\gamma$  — показатель адиабаты;  $\tau$  — тензор вязких напряжений, элементы которого вычисляются как

$$\tau_{ij} = (\mu + \mu_t) \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right],$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $\mu$  — вязкость среды;  $\mu_t$  — турбулентная вязкость, вычисляемая исходя из  $k$ - $\varepsilon$  модели турбулентности.

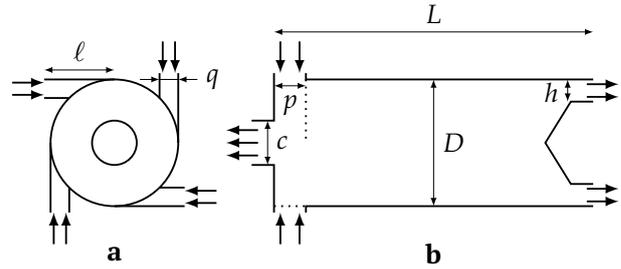


Рис. 1. Схема изучаемой противоточной вихревой трубы: а) вид с торца со стороны холодного выхода и завихрителей; б) разрез вдоль оси трубы. Обозначения:  $L$  — длина трубы;  $D$  — диаметр трубы;  $\ell, p, q$  — высота, длина и ширина канала завихрителя;  $c$  — диаметр сопла холодного выхода;  $h$  — размер горячего выхода (разность внешнего и внутреннего радиусов)

## 3. Вычислительные средства

При вычислительном моделировании турбулентной динамики жидкости и газа возможны несколько подходов. Наиболее простой с точки зрения алгоритма решения подход подразумевает использование прямого численного моделирования [10, 11]. Однако он сопряжен со значительными затратами как вычислительных ресурсов, так и машинного времени. Кроме того, дополнительную сложность может вызвать необходимость подготовки кода для параллельного исполнения на вычислительном кластере.

Более продуктивным следует, по-видимому, считать подход, связанный с использованием какой-либо модели турбулентности. Нами выбрана в достаточной мере зарекомендовавшая себя  $k$ - $\varepsilon$  модель.

Так как процессы в вихревой трубе проходят при значительных скоростях, вплоть до звуковых, в качестве базового решателя выбран sonicFoam — решатель в составе OpenFOAM, обеспечивающий вычисления для моделей потоков сжимаемых сред со звуковыми скоростями при возможном наличии ударных волн.

При обработке полученных результатов возникла необходимость вычисления среднего по времени и сечению значения температуры и давления для значительного числа проведённых вычислительных экспериментов. Для этого используется двухэтапный подход. На первом этапе вызывается утилита surfaceCut из состава OpenFOAM, позволяющая получить сечение моделируемой области по заданной поверхности и сохранить значения заданных физических величин в формате VTK во

всех просчитанных моментах времени. На втором этапе вызывается скрипт на языке Python, обрабатывающий полученные файлы VTK на заданном промежутке времени и вычисляющий средние значения по поверхности, а затем по времени. Таким способом вычисляются средние значения плотности и температуры на холодном и горячем выходах, а также в области перехода из вихревой трубы в канал холодного выхода.

#### 4. Вычислительный эксперимент

Производится моделирование вихревой трубы, имеющей следующие параметры (см. рис. 1):  $L = 52$  см;  $D = 9.4$  см;  $k = 9.4$  см;  $p = 2$  см;  $q = 1$  см;  $c = 18$  см. Параметр  $h$  принят изменяемым. При исследовании влияния площади горячего выхода на эффект Ранка–Хилша параметра  $h$  варьировался таким образом, чтобы указанная площадь изменялась в диапазоне от  $5$  см<sup>2</sup> до  $50$  см<sup>2</sup> с шагом  $5$  см<sup>2</sup>.

Для указанных параметров была построена трёхмерная конечно-разностная сетка, вид которой приведен на рис. 2. При подготовке сетки были учтены особенности цилиндрической конфигурации области и возможного влияния конечно-разностной сетки на результаты вычислений [12], поэтому качеству сетки было уделено особое внимание [13].

При моделировании использовались начальные данные, имитирующие нормальные условия: давление в области равномерно и равно атмосферному ( $10^5$  Па); температура по всей области комнатная (300 К); газ (воздух) — неподвижен ( $U = 0$  м/с).

Во время расчётов задаются граничные условия, характерные для работающей вихревой трубы. На вход подаётся газ комнатной температуры (300 К) при высоком давлении ( $\sim 4 \cdot 10^5$  Па). На выходе задается атмосферное давление ( $10^5$  Па), а для температуры и скорости — условие протекания. На стенках трубы задаётся условие прилипания, стенки термоизолированы.

В ряде вычислений давление на входе задавалось отличным от  $4 \cdot 10^5$  Па. Полные серии вычислений проводились для случаев  $4,01 \cdot 10^5$  Па и  $3,99 \cdot 10^5$  Па. Также для дополнительного анализа особенности распределения параметров при площадях горячего выхода около  $30$  см<sup>2</sup> проводились вычисления при давлении на входе  $4,1 \cdot 10^5$  Па и  $3,9 \cdot 10^5$  Па.

Таким образом? посчитано 37 случаев, каждый из которых просчитывался до момента времени 0,07 с, когда течение в вихревой трубе становится полностью развитым.

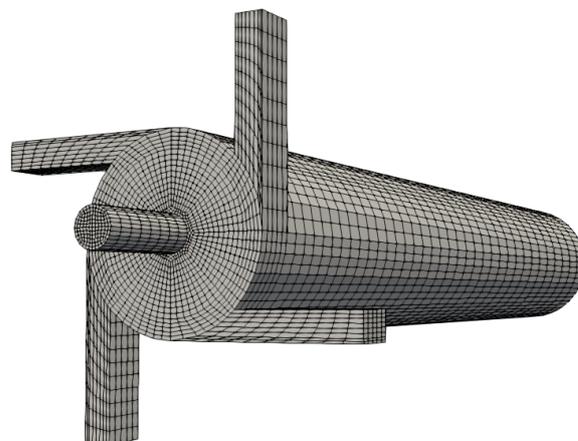


Рис. 2. Общий вид используемой конечно-разностной сетки

#### 5. Обсуждение результатов

Для каждого расчёта были получены три средних по сечению и времени значения температуры и давления. Указанные значения были осреднены по следующим сечениям: площадь холодного выхода; площадь горячего выхода; сечение примыкания сопла холодного выхода к основному каналу вихревой трубы. Для того чтобы сгладить вносимые турбулентностью пульсации, указанные значения осреднялись также по последним вычисленным шагам по времени  $t = 0,6 \dots 0,7$ .

На рис. 3–5 представлены графики зависимости средней температуры воздуха, проходящего через соответствующие сечения, от размера площади горячего выхода.

На рис. 3 показана вышеописанная зависимость для холодного выхода. Здесь мы наблюдаем,

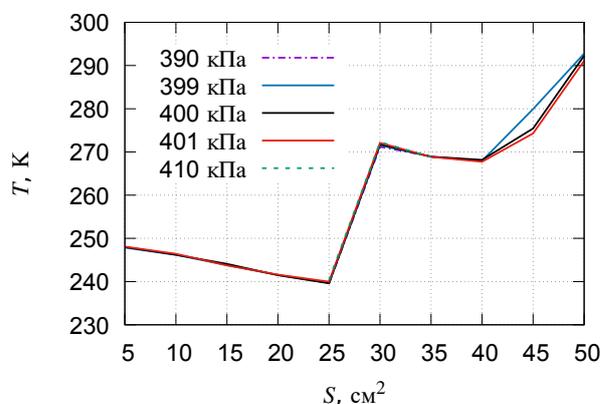


Рис. 3. Зависимость температуры в сечении холодного выхода от площади горячего выхода

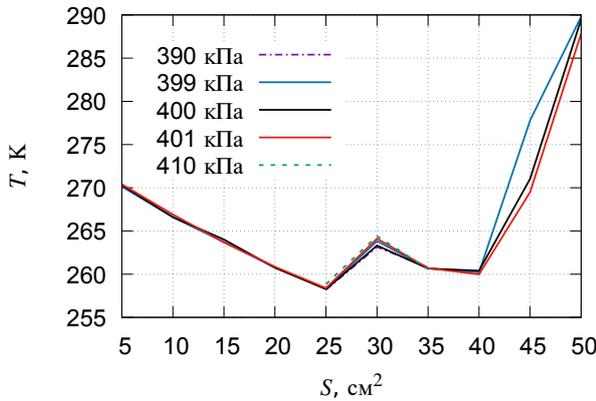


Рис. 4. Зависимость температуры в зоне перехода в холодное сопло от площади горячего выхода

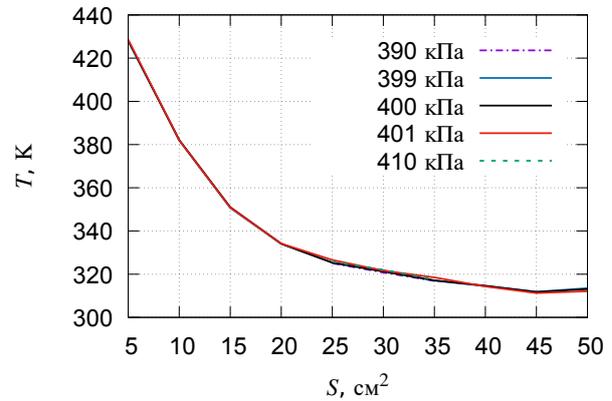


Рис. 5. Зависимость температуры в сечении горячего выхода от площади горячего выхода

что поведение представленных параметров достаточно слабо зависит от малых изменений давления подаваемого на вход воздуха. Большой интерес вызывает наличие повышенной относительно соседних точек средней температуры выходящего воздуха при площади горячего выхода  $S = 30 \div 35 \text{ см}^2$ . Следует отметить, что одинаковая картина наблюдается для всех проведённых расчётов.

Аналогичная по сути картина наблюдается и на рис. 4. Здесь показаны средние значения температуры воздуха в сечении перехода из основной трубы в сопло холодного выхода. Также, как и в предыдущем случае, можно видеть повышение температуры при площади горячего выхода  $S = 30 \div 35 \text{ см}^2$  (то есть в том же интервале).

В дополнение к расчётам при давлении подаваемого воздуха  $(4 \pm 0,01) \cdot 10^5 \text{ Па}$  для исследования ситуации с повышением температуры выходящего газа при площади сечения горячего выхода  $S \sim 30 \text{ см}^2$  были проведены вычисления для давления на входе  $3,9 \cdot 10^5 \text{ Па}$  и  $4,1 \cdot 10^5 \text{ Па}$  для значения площади сечения горячего выхода  $S = \{25, 30, 35\} \text{ см}^2$ . Однако и в этом случае наблюдаемая картина не претерпела качественных изменений. Таким образом, можно сделать вывод, что наблюдаемое распределение не является случайным выбросом. Однако дать объяснение указанному эффекту в настоящий момент не представляется возможным.

На обоих приведённых графиках, если отвлечься от описанных выше выбросов, можно наблюдать постепенное снижение средней температуры при увеличении площади горячего выхода приблизительно до  $S = 20 \div 25 \text{ см}^2$  и резкое увеличение после  $S = 40 \text{ см}^2$ . Отметим эти значения для обсуждения ниже.

В отличие от холодного выхода на горячем

конце вихревой трубы наблюдается плавная и естественным образом объясняемая картина (см. рис. 7). Рост площади горячего выхода с учетом того, что площадь холодного выхода фиксирована, приводит к снижению среднего давления в канале вихревой трубы и, как следствие, к падению температуры исходящего газа при, неизбежном росте его расхода через данный выход.

Аналогичная ситуация наблюдается и для давления на холодном и горячем выходах (рис. 6–7). Так, на холодном выходе наблюдается значительный рост давления истекающего газа в тех экспериментах, в которых площадь горячего выхода принимает значения  $S = 30$  и  $S = 35 \text{ см}^2$ . При этом на противоположном конце вихревой трубы можно видеть плавное монотонное падение давления истекающего газа.

Также определенный интерес представляет во-

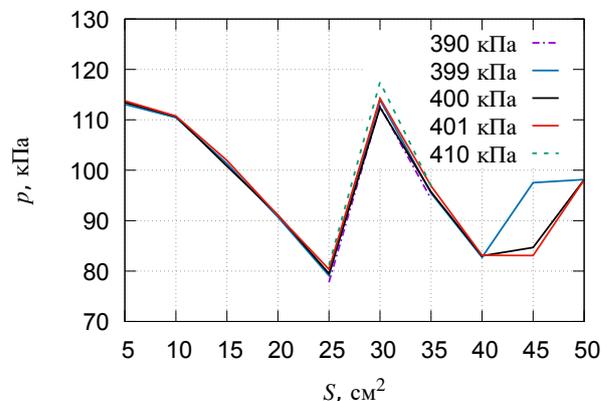


Рис. 6. Зависимость давления в сечении холодного выхода от площади горячего выхода

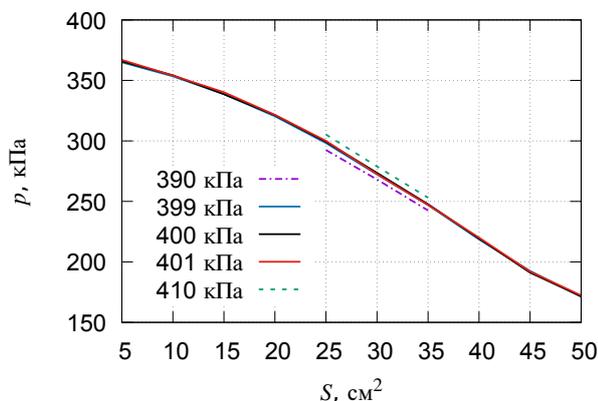


Рис. 7. Зависимость давления в сечении горячего выхода от его площади

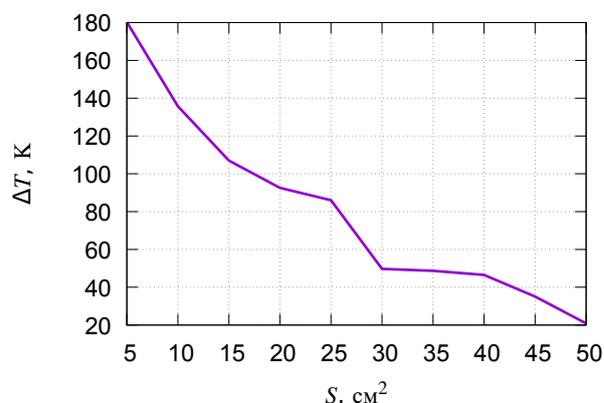


Рис. 8. Зависимость разности средних температур между горячим и холодным выходами от площади горячего выхода

прос разделения подаваемого газа на две температурные фракции. На рис. 8 приведена зависимость разности температуры между горячим и холодным выходами от площади последнего. Здесь можно видеть, что при малых площадях горячего выхода мы имеем достаточно высокую температуру исходящего из него воздуха, что обеспечивает высокую температурную разность между выходами. Но это объясняется тем, что, при малой площади горячего выхода через него осуществляется небольшой расход наиболее горячего газа, а основной поток направлен в холодный выход, на котором происходит повышение температуры.

Обратная картина будет при значительной площади горячего выхода. В этом случае основной поток слабо разогретого газа выходит через горячий выход, а с противоположной стороны получим малый поток успевающего прогреться газа.

Из сказанного следует, что при поиске наиболее эффективного варианта геометрии вихревой трубы именно с точки зрения температурного разделения, лучшей для вихревой трубы с рассматриваемыми параметрами представляется такая геометрия, в которой площадь кольца горячего выхода попадает в промежуток значений  $S = 20 \div 40 \text{ см}^2$ .

Таким образом, для малых площадей горячего выхода ( $S < 20 \text{ см}^2$ ) мы получаем слабый поток очень горячего газа через кольцо горячего выхода и значительный поток слабо охлажденного газа через сопло холодного выхода. С другой стороны, для большой площади ( $S > 40 \text{ см}^2$ ) на горячем выходе имеем большой поток слабо нагретого газа, а на холодном — малый поток слабо охлажденного газа.

## 6. Заключение

Представленная работа показывает, что среда вычислительного моделирования OpenFOAM обладает возможностями, подходящими для проведения массовых вычислительных экспериментов при теоретическом исследовании эффекта Ранка–Хилша.

Проведённые исследования показывают, что размер кольца горячего выхода вихревой трубы при неизменных остальных геометрических параметрах оказывает значительное влияние на исследуемый эффект.

В работе сделаны выводы о диапазоне значений площади горячего выхода, при которых температурное разделение наиболее эффективно.

В ходе работы выявлена особая область значений площади горячего выхода  $S \sim 30 \text{ см}^2$ . При указанной геометрии наблюдается резкое увеличение значений исследуемых физических величин (температура и давление). Эта особенность требует дополнительного изучения, так как на данный момент нет возможности объяснить данную аномалию.

Полученные результаты могут быть полезны и при изучении других применений вихревых труб. Так, осаждение дисперсной среды ударными волнами [14] может осуществляться в трубе Ранка–Хилша для очистки отходящего газа. При этом размер горячего выхода может оказывать существенное влияние на окончательный результат.

## Список литературы

- [1] Ranque G.J. Experiments on expansion a vortex with Simultaneous Exhaust of hot air and cold air (in French) // J. Phys. Radium. 1933. V. 4. Pp. 112–114.

- [2] Hilsch R. The use of the expansion of gases in a centrifugal field as cooling process // *Review of Scientific Instruments*. 1947. V. 18. Pp. 108–113.  
(DOI: [10.1063/1.1740893](https://doi.org/10.1063/1.1740893))
- [3] Balmer, R. T., Pressure-Driven Ranque-Hilsch Temperature Separation in Liquids // *J. Fluids Eng.* 1988. V. 110(2). Pp. 161–164.  
(DOI: [10.1115/1.3243529](https://doi.org/10.1115/1.3243529))
- [4] Гуцол А.Ф. Эффект Ранка // *Успехи физических наук*. 1997. Т. 167, № 6. С. 665–687.  
(DOI: [10.3367/UFNr.0167.199706e.0665](https://doi.org/10.3367/UFNr.0167.199706e.0665))
- [5] Eiamsa-Ard S., Promvong P. Review of Ranque-Hilsch effects on vortex tubes // *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 2008. V. 1. Pp. 1822–1842.  
(DOI: [10.1016/j.rser.2007.03.006](https://doi.org/10.1016/j.rser.2007.03.006))
- [6] Subudhi S., Sen M. Review of Ranque–Hilsch vortex tube experiments using air // *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 2015. V. 52. Pp. 172–178.  
(DOI: [10.1016/j.rser.2015.07.103](https://doi.org/10.1016/j.rser.2015.07.103))
- [7] Valipour M.S., Niazi N. Experimental modeling of a curved Ranque–Hilsch vortex tube refrigerator // *International Journal of Refrigeration*. 2011. V. 34(4). Pp. 1109–1116.  
(DOI: [10.1016/j.ijrefrig.2011.02.013](https://doi.org/10.1016/j.ijrefrig.2011.02.013))
- [8] Xue Y., Arjomandi M., Kelso R. A critical review of temperature separation in a vortex tube // *Experimental Thermal and Fluid Science*. 2010. V. 34(8). Pp. 1367–1374.  
(DOI: [10.1016/j.expthermflusci.2010.06.010](https://doi.org/10.1016/j.expthermflusci.2010.06.010))
- [9] Khait A., Noskov A., Alekhin V., Bianco V. Analysis of the local entropy generation in a double-circuit vortex tube // *Applied Thermal Engineering*. 2018. V. 130. Pp. 1391–1403.  
(DOI: [10.1016/j.applthermaleng.2017.11.136](https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2017.11.136))
- [10] Марьин Д.Ф., Михайленко К.И. Численное исследование механизма возникновения эффекта Ранка–Хилша в канале вихревой трубы // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2011. № 4-3. С. 977–978.
- [11] Марьин Д.Ф., Михайленко К.И., Хазиев Л.Х. Прямое численное моделирование эффекта ранка // В сборнике: *Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2011) Труды международной научной конференции*. 2011. С. 539–547.  
(<http://omega.sp.susu.ru/books/conference/PaVT2011/short/197.pdf>)
- [12] Михайленко К.И. Зависимость перераспределения температуры в вихревой трубе от геометрии завихрителя // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН*. 2017. Т. 12, № 2. С. 174–179.  
(DOI: [10.21662/uim2017.2.026](https://doi.org/10.21662/uim2017.2.026))
- [13] Михайленко К.И. К моделированию вихревой трубы: подготовка гексагональной сетки для вычислительных экспериментов в среде OpenFOAM // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН*. 2016. Т. 11, № 1. С. 112–118.  
(DOI: [10.21662/uim2016.1.017](https://doi.org/10.21662/uim2016.1.017))
- [14] Михайленко К.И., Валеева Ю.Р. Моделирование осаждения мелкодисперсной взвеси из воздуха при прохождении волн давления // *Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии*. 2013. Т. 14, № 1. С. 328–333.  
([http://num-meth.srcc.msu.ru/zhurnal/tom\\_2013/v14r136.html](http://num-meth.srcc.msu.ru/zhurnal/tom_2013/v14r136.html))



## On the dependence of a cold air production on the size of a hot air output area of the vortex tube

Ronzhin R.P.\*, Mikhaylenko C.I.\*\*

\* Ufa State Aviation Technical University, Ufa

\*\* Mavlutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa

A model of a counterflow vortex tube is presented to investigate the dependence of the influence of hot exit area on the temperature separation. Computational experiments were done for 37 models for different values of the area of the hot exit ring. In a number of experiments, the pressure of the air supplied to the inlet varies in order to take into account the possible effects of computational and model errors. An anomalous result is obtained for the value of the hot exit area  $\sim 30 \text{ cm}^2$ . Conclusions are drawn about the range of the most suitable hot exit sizes for the considered configuration of the vortex tube.

**Keywords:** mathematical modeling, gas dynamics, vortex tube, Ranque–Hilsch effect, OpenFOAM, turbulence



## Алгоритм определения минимального тягового усилия при протаскивании трубопровода

Криони И.Н. \*, Семёнова А.В. \*, Киреев В.Н.\*\*

\* Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

\*\* Башкирский государственный университет, Уфа

В статье рассматривается процесс протаскивания трубопровода через канал. При моделировании данного процесса учитываются взаимодействия между трубопроводом, буровой штангой, почвой и бентонитовым буровым раствором. Протаскиванию трубопровода через скважину препятствуют силы трения трубопровода и буровой штанги о почву, а также сила сопротивления трубопровода при его движении в буровой жидкости. При построении математической модели учтено влияние этих сил. Для определения сил трения трубопровод и буровая штанга рассматривались как гибкая нерастяжимая нить. Создан и реализован алгоритм определения тягового усилия. Отдельный этап работы посвящен учету баллаستировки трубопровода.

**Ключевые слова:** протаскивание, трубопровод, тяговое усилие, горизонтально-направленное бурение, буровой раствор, математическое моделирование

### 1. Введение

При прокладывании подземных коммуникаций методом горизонтально-направленного бурения возникает вопрос о тяговом усилии, необходимом для протаскивания трубопроводов, канализаций, водопроводов, газопроводов или футляров для кабелей связи через канал. Знание величины этого усилия позволяет принять решение о мощности буровой установки, направляемой на объект.

В процессе протаскивания трубопровода через канал определяющим фактором является взаимодействие между трубопроводом, буровой штангой, расширителем, почвой и буровой жидкостью. Сведения о форме канала получены из данных инклинометрии.

Для решения задачи о протаскивании трубопровода необходимо рассмотреть следующие силы: силу сопротивления, оказываемую на трубопровод бентонитовым буровым раствором, силу трения

бурильной штанги о свод канала, силу трения трубопровода о свод канала [1].

### 2. Совокупность сил, действующих на трубопровод

Для того чтобы оценить влияние сил трения на бурильную штангу в канале, рассмотрим штангу и трубопровод как нерастяжимую нить. Верхний свод канала представим как ось канала, которая поднята вверх на высоту радиуса. Саму ось канала аппроксимируем полиномом шестой степени, исходя из данных инклинометрии, предварительно проведя нормировку по величине высоты входного отверстия канала над уровнем моря.

Для решения задачи о тяговом усилии при протаскивании трубопровода через канал необходимо, в первую очередь, определить площади касания бурильной штанги и трубопровода со стенкой канала.

При протаскивании трубопровод и бурильная штанга будут вдавливаться в стенку канала на некоторую глубину  $\delta_w$ , которая будет зависеть от действующих силовых факторов и, в частности, от приложенного тягового усилия. На рис. 1 схематически изображен трубопровод, частично вдавленный в

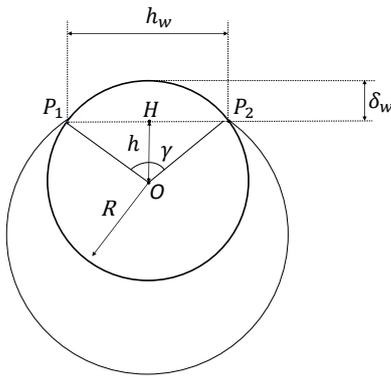


Рис. 1. Схема контакта трубопровода и стенки канала

стенку канала.

Для нахождения  $\delta_w$  рассмотрим задачу Герца о давлении двух соприкасающихся тел [2]: два твердых тела соприкасаются в точке и в этой точке они имеют общую касательную плоскость. Предполагается, что оба тела сдавливаются приложенными к ним силами, в результате чего они сближаются на некоторое малое расстояние.

Тогда  $\delta_w$  определяется из формулы, полученной в результате решения задачи Герца для контакта двух цилиндров с параллельными осями [3]:

$$\delta_w = \frac{2\sigma_n}{\pi} \left[ \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} \left( \ln \left( \frac{2R_1}{b} \right) + 0.407 \right) + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \left( \ln \left( \frac{2R_2}{b} \right) + 0.407 \right) \right],$$

где  $E_1$  — модуль упругости грунта;  $E_2$  — модуль упругости материала трубопровода;  $R_1$  — радиус канала;  $R_2$  — наружный радиус трубопровода;  $\nu_1$  — коэффициент Пуассона для грунта;  $\nu_2$  — коэффициент Пуассона для трубопровода;  $\sigma_n$  — нагрузка на единицу длины грунта.

Величина  $b$  вычисляется по формуле:

$$b = 1.128 \sqrt{\eta \sigma_n \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}},$$

где  $\eta$  — упругая постоянная соприкасающихся грунта и трубопровода, рассчитываемая следующим образом:

$$\eta = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}.$$

Точки  $P_1$  и  $P_2$ , изображенные на рис. 1 — это крайние точки касания трубопровода с грунтом. Возникающая при протаскивании сила трения будет пропорциональна площади контакта, поэтому необходимо определить дуги контакта  $\delta_D = P_1 P_2$ .

Искомую длину дуги можно вычислить по формуле:

$$\overset{\frown}{P_1 P_2} = R\gamma,$$

где  $\gamma$  — центральный угол, соответствующий дуге  $\overset{\frown}{P_1 P_2}$ , выраженный в радианах;  $R$  — внешний радиус трубопровода.

Величину угла  $\gamma$  можно найти следующим образом:

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{h_w}{2h},$$

где  $h = R - \delta_w$ . Тогда

$$\gamma = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{h_w}{2(R - \delta_w)} \right).$$

Из простых геометрических соображений можно получить выражение для  $h_w$ :

$$h_w = 2\sqrt{R^2 - (R - \delta_w)^2}.$$

Тогда получаем, что длина дуги касания трубопровода и стенки канала будет рассчитываться по следующей формуле:

$$\delta_D = 2R \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{R^2 - (R - \delta_w)^2}}{R - \delta_w} \right), \quad (1)$$

где  $\delta_w$  — глубина вдавливания трубопровода в грунт.

Длина дуги касания буровой штанги и стенки канала  $\delta_d$  находится аналогично формуле (1).

Площадь контакта трубопровода с грунтом находится по формуле:

$$S_{CD} = \begin{cases} \delta_D(s - s_{st}^D), & s_{st}^D < s < s_{end}^D, \\ 0, & s \leq s_{st}^D, \\ \delta_D(s_{end}^D - s_{st}^D), & s \geq s_{end}^D, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\delta_D$  — длина дуги касания;  $s$  — длина части трубопровода, находящейся в канале;  $s_{st}^D, s_{end}^D$  — положения точек начала и конца касания трубопровода и грунта.

Длина дуги касания  $\delta_d$  для буровой штанги вычисляется аналогично формуле (1), а площадь касания буровой штанги с грунтом — по следующей формуле:

$$S_{cd} = \begin{cases} \delta_d(s_{end}^d - s), & s_{st}^d < s < s_{end}^d, \\ \delta_d(s_{end}^d - s_{st}^d), & s \leq s_{st}^d, \\ 0, & s \geq s_{end}^d, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\delta_d$  — длина дуги касания;  $s_{st}^d, s_{end}^d$  — положения точек начала и конца касания буровой штанги и грунта.

Точки  $s_{st}^d, s_{end}^d$  находятся по алгоритму, аналогичному для точек  $s_{st}^D, s_{end}^D$ .

Для решения задачи о протаскивании трубопровода необходимо рассмотреть следующие силы: силу сопротивления, оказываемую на трубопровод бентонитовым буровым раствором, силу буровой штанги о свод канала, силу трения трубопровода о свод канала.

Прикладываемое тяговое усилие для протаскивания должно превосходить все вышеперечисленные силы, которые препятствуют протаскиванию трубопровода.

Сила сопротивления, оказываемая на трубопровод бентонитовым буровым раствором, вычисляется по следующей формуле [1]:

$$f_{res} = \pi D_n s \tau_{res}, \quad (4)$$

где  $\tau_{res}$  — предельное динамическое напряжение сдвига бурового раствора;  $D_n$  — наружный диаметр трубопровода.

Сила трения для трубопровода при контакте с грунтом будет определяться следующим образом:

$$f_{fr}^D = S_{CD} \tau_D, \quad (5)$$

где  $S_{CD}$  — вычисленная площадь контакта, а  $\tau_D$  вычисляется по формуле:

$$\tau_D = \sigma_n^D \operatorname{tg}(\varphi) + c, \quad (6)$$

где  $\sigma_n^D$  — нагрузка на единицу длины грунта при контакте с трубопроводом;  $\varphi$  — угол внутреннего трения;  $c$  — удельное сцепление.

Для буровой штанги сила трения  $f_{fr}^d$  вычисляется аналогично.

### 3. Алгоритмы расчета

#### 3.1. Вспомогательный алгоритм определения области касания

Для нахождения точек касания  $s_{st}^D, s_{end}^D$  для трубопровода и точек  $s_{st}^d, s_{end}^d$  для буровой штанги используется следующий алгоритм:

- 1) *Задание начала и конца канала на оси.*  
Задаются две точки  $Start$  и  $End$  — точки, лежащие на оси канала в начале и в конце канала соответственно.
- 2) *Поиск касательных.*  
Методом касательных (Ньютона) из данных точек  $Start, End$  проводятся касательные к верхней стенке канала.
- 3) *Нахождение точек  $s_{st}^D, s_{end}^D$ .*  
Найденные точки касания — искомые точки начала и конца касания трубопровода и грунта.

Описанный выше алгоритм был реализован авторами на языке C#.

#### 3.2. Алгоритм расчета тягового усилия

Опишем алгоритм определения минимального тягового усилия  $F_{pull}^{\min}$ :

- 1) *Задание исходных данных.*  
Задается длина части трубопровода  $s$  (в метрах), находящейся в канале на данный момент.
- 2) *Вычисление силы сопротивления.*  
Вычисляется сила сопротивления по формуле (4).
- 3) *Вычисление площади контакта.*  
Для вычисления сил трения необходимо определить геометрические характеристики контакта буровой штанги и трубопровода с грунтом. Площади контакта с грунтом трубопровода и буровой штанги находятся согласно формулам (2) и (3).
- 4) *Вычисление сил трения.*  
С использованием полученных на предыдущем шаге геометрических характеристик соответствующих контактов, вычисляются силы трения трубопровода и штанги по формулам (5) и (6).
- 5) *Вычисление тягового усилия.*  
В итоге, можно вычислить искомое минимальное тяговое усилие  $F_{pull}^{\min}$  следующим образом:

$$F_{pull}^{\min} = f_{res} + f_{fr}^D + f_{fr}^d.$$

Для решения задачи поиска необходимого минимального усилия, требуемого для протаскивания трубопровода через канал, в соответствии с описанным алгоритмом авторами была написана программа на языке C#.

### 4. Результаты расчетов

Численные расчеты проводились при следующих параметрах: наружный диаметр трубопровода  $D = 325$  мм; материал — сталь;  $\tau_{res} = 30$  Па;  $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$  Па;  $E_2 = 7 \cdot 10^6$  Па;  $\nu_1 = 0.26, \nu_2 = 0.3$ ;  $\varphi = 19.29$  градусов;  $c = 0.024 \cdot 10^6$  Па.

На рис. 2 показаны графики тягового усилия и составляющих его сил (сил трения и силы сопротивления бурового раствора) в зависимости от длины находящейся в канале плети трубопровода при протаскивании по прямолинейному каналу.

Теперь рассмотрим реальный канал, траектория которого была аппроксимирована полиномом

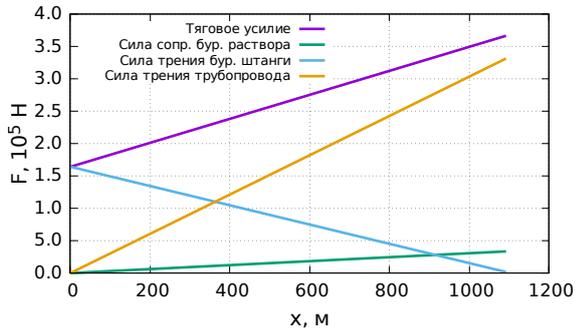


Рис. 2. Тяговое усилие и составляющие его силы в случае прямолинейного канала

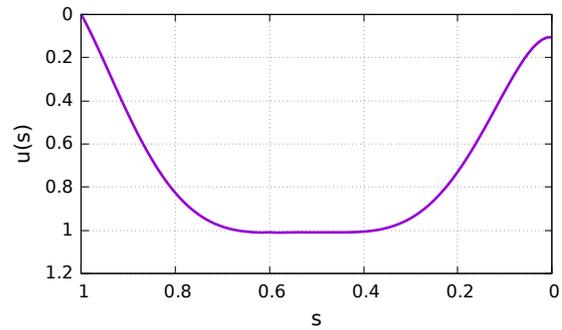


Рис. 3. Аппроксимация оси канала полиномом шестой степени

шестой степени. Результат аппроксимации представлен на рис. 3.

Результаты численного моделирования протаскивания трубопровода по реальному каналу показаны на рис. 4.

Были выполнены расчеты для трубопроводов различных диаметров, используемых при прокладывании подземных коммуникаций. Результаты расчетов показаны на рис. 5.

В табл. 1 приведены количественные оценки максимальных тяговых усилий для трубопроводов различных диаметров.

Часто при прокладывании подземных коммуникаций методом горизонтально-наклонного бурения предусматривают балластировку трубопровода для уменьшения величины плавучести трубопровода и снижения тяговых усилий [1].

На рис. 6 приведены результаты расчетов зависимости максимального тягового усилия от балластировки для трубопроводов различных диаметров. Значению балластировки 0 соответствует пустой трубопровод, значению 1 – трубопровод, полностью заполненный балластировочной жидкостью.

### 5. Заключение

Анализируя результаты, можно сделать вывод, что в случае прямолинейного канала необходимое тяговое усилие оказывается большим, чем для поставленной задачи. Это вызвано тем, что при протаскивании трубопровода по прямолинейному каналу силы трения действуют на протяжении всей

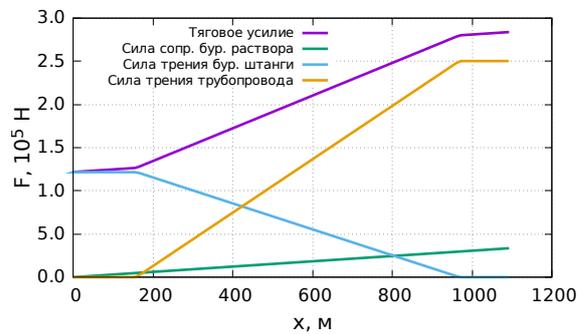


Рис. 4. Тяговое усилие и его составляющие для трубопровода диаметром 325 мм

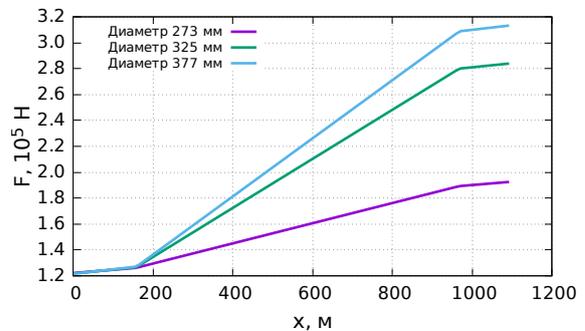


Рис. 5. Тяговое усилие для трубопроводов различных диаметров

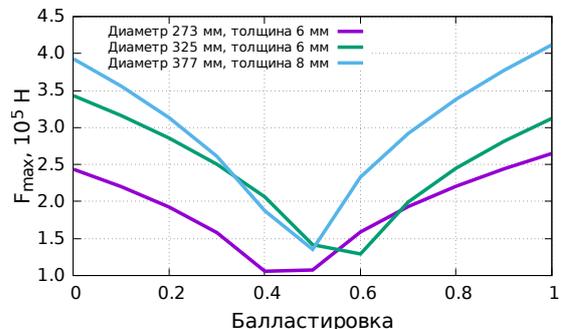


Рис. 6. Тяговое усилие для трубопроводов различных диаметров в зависимости от степени балластировки

Таблица 1. Максимальные тяговые усилия для трубопроводов разных диаметров

Диаметр трубопровода, мм	273	325	377
Макс. тяговое усилие, кН	193	284	313

Таблица 2. Оптимальная балластировка для трубопроводов различных диаметров

Диаметр трубопровода, мм	273	325	377
Степень балластировки	0.4	0.6	0.5
Макс. тяговое усилие, кН	106	129	135

длины канала. Кроме того, полученные результаты дают возможность оценить вклад следующих сил: силы сопротивления, оказываемой на трубопровод бентонитовым буровым раствором, силы трения буровой штанги и трубопровода о свод канала.

До точки начала касания трубопровода и верхней стенки канала наибольший вклад вносит сила трения буровой штанги о верхнюю стенку канала.

Далее, с момента начала касания плети трубопровода и верхней стенки канала и до окончания протаскивания трубопровода наибольший вклад

вносит сила трения трубопровода о верхнюю стенку канала.

Результаты вычислений демонстрируют, что для трубопроводов большего диаметра требуется и большее тяговое усилие.

Для каждого диаметра существует оптимальная степень балластировки, при которой тяговое усилие минимально. В табл. 2 приведены количественные оценки этих значений.

### Список литературы

- [1] Сальников А.В., Зорин В.П., Агиней Р.В. Методы строительства подводных переходов газопроводов на реках Печорского бассейна: Учебное пособие. Ухта: УГТУ, 2008. 108 с.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика в 10 томах. Том 7. Теория упругости. М.: Физматлит, 2003. 260 с.
- [3] Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3-х томах. Том 2. М.: Машиностроение, 1968. 463 с.



## The algorithm for determining the pulling force while dragging a pipeline

Krioni I.N.\* , Semenova A.V.\* , Kireev V.N.\*\*

\* Ufa State Aviation Technical University, Ufa

\*\* Bashkir State University, Ufa

This article describes the process of dragging a pipeline through a channel. In the simulation of this process, the interactions between the pipeline, the drill rod, the soil and the bentonite mud are taken into account. Dragging of the pipeline through the well is hampered by frictional forces of the pipeline and the drill rod against the soil, as well as the drag force of the pipeline when it moves in the drilling fluid. In the construction of a mathematical model, the influence of these forces is taken into account. To determine the frictional forces, the pipeline and the drill rod were considered as a flexible non-stretch filament. An algorithm for determining the tractive effort is created and implemented. A separate stage of the work is devoted to the accounting of ballasting of the pipeline.

**Keywords:** pulling, pipeline, pulling force, horizontal directional drilling, drilling mud, mathematical modeling



## Определение допустимого максимального размера препятствия при протаскивании трубопровода

Семёнова А.В., Криони И.Н.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

В статье рассматривается процесс преодоления трубопроводом каменистого препятствия при протаскивании через канал. В зависимости от размеров канала и самого трубопровода определяется максимально допустимый размер препятствия, которое трубопровод может преодолеть, не упираясь в верхнюю часть канала. Для решения этой задачи трубопровод условно разделяется на два участка: участок, находящийся до препятствия и опирающийся на него, и свободный участок, находящийся после препятствия. Непосредственно на процесс протаскивания через препятствие влияют силы и моменты, действующие на трубопровод. Исходя из уравнений равновесия моментов для различных точек трубопровода, а также из уравнения изгиба балки проводится оценка величины препятствия.

**Ключевые слова:** трубопровод, протаскивание трубопровода, подземные коммуникации, математическое моделирование

### 1. Введение

В процессе строительства подземных инженерных коммуникаций трубопровод часто прокладывают методом протаскивания [1]. При протаскивании трубопровода по каналу возникает проблема накопления в канале грунта, оставшегося после бурения, образуется каменистое препятствие, при преодолении которого под небольшим уклоном трубопровод упирается в верхнюю часть канала. Но так как трубопровод обладает собственным весом, его часть, прошедшая препятствие, может прогибаться до момента непосредственного контакта с верхней частью канала, вследствие чего трубопровод может свободно преодолеть препятствие.

### 2. Силы и моменты

Для исследования процесса протаскивания трубопровода через препятствие условно разделим трубопровод на два участка: один находится до препятствия и опирается на него, второй — свобод-

ный участок, находится после препятствия. Сначала рассмотрим участок, опирающийся на препятствие (рис. 1). Препятствие представим как вершину высотой  $h$ . Считаем, что трубопровод тянут с силой  $F$ , а плотность материала  $\rho$  и площадь поперечного сечения  $S$  известны.

Точка  $A$  на рис. 1 находится на месте контакта трубопровода с вершиной препятствия, а точка  $C$  — на месте контакта трубопровода и нижней стенки канала.

При протаскивании трубопровода возникают силы реакции  $Q_A$ ,  $N_A$ ,  $Q_C$  и момент  $M_0$ .

Величины  $N_C = \pm F$ ,  $q = \rho g S$ ,  $h$ ,  $M_0$  также считаем заданными. Кроме того, известны диаметр канала  $D_C$  и наружный диаметр трубопровода  $D_T^H$ . Уравнение прогиба участка трубопровода, опирающегося на возвышение высотой  $h$ , имеет вид [2]:

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} = q,$$

где  $w$  — величина прогиба трубопровода;  $E$  — модуль упругости материала трубопровода;  $J$  — момент инерции,

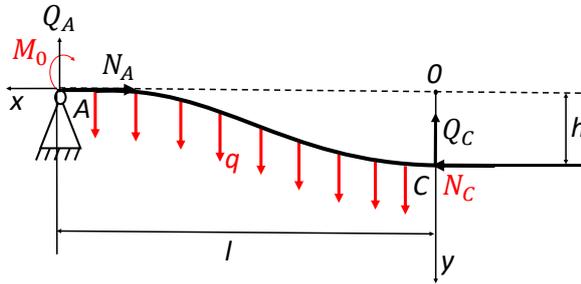


Рис. 1. Участок трубопровода, находящийся до препятствия

Граничные условия:

$$x = 0 : w = h, \frac{dw}{dx} = 0,$$

$$x = l : w = 0, \frac{d^2w}{dx^2} = -M_0, \frac{dw}{dx} = \varphi_A,$$

где  $\varphi_A$  — угол между осью трубопровода и осью абсцисс в точке A.

На рис. 1 ось  $x$  проходит через вершину возвышения, при этом основным предположением является соотношение:  $\frac{h}{l} \ll 1$ , где  $l$  — длина участка до препятствия.

Для произвольной точки на оси трубопровода запишем уравнение момента сил [2]:

$$EJ \frac{d^2w}{dx^2} = m(x).$$

Определим силы реакции на опорах в точках A и C, для чего составим уравнения равновесия по осям координат:

$$\sum Q_y = 0 : -Q_A - Q_C + ql = 0;$$

$$\sum N_x = 0 : N_C - N_A = 0;$$

$$\sum \text{мом}_A = 0 : Q_C l - \frac{ql^2}{2} - N_C h - M_0 = 0.$$

Из данных выражений получим следующие соотношения:

$$N_C = N_A;$$

$$Q_A = \frac{ql}{2} - \frac{h}{l} N_C - \frac{M_0}{l};$$

$$Q_C = \frac{ql}{2} + \frac{h}{l} N_C + \frac{M_0}{l}.$$

Построим выражение для моментов:

$$m(x) = Q_C x - \frac{1}{2} q x^2 - N_C (h - w).$$

С учетом выражения для силы  $Q_C$ , имеем:

$$m(x) = \frac{ql}{2} x + \frac{h N_C}{l} x + \frac{M_0}{l} x - \frac{1}{2} q x^2 - N_C (h - w).$$

Отсюда получим выражение и для перерезывающей силы в каждой точке:

$$Q(x) = \frac{ql}{2} + \frac{h N_C}{l} + \frac{M_0}{l} - qx + w' N_C.$$

Приведем приблизительную оценку расстояния  $l$  от опоры A до точки C касания грунта рассматриваемым участком трубы. В соответствии с методикой, изложенной в [3], пренебрежем силовыми факторами  $Q_C$  и  $N_C$ , кроме того будем считать  $M_0 = 0$ . Тогда

$$m(x) = -\frac{1}{2} q x^2.$$

Отсюда

$$EJ \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{qx^2}{2}.$$

Дважды интегрируя это уравнение, с учетом граничных условий, получаем итоговую формулу для прогиба:

$$w = -\frac{qx^4}{24EJ} + h.$$

Учитывая, что при  $x = l : w = 0$ , получаем необходимую оценку для  $l$ :

$$l = \sqrt[4]{\frac{24EJh}{q}}.$$

При этом угол между осью трубопровода и осью абсцисс в точке A будет равен:

$$\varphi_A = -\frac{1}{6EJ} q l^3.$$

Рассмотрим теперь участок, находящийся после препятствия (рис. 2).

Запишем выражения, соответствующие уравнениям равновесия в системе координат, сопоставленной с консольной частью трубы. Три уравнения соответствуют трем неизвестным силам реакции опоры  $V_A, H_A, M_A$ :

$$\sum V_y = 0 : V_A - f_v \cos \alpha - ql \cos \alpha = 0;$$

$$V_A = (f_v + ql) \cos \alpha;$$

$$\sum H_x = 0 : -H_A - ql \sin \alpha - f_v \sin \alpha = 0;$$

$$H_A = -(f_v + ql) \sin \alpha;$$

$$\sum M_A = 0 : -M_A + f_v \cos \alpha l + ql \cos \alpha \frac{l}{2} = 0;$$

$$M_A = \left( f_v + \frac{ql}{2} \right) l \cos \alpha;$$

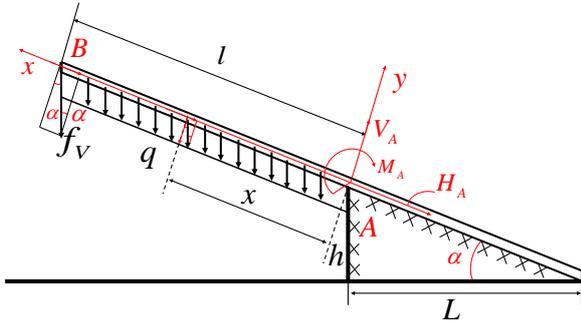


Рис. 2. Участок трубопровода, находящийся после препятствия

$$\begin{aligned} M_x &= -M_A - qx \cos \alpha \frac{x}{2} + V_A x = \\ &= -\left(f_V + \frac{ql}{2}\right) l \cos \alpha - \\ &\quad - \frac{qx^2}{2} \cos \alpha + (f_V + ql) \cos \alpha x; \\ x = l: M_B &= -f_V l \cos \alpha - \frac{ql^2}{2} \cos \alpha - \\ &\quad - \frac{ql^2}{2} \cos \alpha + f_V l \cos \alpha + ql^2 \cos \alpha = 0, \end{aligned}$$

где  $f_V$  – вертикальная составляющая тяговой силы.

Прогиб определим исходя из дифференциального уравнения прогиба трубы [2]:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M_x}{EJ}.$$

$$\text{Тогда: } \theta = \frac{dw}{dx} = \frac{1}{EJ} \int M_x dx, \text{ при } \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = 0$$

$$\text{и } w = \int \theta dx, \text{ при } w|_{x=0} = 0.$$

Получим для значения прогиба при  $x = l$ :

$$w_{\max} = -\frac{l^3 \cos \alpha}{EJ} \left( \frac{f_V}{3} + \frac{ql}{8} \right).$$

В исходном состоянии для недеформированной трубы уравнение для ее оси соответствует прямой линии:  $y_0 = kx + b$ , где  $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{L}$ ,  $b = h$ .

Перемещение оси трубы с учетом ее деформируемости изменит положение ее конца в соответствии с соотношением:

$$u = y_0 + w.$$

Используя ограничение на положение консольной части трубы длиной  $l$ , запишем неравенство, учитывая диаметр канала  $D_C$  и диаметр трубы  $D_T$ :

$$y_0 + w + \frac{D_T}{2} < D_C.$$

В развернутом виде определяющее неравенство будет иметь вид:

$$kl + h - \frac{l^3 \cos \alpha}{EJ} \left( \frac{f_V}{3} + \frac{ql}{8} \right) + \frac{D_T}{2} < D_C.$$

Из чего, в свою очередь, следует ограничение для высоты конечной преграды  $h$ :

$$h < D_C - kl - \frac{D_T}{2} \cos \alpha + \frac{l^3 \cos \alpha}{EJ} \left( \frac{f_V}{3} + \frac{ql}{8} \right), \quad (1)$$

$$l = \frac{D_C - D_T \cos \alpha - h}{\sin \alpha}, \quad (2)$$

где  $f_V = F_{\text{pull}} \sin \psi$ ;  $q = \rho g S_T$ ;  $S_T$  – площадь поперечного сечения трубы;  $F_{\text{pull}}$  – тяговая сила;  $\psi$  – угол, образуемый штангой, соединяющей расширитель с концом трубопровода, и осью канала, его величина вычисляется из геометрических соотношений:

$$\psi = \arcsin \left( \frac{D_C}{2l_{\text{vert}}} - \frac{D_T}{2l_{\text{vert}}} \cos \alpha \right),$$

где  $l_{\text{vert}}$  – длина вертлюга.

Выражение (1), с учетом (2), можно свести к алгебраическому неравенству с полиномом 4-ой степени относительно критической высоты препятствия:

$$\begin{aligned} l &= \frac{D_C - D_T \cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{h}{\sin \alpha} = A_l - B_l h, \\ A_l &= \frac{D_C - D_T \cos \alpha}{\sin \alpha}, B_l = \frac{1}{\sin \alpha}, \end{aligned}$$

тогда:

$$\begin{aligned} h &< D_C - D_T - A_l k - B_l kh + \\ &+ \frac{(A_l - B_l h)^3 \cos \alpha}{EJ} \left( \frac{f_V}{3} + \frac{q(A_l - B_l h)}{8} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

С другой стороны, можно получить выражение относительно длины  $l$ , если учесть, что:

$$h = \frac{A_l - l}{B_l}.$$

В этом случае неравенство (3) представим в виде алгебраического неравенства четвертого порядка относительно длины  $l$  участка трубопровода от местоположения препятствия до касания верхней стенки канала с учетом силы тяжести и вертикальной компоненты усилия протаскивания:

$$\begin{aligned} \frac{q \cos \alpha}{8EJ} l^4 + \frac{f_V \cos \alpha}{3EJ} l^3 + \left( \frac{1}{B_l} - k \right) l + \\ + \left( D_C - D_T - \frac{A_l}{B_l} \right) > 0. \end{aligned}$$

Таблица 1. Результаты расчетов для трубопроводов и каналов различных диаметров

Диаметр канала, мм	Диаметр трубопр., мм	Тяговая сила, кН	Высота препятствия, м	$l$ из геом. огранич., м	$l$ из кубич. уравнения, м
345	273	193	0.0208	6.4187	6.3993
410	325	284	0.0260	6.8329	6.7952
475	377	313	0.0279	8.2875	8.2448

Полученное условие позволяет определить длину участка трубопровода достаточную для обеспечения протаскивания трубопровода. Однако анализ этого неравенства представляется достаточно трудоемким и, в этой связи, рассмотрим другой вариант условия протаскивания через препятствие.

Запишем выражение для момента в произвольной точке на участке трубопровода слева от препятствия:

$$m_x = m_A + \frac{qx^2}{2} - Q_A x.$$

Выражение для момента, следующее из его определения, даст уравнение относительно второй производной прогиба  $w$ :

$$EJ \frac{d^2 w}{dx^2} = \left( f_V + \frac{ql}{2} \right) l \cos \alpha + \frac{qx^2}{2} \cos \alpha - (f_V + ql) \cos \alpha x.$$

Отсюда, с учетом условия  $x = 0 : \frac{dw}{dx} = 0$ , получим:

$$EJ \frac{dw}{dx} = \left( f_V + \frac{ql}{2} \right) l \cos \alpha x + \frac{qx^3}{6} \cos \alpha - (f_V + ql) \cos \alpha \frac{x^2}{2}.$$

Найдем значение координаты  $x$ , при котором выполняется условие равенства производной от функции прогиба тангенсу угла наклона оси трубопровода к горизонту или, иначе говоря, условие параллельности свободного конца трубопровода и оси канала:

$$\frac{dw}{dx} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Таким образом, определение условия возможности протаскивания трубопровода через препят-

ствие сведено к решению кубического уравнения:

$$ax^3 - bx^2 + cx - d = 0,$$

где

$$a = \frac{q \cos \alpha}{6}, \quad b = \frac{(f_V + ql) \cos \alpha}{2}, \\ c = \left( f_V + \frac{ql}{2} \right) l \cos \alpha, \quad d = EJ \operatorname{tg} \alpha.$$

Величина  $l$ , полученная при решении данного уравнения, не должна превышать значения, полученного из геометрического ограничения (2).

### 3. Результаты расчетов

В табл. 1 приведены результаты расчетов, позволяющие определить допустимый максимальный размер препятствия для различных размеров трубопровода и канала.

### 4. Заключение

Анализируя результаты, можно сделать вывод, что для каждого соотношения диаметров трубопровода и канала существует допустимый максимальный размер препятствия, причем зависимость между размером этого препятствия и размером канала явно нелинейная.

### Список литературы

- [1] Бородавкин П.П., Березин В.Л. Сооружение магистральных трубопроводов. М.: «Недра», 1977. 407 с.
- [2] Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов: Учебник. М.: Изд-во МАИ, 1994. 512 с.
- [3] Сапсай А.Н., Шарафутдинов З.З., Урманчиев С.Ф. Работоспособность бурильной колонны при строительстве подводных переходов трубопроводов методом наклонно направленного бурения // Нефтяное хозяйство. 2018. № 5. С. 88-92. (DOI: 10.24887/0028-2448-2018-5-88-92)



## Determination of the allowable maximum size of the obstacle while dragging a pipeline

Krioni I.N., Semenova A.V.

Ufa State Aviation Technical University, Ufa

In this article, the process of overcoming the stony obstacle while dragging pipeline through the channel is considered. Depending on the size of the duct and the pipeline itself the permissible size of the obstacle that the pipeline can overcome without resting against the upper part of the channel, is considered. To solve this problem, the pipeline is conditionally divided into two sections: the site located up to the obstacle and resting on it, and a free area that is after the obstacle. Directly on the process of dragging through an obstacle are acting the forces and moments which have influence on the pipeline. Starting from the equations of moment equilibrium for different points of the pipeline, and also from the equations of bending beams the value of the obstacle is evaluated.

**Keywords:** pipeline, pipeline pulling, underground communications, mathematical modeling



## Вдавливание цилиндрической оболочки в упругопластическое полупространство

Филиппов А.А.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г. Уфа

В статье рассматривается задача вдавливания стальной цилиндрической оболочки в упругопластическое полупространство, имеющее цилиндрическую вогнутость. Проведен расчет и анализ напряженно-деформированного состояния стальной оболочки и упругопластического полупространства. Приведены графики зависимостей смятия полупространства, коэффициента запаса и напряженного состояния в стальной оболочке от силы вдавливания оболочки в полупространство. Расчеты проводились для трех радиусов вогнутостей и двух типов материалов полупространства. Предполагалось, что упругопластическое полупространство подчиняется критерию разрушения Мора–Кулона.

**Ключевые слова:** упругопластическая деформация, критерий разрушения Мора–Кулона, ассоциированный закон пластического течения, контактная задача

### 1. Постановка задачи

Рассматривается задача вдавливания стальной цилиндрической оболочки в упругопластическое полупространство, имеющее цилиндрические вогнутости различной кривизны. Диаметр цилиндрической оболочки равен  $d = 1220$  мм, толщина стенки —  $h = 20$  мм (рис. 1).

Задача рассматривалась в плоской постановке (плоская деформация). Расчетная область состоит из двух элементов: сечение цилиндрической оболочки и сечение ограниченного фрагмента полупространства, имеющего вид полудиска радиуса 5 м, на верхней грани которого располагается вогнутость постоянной кривизны. Рассматривались полупространства с вогнутостями, радиус кривизны которых  $R_1 = 1220$  мм,  $R_2 = 1600$  мм и  $R_3 = \infty$ .

Полупространство представляет собой однородный материал, имеющий свойства тупоупругой глины или известняка. Эти материалы относятся к классу горных пород, подчиняющихся закону разрушения Мора–Кулона. Материал оболочки — сталь 13Г1С-У. Упругопластические свойства мате-

риалов приведены в табл. 1.

Материал подчиняется закону разрушения Мора–Кулона, если предельные касательные напряжения линейным образом зависят от нормальных напряжений [1, 2].

Критерий разрушения Мора–Кулона удобно представить графически с помощью круговой диаграммы Мора. В этом случае напряженное состояние считается допустимым, если круги Мора рас-

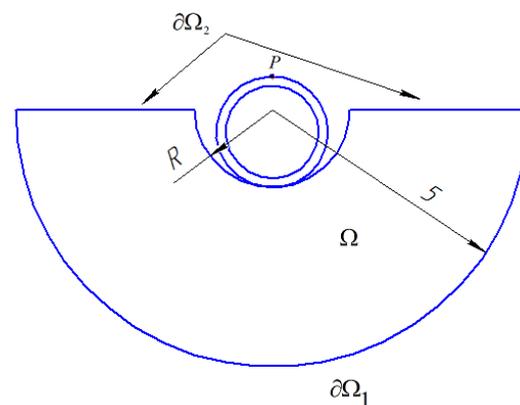


Рис. 1. Расчетная область

Таблица 1. Физико-механические свойства грунта и трубопровода

	Глина тугопластичная	Известняк	Сталь 13Г1С-У
Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	1880	2400	7450
Модуль упругости $E$ , МПа	5.57	100	$206 \cdot 10^3$
Коэффициент Пуассона $\nu$	0.4	0.3	0.33
Предел текучести $\sigma$ , МПа	—	—	215
Угол внутреннего трения $\phi$	15.38	31	—
Удельное сцепление $c$ , МПа	0.047	7.3	—

положены ниже прямой  $\tau + \sigma \cdot \operatorname{tg} \phi = c$ , где  $\tau$  и  $\sigma$  — касательные и нормальные напряжения;  $\phi$  — угол внутреннего трения;  $c$  — удельное сцепление.

Аналитически этот критерий можно записать с помощью функции  $F(\sigma)$ , называемой функцией текучести материала, в пространстве главных напряжений [1]:

$$F(\sigma) = \max \left( \begin{array}{l} \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \sin \phi - c \cdot \cos \phi \\ \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} + \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \sin \phi - c \cdot \cos \phi \\ \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \phi - c \cdot \cos \phi \end{array} \right) \quad (1)$$

Разрушение происходит в случае, когда значение функции  $F(\sigma)$  больше или равно нулю.

Идеальная упругопластическая модель Мора-Кулона наиболее точно описывает механику деформации горных пород, удовлетворяющих критерию разрушения Мора-Кулона [3]. В этой модели выражение  $F(\sigma) = 0$  задает поверхность текучести материала, а область допустимых значений напряжений определяется условием  $F(\sigma) \leq 0$ .

Согласно теории пластического течения приращение пластической деформации пропорционально градиенту функции текучести  $\dot{\varepsilon} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma}$ . При этом необходимо, чтобы выполнялось одно из условий [2]:

$$\begin{cases} F(\sigma) < 0, & \dot{\lambda} = 0, \\ F(\sigma) = 0, & \dot{\lambda} > 0. \end{cases}$$

Первый вариант соответствует ситуации, когда напряжения не достигли предела текучести, в этом случае приращение получает только упругая компонента деформации. Второй вариант реализуется, когда напряжения  $\sigma$  достигли предела текучести, в результате происходит приращение пластической деформации.

Основные уравнения механики упругопластической деформации с ассоциированным законом

пластического течения можно записать в виде следующей системы [2]:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}^{(1,2)} + f_i^{(1,2)} = 0, \\ \sigma_{ij}^{(1,2)} = \lambda^{(1,2)} \varepsilon_{kk}^{(1,2)} \delta_{ij} + 2\mu^{(1,2)} \varepsilon_{ij}^{(1,2)}, \\ \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}), \\ \dot{\varepsilon}^{(1,2)} = \dot{\varepsilon}^{(1,2)} + \dot{\varepsilon}^{(1,2)}, \\ \dot{\varepsilon}^{(1,2)} = \dot{\lambda}^{(1,2)} \frac{\partial F^{(1,2)}}{\partial \sigma}, \\ F^{(1,2)}(\sigma) \leq 0, \\ \dot{F}^{(1,2)}(\sigma) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\sigma_{ij}^{(1,2)}$  — тензор напряжений;  $f_i^{(1,2)}$  — компоненты вектора объемных сил;  $\lambda^{(1,2)}$ ,  $\mu^{(1,2)}$  — коэффициенты Лямэ;  $\varepsilon^{(1,2)}$  — тензор полной деформации;  $\varepsilon^{(1,2)}$  — тензор упругой деформации;  $\varepsilon^{(1,2)}$  — тензор пластической деформации  $\lambda$  — множитель Лагранжа;  $F^{(1,2)}(\sigma)$  — функция текучести.

Верхний индекс (1, 2) определяет компоненту рассматриваемой области (полупространство или оболочка соответственно). Функция текучести материала полупространства  $F^{(1)}$  определяется по закону пластического течения Мора-Кулона (1).

$$F^{(2)}(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{2} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2)} - \sigma_T, \quad (3)$$

определяется как функция текучести Мизеса, где  $\sigma_T$  — предел текучести материала. Закон пластического течения с функцией текучести (3) достаточно точно описывает механику деформации большинства конструкционных материалов, таких как сталь.

## 2. Схема решения

Для оболочки, находящейся в положении начального контакта с нижней точкой вогнутости полупространства, задавались несколько вариантов вертикальных смещений. В результате численного

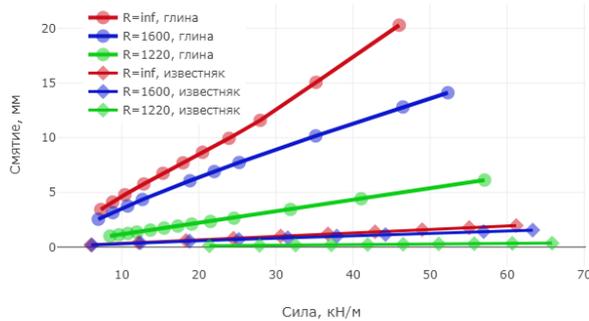


Рис. 2. Максимальное смятие грунта в зоне контакта

решения определялись контактные силы, действующие на полупространство со стороны оболочки.

Условие отсутствия перемещений в точках полупространства, лежащих на бесконечном удалении от зоны контакта с цилиндрической оболочкой, для рассматриваемой модели исследуемой области соответствует отсутствию перемещений на границе  $\partial\Omega_1$ :

$$u^{(1)}|_{\partial\Omega_1} = 0. \tag{4}$$

Система уравнений (2) для верхнего индекса 1 и граничные условия (4) определяют математическую постановку задачи механики упругопластической деформации полупространства по пластическому закону течения Мора–Кулона.

Система уравнений (2) для верхнего индекса 2 и граничные условия (5) определяют математическую постановку задачи механики упругопластической деформации оболочки по условию текучести

Мизеса:

$$\begin{aligned} u_1^{(2)}|_{x_P} &= 0, \\ u_2^{(2)}|_{x_P} &= u_2^0, \end{aligned} \tag{5}$$

где  $u_i^{(2)}|_{x_P}$  — компоненты перемещения точки  $P$ ;  $u_2^0$  — заданное вертикальное смещение.

### 3. Результаты

Получены результаты численных расчетов контактной задачи вдавливания цилиндрической оболочки в упругопластичное полупространство для трех типов вогнутостей и двух типов материала полупространства.

На рис. 2 приведены графики смятия полупространства в зависимости от величины силы вдавливания оболочки.

Сжимающие напряжения в полупространстве достигают наибольших значений на некотором углублении порядка размера зоны контакта. Что согласуется с теоретическим решением задачи вдавливания жесткого прямоугольного индентера в полубесконечное упругое пространство [4].

Для оценки напряженно-деформированного состояния полупространства был рассчитан относительный коэффициент запаса прочности  $\eta = -F^{(1)}(\sigma)/(c \cdot \cos(\phi))$ , где  $c$  — удельное сцепление, а  $\phi$  — угол внутреннего трения. Область допустимых напряжений определяется значениями  $\eta \geq 0$ . Состоянию пластической текучести соответствует  $\eta = 0$ . На рис. 3 и 4 представлены диаграммы распределения  $\eta$  в окрестности зоны контакта. Красные зоны соответствуют наименьшему (наиболее опасному) значению коэффициента запаса прочности  $\eta$ .

На рис. 5 приведен график относительного коэффициента запаса. Из графика видно, что толь-

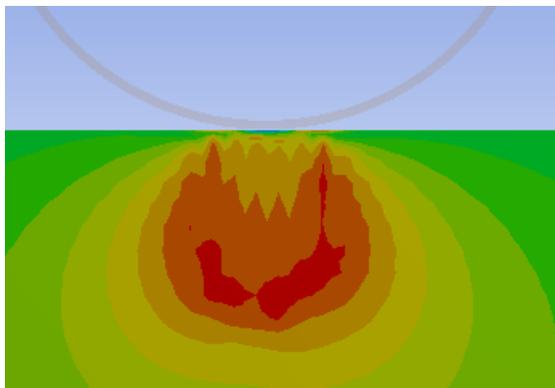


Рис. 3. Диаграмма распределения коэффициента запаса прочности  $\eta$  (материал полупространства — глина, радиус вогнутости  $R = \infty$ )

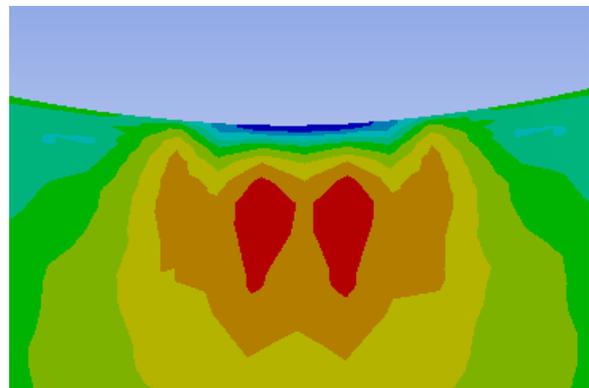


Рис. 4. Диаграмма распределения коэффициента запаса прочности  $\eta$  (материал полупространства — глина, радиус вогнутости  $R = 1600$  мм)

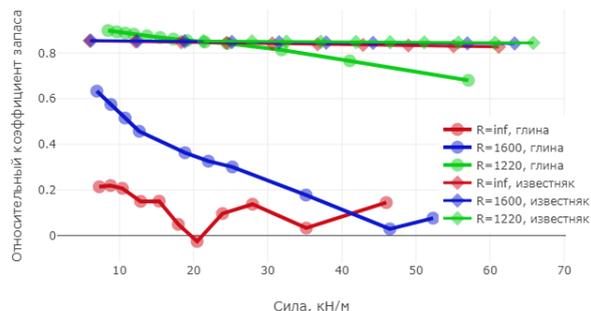


Рис. 5. Относительный коэффициент запаса

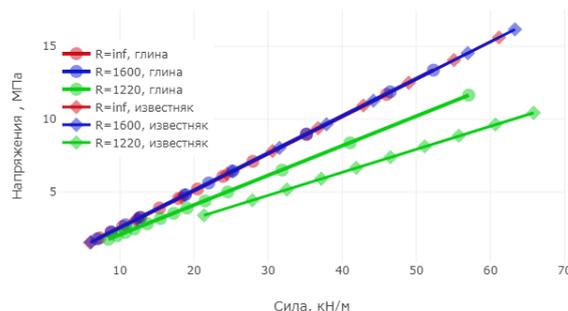


Рис. 6. Максимальные напряжения в трубопроводе

ко для глинистого полупространства напряженное состояние приближается к пределу текучести. В случае, когда вогнутость имеет радиус  $R = \infty$ , при значении вдавливающей силы примерно равной 20 кН/м в окрестности контактной зоны происходит локальное пластическое течение материала полупространства. При дальнейшем увеличении вдавливающей силы напряжения переходят в упругую зону.

На рис. 6 приведены графики зависимостей максимальных эквивалентных напряжений в оболочке от величины вдавливающей силы. Все точки лежат на одной прямой, за исключением случая, когда радиус вогнутости совпадает с радиусом оболочки ( $R = 1220$  мм), и за счет большей области контакта напряжения в оболочке снижаются. Во всех случаях напряжения остаются в упругой зоне.

#### 4. Выводы

Силы вдавливания, не превышающие 60 кН/м, могут привести к локальной пластической деформации глинистого полупространства в зоне кон-

такта (для радиуса вогнутости  $R = \infty$ ). Во всех остальных случаях деформации происходят в упругой зоне, при этом коэффициент запаса прочности для известнякового полупространства не снижается ниже 0.9.

При максимальной силе вдавливания эквивалентные напряжения в оболочке принимают значение меньше 20 МПа, что не превышает 10% от предела текучести стали 13Г1С-У.

#### Список литературы

- [1] Lubliner J. Plasticity Theory. Dover Publication Inc, 2008. 528 p.
- [2] Ronaldo I.B. Plasticity Modeling and Computation. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2013. 255 p. (DOI: 10.1007/978-3-642-38547-6).
- [3] Coombs W.M., Crouch R.S., Heaney C.E. Observations on Mohr-Coulomb plasticity under plane strain // Journal of engineering mechanics. 2013. V. 139, No. 9. Pp. 1218–1228. (DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000568).
- [4] Sadd M.H. Elasticity: Theory, Applications, and Numerics. Elsevier. 2014. 600 p. (DOI: 10.1016/C2012-0-06981-5).



## Indentation of the cylindrical shell in the elastoplastic half-space

Filippov A.A.

Mavlutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa

The article deals with the problem of pressing the steel cylindrical shell into the elastoplastic half-space having a cylindrical concavity. The calculation and analysis of the stress-strain state of the steel shell and elastoplastic half-space. Given the dependence of the shear half-space, the safety factor and stress state in steel shell from the force pushing the shell in the half-space. The calculations were carried out for three radii of concavities and two types of half-space materials. It was assumed that the elastoplastic half-space obeys the Mohr-Coulomb fracture criterion.

**Keywords:** elastoplastic deformation, Mohr–Coulomb failure criterion, associative plastic flow rule, contact problem



## Зависимость эффекта Ранка–Хилша от геометрии холодного выхода

Борисоглебский И.К.\* , Метусова М.В.\* , Михайленко К.И.\*\*

\*Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

\*\*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Исследуется влияние таких параметров сопла холодного выхода противоточной вихревой трубы как длина и угол расширения на эффективность температурного разделения. Математическая модель динамики газа записана с учётом вязкости. Вычислительное моделирование производится в пакете OpenFOAM, используется решатель sonicFoam. Показано, что температура выходящего воздуха снижается вдоль сопла холодного выхода. Наличие угла расширения сопла влияет на величину охлаждения, но не является первопричиной эффекта. Продемонстрирована немонотонность зависимости температуры выходящего газа от длины сопла холодного выхода. При исследовании влияния на температуру угла расширения сопла холодного выхода при фиксированной длине показано, что при фиксированном объёмном расходе наблюдается ярко выраженная немонотонная зависимость, тогда как при постоянном перепаде давления немонотонность отсутствовала вплоть до максимально рассмотренного угла.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, газовая динамика, вихревая труба, эффект Ранка–Хилша, OpenFOAM, турбулентность

### 1. Введение

На сегодняшний день вихревая техника используется во многих отраслях промышленности: охлаждение деталей машин, установка припоев, осушение проб газа, охлаждение продуктов питания, выработка энергии [1], охлаждение оборудования в лабораториях, работающих со взрывчатыми веществами [2]. Также можно отметить контроль температуры воздуха у дайверов и в подводных обитаемых станциях, гипербарических камер [3], разделение частиц отработанного газа в промышленности [4], охлаждение техники ядерного магнитного резонанса [5], охлаждения ядерных реакторов [2], осушение газа [6] и т.д. Показанный спектр применения обусловлен рядом преимуществ:

- компактность и простота конструкции;
- высокий уровень надежности благодаря отсутствию подвижных элементов;
- отсутствие необходимости в хладагентах и теплоносителях;
- быстрый выход на рабочий режим;
- одновременное осуществление процессов охлаждения, нагрева и фазоотделения;
- низкая стоимость изготовления, легкое обслуживание и ремонт.

В этой связи исследование устройств, реализующих вихревой эффект, является одним из основных направлений вихревой техники, особенно с учётом того факта, что механизм температурного разделения до сих пор не вполне ясен [7–9]. На сегодняшний день проводятся многочисленные теоретические, численные и экспериментальные исследования по раскрытию феномена разделения

энергии и повышения эффективности установок, реализующих его [10–15].

Исследователи приводят различные гипотезы об эффектах, влияющих на энергоразделение. Так в работе [10] делается акцент на влиянии колебаний пограничного слоя. Здесь представлен механизм передачи энергии в вихревой трубе, работающий при условии, что стабильное колебание пограничного слоя — доминирующий механизм для процесса теплопередачи и массообмена.

В публикации [11] исследовалось влияние таких термофизических параметров как входная температура и давление на входе и выходе вихревой трубы. Было предложено новое уравнение для оценки выходной температуры, основанное на верхнем и нижнем температурных пределах, сопоставленное с экспериментальными данными. Показано, что уменьшение температуры на входе отвечает за снижение температуры на выходе, а большое отношение давления на входе и выходе приводит к лучшему термическому разделению.

Многие исследователи предполагают, что существенное влияние оказывает конструкция. В статье [12] авторами демонстрируются эффекты, определяемые различным числом входных отверстий (от 1 до 5), длиной трубы и диаметром холодного выхода. Согласно полученным результатам сделано заключение, что мгновенная скорость потока жидкости из холодного выхода увеличивается пропорционально диаметру отверстий и длине вихревой трубы. При этом температуры на обоих выходах уменьшаются при увеличении числа входных отверстий.

В работе [13] приняты некоторые фиксированные оптимальные параметры отношения длины и диаметра и исследовано влияние конического угла конструкции при разном давлении подаваемого газа. Показано, что давление на входе является важным параметром, определяющим температурное разделение. Также определено существование оптимального малого конического угла основного канала трубы.

Статья [14] рассматривает вихревые трубы со встречным и параллельным потоками. Здесь рассмотрены вихревые трубы при соотношении длины к диаметру равном 15. Показано, что повышение разницы температурного разделения вихревой трубки в основном зависит от величины входного давления; производительность вихревой трубки улучшается с увеличением входного давления; увеличение отношения длины к диаметру до определенной степени улучшает величину температурного разделения; диаметр холодного конца вихревой трубы должен быть определенных

размеров.

Следующая работа [15] посвящена исследованию характеристик разделения энергии в латунной вихревой трубе с использованием в качестве рабочей жидкости углеводородной смеси. В ходе экспериментов использовались два вида рабочих жидкостей: пропан-бутан и пропан-бутан с азотом. При проведении экспериментов для каждой из смесей менялось значение входного давления. Показано, что наилучшее разделение энергии является наивысшим при использовании четырех отверстий во входном сопле.

Статья [16] также посвящена исследованию влияния числа отверстий сопла на характеристики охлаждения противоточной вихревой трубы. Здесь исследуется также влияние «эффекта кривизны» входных сопел на производительность вихревой трубы.

## 2. Постановка задачи

При моделировании газодинамических процессов в противоточной вихревой трубе, схема которой приведена на рис. 1, приняты следующие параметры моделируемого объекта:  $L = 52$  см;  $D = 9.4$  см;  $d = 1.6$  см;  $h = 0.5$  см;  $p = 2$  см;  $q = 1$  см;  $m = 5$  см. Величины  $\ell$  и  $\alpha$  изменяемые.

Начальные данные соответствуют нормальным условиям: давление в области равномерно и равно атмосферному ( $10^5$  Па); температура по всей области комнатная (300 К); газ (воздух) — неподвижен ( $U = 0$  м/с).

Граничные условия задаются характерными для работающей вихревой трубы. На вход подается газ комнатной температуры (300 К) при повышенном давлении ( $\sim 4 \cdot 10^5$  Па). На выходе — атмосферное давление ( $10^5$  Па), а для температуры и скорости — условие протекания. Стенки вихревой трубы термоизолированы, на них задается условие прилипания.

В некоторых вычислительных экспериментах на входе задается не давление, а объемный расход газа  $f = 0.075$  м<sup>3</sup>/с.

Математическая модель записывается как система уравнений газовой динамики, состоящая из уравнения неразрывности, уравнения импульсов и уравнения энергии:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{U}) = 0;$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{U} \times \mathbf{U}) = -\nabla p + \nabla \tau;$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{U} E) = -\nabla p \mathbf{U} + \nabla(\tau \times \mathbf{U});$$

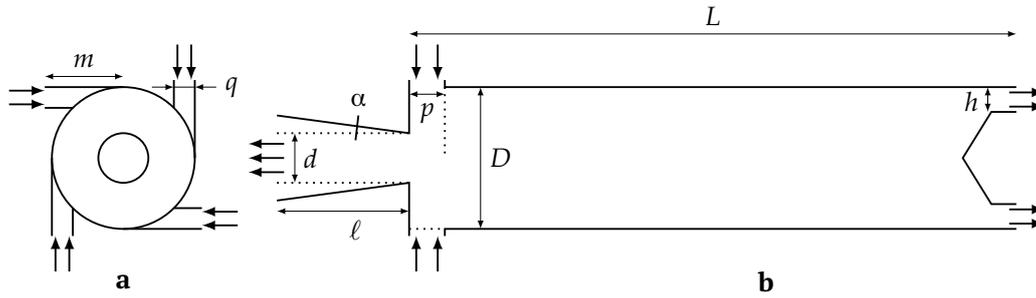


Рис. 1. Схема изучаемой противоточной вихревой трубы: а) вид с торца со стороны холодного выхода и завихрителей; б) разрез вдоль оси трубы. Обозначения:  $L$  — длина трубы;  $D$  — диаметр трубы;  $p, m, q$  — высота, длина и ширина канала завихрителя;  $c$  — диаметр сопла холодного выхода;  $h$  — размер горячего выхода (разность внешнего и внутреннего радиусов);  $l$  — длина сопла холодного выхода;  $\alpha$  — угол расширения сопла холодного выхода

Уравнение состояния идеального газа замыкает представленную систему:

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon.$$

При записи уравнений использованы стандартные обозначения для физических величин и параметров:  $\mathbf{U}$  — вектор скорости;  $\rho$  — плотность;  $p$  — давление;  $E = \varepsilon + \frac{1}{2}|\mathbf{U}|^2$  — удельная полная энергия;  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия;  $\gamma$  — показатель адиабаты;  $\tau$  — тензор вязких напряжений, элементы которого вычисляются как

$$\tau_{ij} = (\mu + \mu_t) \left[ \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right],$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $\mu$  — вязкость среды;  $\mu_t$  — турбулентная вязкость, вычисляемая исходя из  $k$ - $\varepsilon$  модели турбулентности.

### 3. Вычислительные средства

Вычислительное моделирование динамики жидкости и газа с учётом турбулентности проводится с использованием нескольких подходов. Алгоритмически самый простой подход заключается в использовании прямого численного моделирования [17, 18]. Однако такой подход отличается столь высокими требованиями к затраченным вычислительным ресурсам, что возникает необходимость переноса вычислительного кода на высокопроизводительный кластер или видеокарту.

Более эффективным является подход, при котором используется какая-либо модель турбулентности. В настоящей работе используется широко распространенная  $k$ - $\varepsilon$  модель.

Так как газ в вихревой трубе движется со значительными скоростями, вплоть до звуковых, в

качестве базового решателя выбран sonicFoam — один из стандартных решателей в составе пакета OpenFOAM, обеспечивающий вычисления для моделей потоков сжимаемых сред со звуковыми скоростями при возможном наличии ударных волн.

Для вихревой трубы с указанными выше размерами была подготовлена трёхмерная конечно-разностная сетка, в которой были учтены особенности цилиндрической конфигурации области и возможное влияние сетки узловых точек на результаты вычислений [19], поэтому качеству сетки было уделено особое внимание [20].

Также следует отметить, что при обработке полученных результатов существует необходимость вычисления среднего значения по сечению выхода и по времени температуры и давления. Для этой цели авторами используется двухэтапный подход. Вначале выполняется утилита surfaceCut из состава OpenFOAM, позволяющая получить указанные при вызове утилиты значения физических величин в сечении моделируемой области, сделанном по заданной поверхности. Полученные значения сохраняются в формате VTK во всех просчитанных моментах времени.

Следующим шагом вызывается скрипт, написанный на языке Python, обрабатывающий полученные файлы VTK на заданном промежутке времени и вычисляющий средние значения по площади поверхности, а затем и по времени. Таким образом вычисляются средние по сечению и турбулентным пульсациям значения плотности и температуры на холодном и горячем выходах, а также в области перехода из вихревой трубы в канал холодного выхода.

#### 4. Обсуждение результатов

Вычислительные эксперименты проводились в расчётной области, параметры которой (размеры вихревой трубы) были описаны в разделе 2. В проведённых сериях расчётов изменялись лишь параметры  $\ell$  и  $\alpha$ , остальные размеры одинаковы для всех вычислительных экспериментов.

В первой серии расчётов исследовалась зависимость выходных параметров от угла расширения сопла холодного выхода  $\alpha$ . В данной серии длина сопла холодного выхода ( $\ell = 5$  см) неизменна; угол расширения изменяется, оставаясь малым:  $\alpha = 0.1 \div 5^\circ$ .

Вначале проведено моделирование при условии, когда на входе задан постоянный объемный расход подаваемого на вход воздуха  $f = 0.075$  м<sup>3</sup>/с. Результаты данного вычислительного эксперимента показаны на рис. 2 пунктирной кривой чёрного цвета. Из графика можно видеть, что зависимость средней температуры на выходе в этом случае носит немонотонный характер с явно выраженным минимумом при угле расширения  $\alpha = 3^\circ$ .

Однако, если фиксированный расход заменить заданным значением давления (перепад давления между входом и выходом), то картина существенно изменяется. Выбрано давление на входе равное 4 атм ( $p_{in} = 4 \cdot 10^5$  Па), на выходе — атмосферное ( $p_{out} = 1 \cdot 10^5$  Па). Результаты при фиксированном перепаде давления показаны на том же рис. 2 сплошной кривой красного цвета. Следует отметить, что данный эксперимент показал почти линейную зависимость температуры выходящего воздуха от малого угла расширения сопла холодного выхода на рассмотренных значениях.

Следующая серия экспериментов исследовала

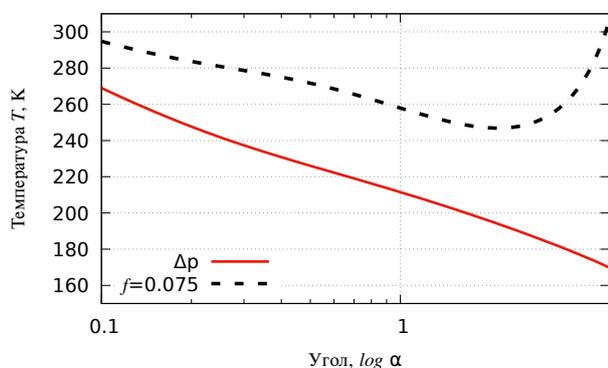


Рис. 2. Зависимость температуры воздуха на холодном выходе от угла канала холодного выхода при фиксированном расходе на входе и при фиксированном давлении

зависимость температуры воздуха от длины сопла холодного выхода. Диапазон исследованных длин  $\ell = 1 \div 20$  см. В данной серии на входе задается постоянное давление  $p_{in} = 4 \cdot 10^5$  Па.

На рис. 3 показана зависимость температуры от длины в двух сечениях сопла холодного выхода цилиндрической формы. Красная линия  $C_1$  демонстрирует поведение температуры на выходе из сопла. Черная пунктирная линия  $C_2$  показывает поведение средней температуры в сечении перехода из основного канала вихревой трубы в сопло холодного выхода. Из поведения представленных кривых можно сделать следующие выводы. В области перехода в сопло холодного выхода температура выходящего газа слабо зависит от геометрии указанного сопла. Однако при протекании сквозь сопло средняя температура газа существенно изменяется. На кривой  $C_1$  можно видеть два перегиба. Вначале температура холодного газа увеличивается с ростом длины сопла холодного выхода до  $\ell = 5$  см, а затем температура начинает уменьшаться. Однако на больших длинах ( $\ell > 12$  см) зависимость температуры от длины уменьшается.

На рис. 4 показаны кривые средних температур в тех же сечениях  $C_1$  и  $C_2$  для тех же длин ( $\ell = 1 \div 20$  см) сопла холодного выхода при условии наличия угла расширения этого сопла. В данном случае угол достаточно мал:  $\alpha = 0.25^\circ$ .

Из поведения кривых на рис. 4 следует отметить следующие факты. Во-первых, средняя температура в области перехода в сопло слабо зависит от геометрии сопла и сравнима со средней температурой в этой же области для сопла цилиндрической формы. Во-вторых, средняя температура на выходе существенно зависит от наличия угла расширения. Из поведения кривых  $C_2$  можно видеть, что

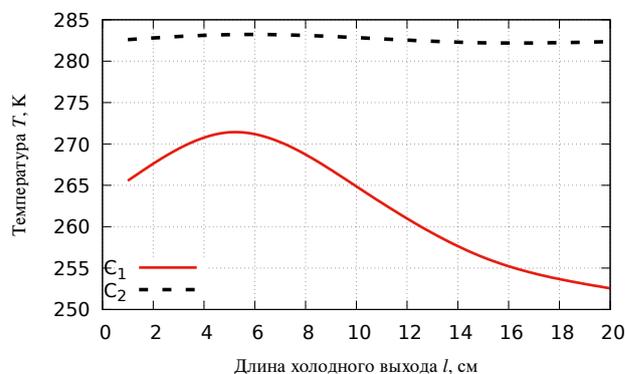


Рис. 3. Зависимость температуры воздуха на выходе ( $C_1$ ) и в сечении перехода из основного канала в сопло холодного выхода ( $C_2$ ) от длины канала для цилиндрического сопла

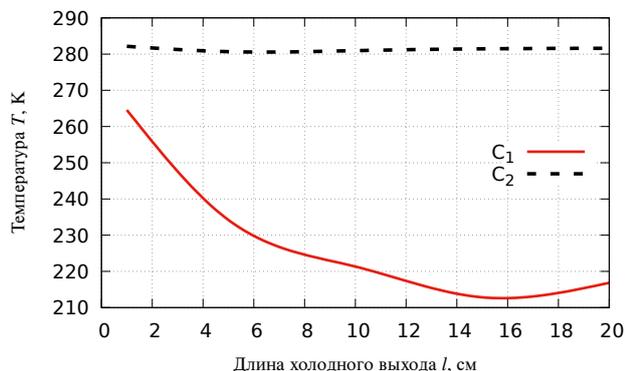


Рис. 4. Зависимость температуры воздуха на выходе ( $C_1$ ) и в сечении перехода из основного канала в сопло холодного выхода ( $C_2$ ) от длины канала для сопла с углом  $\alpha = 0.25^\circ$

значения средней температуры холодного воздуха в этом случае гораздо меньше температуры для тех же длин цилиндрического сопла. В-третьих, зависимость температуры холодного воздуха от длины сопла при наличии угла расширения носит иной характер. В этом случае даже для короткого сопла температура значительно падает при удлинении сопла. Однако и в этом случае мы наблюдаем немонотонность. При длинах  $l > 15$  см средняя температура холодного воздуха на выходе начинает расти.

## 5. Заключение

Проведенная работа показывает, что геометрические параметры сопла холодного выхода вихревой трубы неизбежно оказывают существенное влияние на производство холодного воздуха. При этом важным аспектом является условие постоянного давления на входе. В том случае, когда воздух в вихревую трубу подаётся при постоянном объёмном расходе, получаемый результат оказывается значительно меньше, чем случае постоянного давления на входе.

Отдельно следует отметить, что независимо от геометрии холодного выхода, основное охлаждение выходящего воздуха происходит непосредственно в сопле холодного выхода, тогда как на переходе из трубы в сопло воздух имеет приблизительно одинаковую температуру, лишь немногим меньшую в сравнении с температурой подаваемого газа.

Проведенное исследование не охватывает всех возможных длин и углов расширения сопла холодного выхода вихревых труб и подразумевает продолжение для углов  $\alpha > 5^\circ$  и длины  $l > 20$  см.

## Список литературы

- [1] Finko V.E. Cooling and condensation of a gas in a vortex flow // Soviet Physics Technical Physics. 1983. V. 28(9). Pp. 1089–1093.
- [2] Bruno T.J. Laboratory applications of the vortex tube // Journal of Chemical Education. 1987. V. 64. Pp. 987–988. (DOI: 10.1021/ed064p987)
- [3] Baz A., Gilheany J., Kalvitas A. Feasibility of vortex tube assisted environmental control of an underwater research habitat // Ocean Eng. 1988. V. 15(1). Pp. 33–54. (DOI: 10.1016/0029-8018(88)90018-2)
- [4] Riu K, Kim J, Choi IS. Experimental investigation on dust separation characteristics of a vortex tube // Trans JSME Ser B: Therm Fluid Mech. 2004. V. 47(1). Pp. 29–36. (DOI: 10.1299/jsmeb.47.29)
- [5] Martin R.W., Zilm K.W. Variable temperature system using vortex tube cooling and fiber optic temperature measurement for low temperature magic angle spinning NMR // J. Magn. Reson. 2004. V. 168(2). Pp. 202–209. (DOI: 10.1016/j.jmr.2004.03.002)
- [6] Kumar A., Vivekanand, Subudhi S. Cooling and dehumidification using vortex tube // Applied Thermal Engineering. 2017. Vol. 122. Pp. 181–193. (DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2017.05.015)
- [7] Гуцол А.Ф. Эффект Ранка // Успехи физических наук. 1997. Т. 167, №6. С. 665–687. (DOI: 10.1070/PU1997v040n06ABEH000248)
- [8] Eiamsa-ard S., Promvong P. Review of Ranque–Hilsch effects in vortex tubes // Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2008. V. 1. Pp. 1822–1842. (DOI: 10.1016/j.rser.2007.03.006)
- [9] Subudhi S., Mihir S. Review of Ranque–Hilsch vortex tube experiments using air // Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2015. Vol. 52. Pp. 172–178. (DOI: 10.1016/j.rser.2015.07.103)
- [10] Bo Zhang, Xiangji Guo, Zhuqiang Yang Analysis on the fluid flow in vortex tube with vortex periodical oscillation characteristics // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2016. V. 103. Pp. 1166–1175. (DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.08.063)
- [11] Majidi D., Alighardashi H., Farhadi F., Best vortex tube cascade for highest thermal separation // International Journal of Refrigeration. 2017. V. 85. Pp. 282–291. (DOI: 10.1016/j.ijrefrig.2017.10.006)
- [12] Moraveji A., Toghraie D. Computational fluid dynamics simulation of heat transfer and fluid flow characteristics in a vortex tube by considering the various parameters // Int. J. of Heat and Mass Transfer. 2017. V. 113. Pp. 432–443. (DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.05.095)
- [13] Hamdan M.O., Al-Omari S.-A., Oweimer A.S. Experimental study of vortex tube energy separation under different tube design // Experimental Thermal and Fluid Science. 2018. V. 91. Pp. 306–311. (DOI: 10.1016/j.exptthermfluidsci.2017.10.034)
- [14] Thakare H.R., Monde A., Parekh A.D. Experimental, computational and optimization studies of temperature separation and flow physics of vortex tube: A review // Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2015. V. 52. Pp. 1043–1071. (DOI: 10.1016/j.rser.2015.07.198)
- [15] Mohammadi S., Farhadi F. Experimental and numerical study of the gas–gas separation efficiency in a Ranque–Hilsch vortex tube // Separation and Purification Technology. 2014. V. 138. Pp. 177–185. (DOI: 10.1016/j.seppur.2014.10.022)

- [16] Attalla M., Ahmed H., Ahmed M.S., El-Wafa A.A. An experimental study of nozzle number on Ranque–Hilsch counter-flow vortex tube // *Experimental Thermal and Fluid Science*. 2017. V. 82. Pp. 381–389. (DOI: [10.1016/j.expthermflusci.2016.11.034](https://doi.org/10.1016/j.expthermflusci.2016.11.034))
- [17] Марьин Д.Ф., Михайленко К.И. Численное исследование механизма возникновения эффекта Ранка–Хилша в канале вихревой трубы // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2011. № 4–3. С. 977–978.
- [18] Марьин Д.Ф., Михайленко К.И., Хазиев Л.Х. Прямое численное моделирование эффекта ранка // В сборнике: *Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2011)* Труды международной научной конференции. 2011. С. 539–547. (<http://omega.sp.susu.ru/books/conference/PaVT2011/short/197.pdf>)
- [19] Михайленко К.И. Зависимость перераспределения температуры в вихревой трубе от геометрии завихрителя // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН*. 2017. Т. 12, № 2. С. 174–179. (DOI: [10.21662/uim2017.2.026](https://doi.org/10.21662/uim2017.2.026))
- [20] Михайленко К.И. К моделированию вихревой трубы: подготовка гексагональной сетки для вычислительных экспериментов в среде OpenFOAM // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН*. 2016. Т. 11, № 1. С. 112–118. (DOI: [10.21662/uim2016.1.017](https://doi.org/10.21662/uim2016.1.017))



## The dependence of the Ranque–Hilsch effect on the cold outlet geometry

Borisoglebskiy I.K. \*, Metusoava M.V. \*, Mikhaylenko C.I.\*\*

\*Ufa State Aviation Technical University, Ufa

\*\*Mavlutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa

The effect of such parameters of the cold outlet nozzle of the counter flow vortex tube as the length and widening angle on temperature separation is investigated. Mathematical model of gas dynamics is written with viscosity component. Computational simulation is performed in the OpenFOAM package, using the sonicFoam solver. It is shown that the temperature of the exhaust air decreases along the cold exit nozzle. The presence of the angle of widening of the nozzle affects the amount of cooling, but is not the root cause of the effect. The nonmonotonic dependence of the temperature of the exhaust gas on the length of the cold exit nozzle is demonstrated. When studying the effect on the temperature of the widening angle of a cold-exit nozzle at a fixed length, it was shown that at a fixed volume flow rate, a pronounced non-monotonic dependence is observed, while at a constant pressure drop, there is no non-monotony down to the maximum considered angle.

**Keywords:** mathematical modeling, gas dynamics, vortex tube, Ranque–Hilsch effect, OpenFOAM, turbulence



## Редукция частично инвариантных подмоделей ранга 3 дефекта 1 к инвариантным подмоделям<sup>1</sup>

Сираева Д.Т.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Рассматриваются уравнения гидродинамического типа с уравнением состояния в виде давления, разделенного в сумму функций плотности и энтропии. Такая система уравнений допускает двенадцатимерную алгебру Ли. В случае уравнения состояния произвольного вида уравнения газовой динамики допускают одиннадцатимерную алгебру Ли. Для обеих алгебр Ли оптимальные системы неподобных подалгебр построены. В настоящей работе по двум двумерным подалгебрам двенадцатимерной алгебры Ли построены две частично инвариантные подмодели ранга 3 дефекта 1. Доказана редукция построенных подмоделей к инвариантным подмоделям одиннадцатимерной и двенадцатимерной алгебр Ли.

**Ключевые слова:** подалгебра, инвариант, частично инвариантная подмодель, гидродинамика

### 1. Введение

Для уравнений гидродинамического типа:

$$\begin{aligned} \vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \rho^{-1} \nabla p &= 0, \\ \rho_t + (\vec{u} \cdot \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} \vec{u} &= 0, \\ p_t + (\vec{u} \cdot \nabla) p + \rho a^2(\rho, p) \operatorname{div} \vec{u} &= 0, \quad a^2 = f_\rho, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\vec{u} = (u, v, w)$  – вектор скорости;  $\rho$  – плотность;  $p$  – давление;  $p = f(\rho, S)$  – уравнение состояния;  $S$  – энтропия, была поставлена задача нахождения точных решений с помощью методов группового анализа [1]. Решение данной задачи связано с вычислением допускаемой алгебры Ли, групповой классификацией по произвольному элементу  $f(\rho, S)$ , вычислением оптимальной системы неподобных подалгебр, построением подмоделей. Задача групповой классификации решена в [1]. В работе [2] приведены все неизоморфные алгебры Ли групповой классификации, для каждой из которых способ перечисления неподобных подалгебр окончательно сформулирован в [3]. В настоящей работе

рассматриваются уравнения (1) с уравнением состояния в виде давления, разделенного в сумму функций плотности и энтропии [1]:

$$p = f(\rho) + h(S), \quad a^2 = f'. \quad (2)$$

Из (2) определяется энтропия  $S$ .

Уравнения (1) с учетом (2) инвариантны при действии группы  $G_{11}$  (группы Галилея, расширенной равномерным растяжением) и при действии переноса по  $p$ :

$$\begin{aligned} 1. \quad \vec{x}' &= \vec{x} + \vec{a}, \\ 2. \quad t' &= t + a_0, \\ 3. \quad \vec{x}' &= O\vec{x}, \quad \vec{u}' = O\vec{u}, \quad OO^T = 1, \quad \det O = 1, \\ 4. \quad \vec{x}' &= \vec{x} + t\vec{b}, \quad \vec{u}' = \vec{u} + \vec{b}, \\ 5. \quad t' &= tc, \quad \vec{x}' = c\vec{x}, \\ 6. \quad p' &= p + c_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Преобразованиям (3) соответствует двенадцатимерная алгебра Ли  $L_{12}$ , базис которой в декартовой системе координат записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \\ X_4 &= t\partial_x + \partial_u, \quad X_5 = t\partial_y + \partial_v, \\ X_6 &= t\partial_z + \partial_w, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Работа поддержана грантом РФФИ (№ 18-29-10071) и средствами государственного бюджета по госзаданию (№ 0246-2018-0005)

$$\begin{aligned} X_7 &= y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v, \\ X_8 &= z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w, \\ X_9 &= x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u, \quad X_{10} = \partial_t, \\ X_{11} &= t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z, \quad Y_1 = \partial_p. \end{aligned}$$

В оптимальную систему неподобных подалгебр алгебры Ли  $L_{12}$  из работы [4] входят подалгебры размерности два и более. Одномерные подалгебры получаются прибавлением оператора  $Y_1$  к оператору одномерной подалгебры из оптимальной системы подалгебр алгебры Ли  $L_{11}$  [5].

## 2. Инвариантные подмодели ранга 3 алгебр Ли $L_{11}$ и $L_{12}$

Оператор подалгебры 1.12 из оптимальной системы неподобных подалгебр алгебры Ли  $L_{11}$  [5] имеет вид:

$$X_4 = t\partial_x + \partial_u,$$

а инварианты таковы:

$$t, y, z, u - \frac{x}{t}, v, w, \rho, p.$$

Представление инвариантного решения следующее:

$$u = w_1 + \frac{x}{t}, \quad v = u_1, \quad w = v_1, \quad \rho, \quad p,$$

где  $u_1, v_1, w_1, \rho, p$  зависят от инвариантов  $t, y, z$ . Инвариантная подмодель ранга 3 эволюционного типа, соответствующая подалгебре 1.12 ( $L_{11}$ ), такова:

$$\begin{aligned} Du_1 + \rho^{-1}p_y &= 0, \\ Dv_1 + \rho^{-1}p_z &= 0, \\ Dw_1 &= -\frac{w_1}{t}, \\ D\rho + \rho(u_{1y} + v_{1z}) &= -\frac{\rho}{t}, \\ Dp + \rho f_\rho(u_{1y} + v_{1z}) &= -\frac{\rho}{t}f_\rho, \quad p = f(\rho, S), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $D = \partial_t + u_1\partial_y + v_1\partial_z$ .

Оператор одномерной подалгебры 1.12 из оптимальной системы неподобных подалгебр алгебры Ли  $L_{12}$  [4] имеет вид:

$$X_4 + Y_1 = t\partial_x + \partial_u + \partial_p, \quad (5)$$

а инварианты подалгебры (5) таковы:

$$t, y, z, u - \frac{x}{t}, v, w, \rho, p - \frac{x}{t}.$$

Представление инвариантного решения следующее:

$$u = w_1 + \frac{x}{t}, \quad v = u_1, \quad w = v_1, \quad \rho, \quad p = p_1 + \frac{x}{t},$$

где функции  $u_1, v_1, w_1, \rho, p_1$  зависят от инвариантов  $t, y, z$ . Инвариантная подмодель ранга 3 эволюционного типа, соответствующая подалгебре 1.12 ( $L_{12}$ ), такова:

$$\begin{aligned} Du_1 + \rho^{-1}p_{1y} &= 0, \\ Dv_1 + \rho^{-1}p_{1z} &= 0, \\ Dw_1 &= -\frac{1}{t}(w_1 + \rho^{-1}), \\ D\rho + \rho(u_{1y} + v_{1z}) &= -\frac{\rho}{t}, \\ Dp_1 + \rho f_\rho(u_{1y} + v_{1z}) &= -\frac{1}{t}(w_1 + \rho f_\rho), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $D = \partial_t + u_1\partial_y + v_1\partial_z$ .

Кроме инвариантных подмоделей можно построить частично инвариантные подмодели [6] для подалгебр, в представлении решения которых нельзя выразить все гидродинамические функции через инварианты. Такие «лишние» функции назначаются функциями от всех независимых переменных, входящих в систему (1). Подстановка представления решения в исходные уравнения гидродинамического типа (1) приводит к частично инвариантной подмодели. Решения частично инвариантных подмоделей могут полностью вкладываться в решения инвариантных подмоделей. Покажем, что частично инвариантные подмодели 2.38, 2.39 алгебры Ли  $L_{12}$  редуцируются в инвариантные подмодели ранга 3 одиннадцатимерной и двенадцатимерной алгебр Ли соответственно.

## 3. Редукция частично инвариантной подмодели 2.38 к инвариантной подмодели 1.12 ( $L_{11}$ )

Подалгебра 2.38 имеет вид:

$$X_4 = t\partial_x + \partial_u, \quad X_1 + Y_1 = \partial_x + \partial_p.$$

Инварианты подалгебры таковы:

$$t, y, z, v, w, \rho, p + tu - x.$$

В представлении частично инвариантного решения

$$u = u(t, x, y, z), \quad v, w, \rho, \quad p = p_1 + x - tu$$

функции  $v, w, \rho, p_1$  зависят от инвариантов  $t, y, z$ ; функция  $u = u(t, x, y, z)$  — общего вида.

Энтропия выражается следующим образом:  $S = S_1 + x - tu$ ,  $S_1 = S_1(t, y, z)$ .

Частично инвариантная подмодель 2.38 ранга 3 дефекта 1 такова:

$$\begin{aligned} u_t &= (t\rho^{-1} - u)u_x - vu_y - wu_z - \rho^{-1}, \\ u_y &= \frac{1}{t}(\rho Dv + p_{1y}), \\ u_z &= \frac{1}{t}(\rho Dw + p_{1z}), \\ u_x &= -(D \ln \rho + v_y + w_z), \\ Dp_1 + \rho f_\rho(v_y + w_z) + t\rho^{-1} &= \\ &= u_x(t^2\rho^{-1} - \rho f_\rho), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $D = \partial_t + v\partial_y + w\partial_z$ .

Пятое уравнение системы (7) представлено с учетом выражения  $u_t + vu_y + wu_z$  из первого уравнения той же системы. Из четвертого уравнения системы (7) следует

$$u = ax + \tilde{u}, \quad a = a(t, y, z), \quad \tilde{u} = \tilde{u}(t, y, z). \quad (8)$$

Подстановка (8) во второе и третье уравнения системы (7) уточняет вид функции  $a = a(t)$ . Подстановка (8) в первое уравнение системы (7) приводит к уравнению  $a_t + a^2 = 0$ , из которого следует  $a = \frac{1}{t}$  (константа убирается переносом  $t' = t + a_0$  из (3)). Таким образом,  $u = \frac{x}{t} + \tilde{u}(t, y, z)$ .

Полученные инварианты

$$t, y, z, u - \frac{x}{t}, v, w, \rho, p + tu - x$$

совпадают с инвариантами подалгебры  $X_4 = t\partial_x + \partial_u$  (подалгебра под номером 1.12 из оптимальной системы неподобных подалгебр алгебры Ли  $L_{11}$  [5]). Значит, частично инвариантная подмодель (7), построенная по подалгебре 2.38, редуцируется к инвариантной подмодели (4), соответствующей подалгебре 1.12 из оптимальной системы неподобных подалгебр алгебры Ли  $L_{11}$ .

#### 4. Редукция частично инвариантной подмодели 2.39 к инвариантной подмодели 1.12 ( $L_{12}$ )

Операторы подалгебры 2.39 таковы:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_4 + Y_1 = t\partial_x + \partial_u + \partial_p,$$

а инварианты следующие:

$$t, y, z, u - p, v, w, \rho.$$

Представление решения имеет вид:

$$u = \tilde{u}_1 + p, \quad v = \tilde{v}_1, \quad w = \tilde{w}_1, \quad \rho, \quad (9)$$

где  $\tilde{u}_1, \tilde{v}_1, \tilde{w}_1, \rho$  зависят от инвариантов  $t, y, z$ , а функция  $p = p(t, x, y, z)$  — от всех независимых переменных системы (1).

Подстановка (9) в систему (1) с учетом (2) приводит к частично инвариантной подмодели ранга 3 дефекта 1:

$$\begin{aligned} -D\tilde{u}_1 &= p_t + (\rho^{-1} + \tilde{u}_1 + p)p_x + \\ &\quad + \tilde{v}_1 p_y + \tilde{w}_1 p_z, \\ -D\tilde{v}_1 &= \rho^{-1} p_y, \quad -D\tilde{w}_1 = \rho^{-1} p_z, \\ -D\rho - \rho(\tilde{v}_{1y} + \tilde{w}_{1z}) &= \rho p_x, \\ -(\tilde{v}_{1y} + \tilde{w}_{1z})\rho f_\rho &= \\ &= p_t + (\tilde{u}_1 + p)p_x + \tilde{v}_1 p_y + \tilde{w}_1 p_z + \rho f_\rho p_x, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $D = \partial_t + \tilde{v}_1\partial_y + \tilde{w}_1\partial_z$ .

Ведем обозначение  $\alpha = D \ln \rho + \tilde{v}_{1y} + \tilde{w}_{1z}$ , тогда четвертое уравнение системы (10) примет вид:

$$p_x = -\alpha. \quad (11)$$

Подстановка второго, третьего и четвертого уравнений системы (10) в первое уравнение системы (10) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} p_t &= -D\tilde{u}_1 + \alpha(\rho^{-1} + \tilde{u}_1 + p) + \\ &\quad + \rho(\tilde{v}_1 D\tilde{v}_1 + \tilde{w}_1 D\tilde{w}_1). \end{aligned} \quad (12)$$

Следующее равенство получается подстановкой уравнения (12), второго, третьего и четвертого уравнений системы (10) в пятое уравнение системы (10)

$$D\tilde{u}_1 - \alpha(\rho^{-1} - \rho f_\rho) - (\tilde{v}_{1y} + \tilde{w}_{1z})\rho f_\rho = 0. \quad (13)$$

Приравнивание смешанных производных  $p_{tx}$  из (12) и  $p_{xt}$  из (11) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению  $-\alpha^2 + \alpha_t = 0$ , решение которого  $\alpha = -\frac{1}{t}$  не содержит постоянной, так как допускается перенос по времени  $t' = t + a_0$  (см. (3)). Тогда  $p$  из (11) имеет вид:

$$p = \frac{x}{t} + \tilde{p}_1(t, y, z). \quad (14)$$

Найденный вид  $p$  (14) подставляется в уравнения (13), второе, третье и четвертое уравнения системы (10):

$$D\tilde{u}_1 - (\tilde{v}_{1y} + \tilde{w}_{1z})\rho f_\rho = -\frac{1}{t}(\rho^{-1} - \rho f_\rho), \quad (15)$$

$$D\tilde{v}_1 + \rho^{-1}\tilde{p}_{1y} = 0, \quad (16)$$

$$D\tilde{w}_1 + \rho^{-1}\tilde{p}_{1z} = 0, \quad (17)$$

$$D\rho + \rho(\tilde{v}_{1y} + \tilde{w}_{1z}) = -\frac{\rho}{t}. \quad (18)$$

В (12) сначала подставляется вид  $p$  (14), затем (15), (16), (17):

$$D\tilde{p}_1 + (\tilde{v}_{1y} + \tilde{w}_{1z})\rho f_\rho = -\frac{1}{t}(\rho f_\rho + \tilde{u}_1 + \tilde{p}_1). \quad (19)$$

Система уравнений (15)–(19) содержит функции  $\tilde{u}_1, \tilde{v}_1, \tilde{w}_1, \rho, \tilde{p}_1$ , зависящие только от инвариантов  $t, y, z$ . Переобозначение  $\tilde{v}_1 \rightarrow u_1, \tilde{w}_1 \rightarrow v_1, \tilde{u}_1 \rightarrow w_1 - p_1, \tilde{p}_1 \rightarrow p_1$  приводит систему (15)–(19) к системе (6).

## 5. Заключение

Таким образом, для уравнений гидродинамического типа с уравнением состояния в виде давления, разделенного в сумму функций плотности и энтропии, построены две частично инвариантные подмодели ранга 3 дефекта 1 по двум двумерным подалгебрам 2.38, 2.39 алгебры Ли  $L_{12}$ . Доказана редукция построенных частично инвариантных подмоделей к инвариантным подмоделям ранга 3 одиннадцатимерной и двенадцатимерной алгебр Ли соответственно.

## Список литературы

- [1] Овсянников Л.В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикладная математика и механика. Москва: РАН. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
- [2] Хабилов С.В. Неизоморфные алгебры Ли, допускаемые моделями газовой динамики // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3, вып. 2. С. 87–90. (<http://mi.mathnet.ru/rus/ufa/v3/i2/p87>)
- [3] Khabirov S.V. Optimal system for sum of two ideals admitted by hydrodynamic type equations // Ufa Mathematical Journal. 2014. Vol. 6, i. 2. Pp. 97–101. (DOI: 10.13108/2014-6-2-97).
- [4] Siraeva D.T. Optimal system of non-similar subalgebras of sum of two ideals // Ufa Mathematical Journal. 2014. Vol. 6, i. 1. Pp. 90–103. (DOI: 10.13108/2014-6-1-90).
- [5] Хабилов С.В. Аналитические методы в газовой динамике. Уфа. Гилем. 2003. 192 с.
- [6] Чиркунов Ю.А., Хабилов С.В. Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды: монография. Новосибирск: Издательство НГТУ, 2012. 659 с.



## Reduction of partially invariant submodels of rank 3 defect 1 to invariant submodels

Siraeva D.T.

Mavlutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa

Equations of hydrodynamic type with the equation of state in the form of pressure separated into a sum of density and entropy functions are considered. Such a system of equations admits a twelve-dimensional Lie algebra. In the case of the equation of state of the general form, the equations of gas dynamics admit an eleven-dimensional Lie algebra. For both Lie algebras the optimal systems of non-similar subalgebras are constructed. In this paper two partially invariant submodels of rank 3 defect 1 are constructed for two-dimensional subalgebras of the twelve-dimensional Lie algebra. The reduction of the constructed submodels to invariant submodels of eleven-dimensional and twelve-dimensional Lie algebras is proved.

**Keywords:** subalgebra, invariant, partially invariant submodel, hydrodynamics



## Автомодельный упругий режим фильтрации через подвижную границу<sup>1</sup>

Хабиров С.В., Хабиров С.С.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В статье рассматривается одномерная задача упругой фильтрации жидкости через подвижную границу. Для инвариантности задачи выводятся краевые условия. Задача сводится к переопределенной краевой задаче для уравнения Вебера. Найдены точные решения. Асимптотика решения в бесконечно удаленной точке определяет инвариантный закон фильтрации по данным краевым условиям. Для произвольного инвариантного закона фильтрации определена связь между переопределенными инвариантными краевыми условиями.

**Ключевые слова:** упругая фильтрация, подвижная граница, инвариантные решения, уравнение Вебера, краевая задача, асимптотики решений

### 1. Введение

Одним из действенных способов интенсификации работы нефтяных и газовых скважин, а также увеличения приемистости нагнетательных скважин, является гидроразрыв пласта (ГРП). В течение ГРП в скважину подается жидкость под давлением бóльшим, чем давление разрыва пласта, что приводит к образованию высокопроводимой трещины в породе. Во время роста трещины происходит частичная потеря жидкости гидроразрыва из-за ее фильтрации в пористую среду пласта. Фильтрация происходит за счет разности давлений пластовой жидкости и жидкости в трещине с добавлением упругого давления раздвинутого скелета породы. На границе трещины определены полуширина трещины, давление и расход жидкости. Задача определения движения трещины в полной постановке слишком сложна: движение вязкой жидкости в трещине, фильтрация жидкости в породе, деформация породы возле трещины. Поэтому используют различные приближенные методы [1] для вывода упрощенной математической модели. Во многих

работах считается, что потеря жидкости на фильтрацию подчиняется эмпирическому закону Картера [2] или автомодельному закону фильтрации с неподвижной границей [3].

В настоящей работе рассматривается одномерный процесс упругой фильтрации жидкости в пласт через двигающуюся границу трещины в автомодельной постановке. Реализуются различные законы автомодельной фильтрации, для всех из них можно вывести связь между полушириной трещины, давлением и скоростью фильтрации на границе трещины и пласта. Задача сводится к краевой задаче для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка гипергеометрического типа (уравнению Вебера). Найдены точные решения уравнения. По переопределенным краевым условиям определяется закон автомодельной фильтрации.

### 2. Уравнения упругого режима фильтрации

Пористая среда характеризуется пористостью

$$m = \frac{V}{V'}$$

где в выделенном объеме  $V$  величина объема пор равна  $V'$ .

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10071-мк)

Фильтрующаяся жидкость определяется плотностью  $\rho$ , давлением  $p$  и скоростью фильтрации  $\vec{u}$ , которые связаны законом Дарси [3]:

$$\vec{u} = -\frac{k}{\mu} \Delta p, \quad (1)$$

где  $k$  — проницаемость среды;  $\mu$  — динамическая вязкость жидкости.

Закон сохранения массы жидкости в поровом пространстве имеет дифференциальный вид [3]:

$$(m\rho)_t + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \quad (2)$$

Величины  $m$ ,  $\rho$ ,  $k$ ,  $\mu$  зависят от давления при постоянной температуре. Эти зависимости являются уравнениями состояния и определяются экспериментально. Упругий режим фильтрации определяется линейными уравнениями состояния в окрестности равновесного давления  $p_0$ :

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \left( 1 + \frac{p - p_0}{K_\rho} \right), \\ m &= m_0 \left( 1 + \frac{p - p_0}{K_m} \right), \\ \frac{k}{\mu} &= \frac{k_0}{\mu_0} \left( 1 + \frac{p - p_0}{K} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\frac{p - p_0}{K_\rho}$ ,  $\frac{p - p_0}{K_m}$ ,  $\frac{p - p_0}{K}$  — малые величины, т.к. модули упругости  $K_\rho$ ,  $K_m$ ,  $K$  значительно больше  $p - p_0$  [4]. Подставляя (1) и (3) в (2), пренебрегая величинами меньшего порядка, получим нелинейное уравнение [3]

$$p_t = \varkappa \left[ \Delta p + \sigma (\nabla p)^2 \right], \quad (4)$$

где

$$\varkappa = \frac{k_0}{\mu_0 m_0} \left( \frac{1}{K_\rho} + \frac{1}{K_m} \right)^{-1}, \quad \sigma = \frac{1}{K_\rho} + \frac{1}{K}.$$

Уравнение (4) заменой

$$P = \ln |u| - f(\tau), \quad \tau = \varkappa t, \quad \sigma p = P$$

линеаризуется к уравнению упругого режима фильтрации, не содержащему эмпирических коэффициентов

$$u_\tau = \Delta u + f'(\tau)u. \quad (5)$$

В работе [3] уравнение (5) выведено как приближение уравнения (4).

### 3. Одномерная модель упругого режима фильтрации через подвижную границу

В одномерном случае уравнение (4)

$$p_t = \varkappa \left[ p_{xx} + \sigma p_x^2 \right]$$

справедливо в переменной области

$$0 < a(t) \leq x < \infty,$$

где  $x = a(t)$  — подвижная граница полуширины трещины.

Начальное условие имеет вид:

$$p(0, x) = p_0(x), \quad 0 < a_0 \leq x < \infty, \quad a_0 = a(0).$$

Условие на бесконечности задает давление пластовой жидкости

$$p(t, \infty) = p_\infty.$$

Условия на подвижной границе  $x = a(t)$ :

$$\begin{aligned} p(t, a(t)) &= p_{\text{ж}} + E'a, \\ q_a(t) &= -\frac{k}{\mu} p_x(t, a(t)), \end{aligned}$$

где  $E' = E(1 - \nu^2)^{-1}$ ;  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $p_{\text{ж}}$  — давление жидкости в неподвижной трещине. Величина  $E'a$  — давление упругой силы скелета по закону Гука [5]. Расход жидкости  $q_a$  вычисляется по закону Дарси.

Сделаем замену, убирающую эмпирические постоянные и линеаризующую уравнение

$$\sigma p = \ln u - f(\tau), \quad \varkappa t = \tau.$$

Основное уравнение примет вид:

$$u_\tau = u_{xx} + f'(u). \quad (6)$$

Начальное условие записывается в виде:

$$\ln u|_{\tau=0} = f(0) + \sigma p_0(x) \Rightarrow$$

$$u(0, x) = \exp(f(0) - \sigma p_0(x)) = u_0(x). \quad (7)$$

При  $x \rightarrow \infty$  краевое условие имеет вид:

$$u(\tau, \infty) = 1, \quad (8)$$

если выбрать  $f = -p_\infty \sigma$ . При этом последнее слагаемое в (6) равно нулю.

Условия на подвижной границе

$$x = a\left(\frac{\tau}{\varkappa}\right) = \bar{a}(\tau)$$

принимают вид:

$$u = e^{\sigma E' \tilde{a}} u_a(\tau), \quad u_a(\tau) = \exp(\sigma(p_{\text{ж}} - p_{\infty})), \quad (9)$$

$$q_a \left( \frac{\tau}{x} \right) = -\frac{k}{\mu \sigma} \frac{u_x}{u} \Rightarrow$$

$$u_x = -e^{\sigma E' \tilde{a}} q_a \frac{\mu \sigma}{k} = -e^{\sigma E' \tilde{a}} u_a \tilde{q}_a. \quad (10)$$

Граничные условия определяются функциями  $\tilde{a}$ ,  $u_a$ ,  $\tilde{q}_a$ . Следует отметить, что решение краевой задачи существует не для всяких граничных условий. Соотношения между граничными функциями, дающие решение краевой задачи (6)–(10), определяют приближенные модели основной сложной задачи движения трещины.

Далее рассмотрим возможные инвариантные решения краевой задачи [6].

#### 4. Инвариантное решение краевой задачи

Однородное уравнение теплопроводности (6) допускает бесконечномерную алгебру Ли операторов дифференцирования первого порядка с базисом, продолженным на производные  $u_x$  [6]:

$$\langle f \rangle = f \partial_u + f_x \partial_{u_x}, \quad f_\tau = f_{xx};$$

$$X_1 = \partial_\tau, \quad X_2 = \partial_x,$$

$$X_3 = 2\tau \partial_\tau + x \partial_x - \frac{1}{2} u \partial_u - \frac{3}{2} u_x \partial_{u_x},$$

$$X_4 = 2\tau \partial_x - x u \partial_u - (u + x u_x) \partial_{u_x},$$

$$X_5 = 4\tau^2 \partial_\tau + 4x\tau \partial_x - (x^2 + 2\tau) u \partial_u - \\ - (2xu + (x^2 + 6\tau) u_x) \partial_{u_x},$$

$$X_6 = u \partial_u + u_x \partial_{u_x}.$$

Произвольный оператор алгебры есть линейная комбинация базисных:

$$Y = \langle f \rangle + \sum_{i=1}^6 x^i X_i.$$

Произвольные элементы  $f$ ,  $x^i$  определим из условия инвариантности начальных и краевых условий:

$$YF|_{F=0} = 0.$$

Для начальных условий  $\tau = 0$ ,  $u = u_0(x)$  запишем условие инвариантности. Из первого уравнения следует  $x^1 = 0$ . Для второго уравнения из условия  $Y(u - u_0(x)) = 0$ ,  $u = u_0(x)$  следует

$$f = u_0(x) \left( \frac{1}{2} x^3 + (x)x^4 + ((x)^2 + 2\tau) x^5 - x^6 \right) + \\ + u_0' \left( x^2 + (x)x^3 + 2\tau \left( x^4 + 2(x)x^5 \right) \right).$$

Функция  $f$  удовлетворяет уравнению (6), из которого следует равенство

$$u_0'' \left( \frac{5}{2} x^3 + (x)x^4 + ((x)^2 + 10\tau) x^5 - x^6 \right) + \\ + u_0''' \left( x^2 + (x)x^3 + 2\tau \left( x^4 + 2(x)x^5 \right) \right) = 0.$$

При  $\tau = 0$  получим условие инвариантности начальных данных

$$x^1 = 0, \quad u_0'' \left( \frac{5}{2} x^3 + (x)x^4 + (x)^2 x^5 - x^6 \right) + \\ + u_0''' \left( x^2 + (x)x^3 \right) = 0. \quad (11)$$

Для краевого условия на бесконечности условие инвариантности принимает вид:

$$f = \frac{1}{2} x^3 + (x)x^4 + ((x)^2 + 2\tau) x^5 - x^6,$$

$f$  удовлетворяет уравнению (6) и должно быть конечным при  $x \rightarrow \infty$ , поэтому

$$x^4 = x^5 = 0, \quad f = \frac{1}{2} x^3 - x^6. \quad (12)$$

Условие инвариантности для краевого условия на подвижной границе запишем при  $x^1 = x^4 = x^5 = 0$ .

Для условия  $x = \tilde{a}(\tau)$  получим

$$2\tilde{a}' \tau x^3 = x^2 + \tilde{a} x^3. \quad (13)$$

Для уравнения (9) в силу (12) определяем

$$f = \frac{1}{2} x^3 - x^6 = u_a \left( \frac{1}{2} x^3 - x^6 \right) e^{\sigma E' \tilde{a}} + \\ + 2\tau x^3 \left( u_a' + \sigma u_a E' \tilde{a}' \right) e^{\sigma E' \tilde{a}}. \quad (14)$$

Для уравнения (10) следует

$$\left( \frac{3}{2} x^3 - x^6 \right) e^{\sigma E' \tilde{a}} \tilde{q}_a u_a + 2\tau x^3 \left( e^{\sigma E' \tilde{a}} \tilde{q}_a u_a \right)' = 0. \quad (15)$$

Для инвариантности краевой задачи получены однородные относительно величин  $x^2$ ,  $x^3$ ,  $x^6$  уравнения (11)–(15) для функций  $u_0$ ,  $\tilde{a}$ ,  $u_a$ ,  $\tilde{q}_a$ .

Положим  $x^2 = \alpha x^3$ ,  $x^6 = \beta x^3$  и проинтегрируем уравнения.

Из (13) следует

$$2\tau \tilde{a}' = \tilde{a} + \alpha \Rightarrow \tilde{a} = -\alpha + A\tau^{\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

Из (15) следует

$$e^{\sigma E' \tilde{a}} \tilde{q}_a u_a = Q\tau^{\frac{1}{2}(\beta - \frac{3}{2})} = Q \left( \frac{\tilde{a} + \alpha}{A} \right)^{\beta - \frac{3}{2}}. \quad (17)$$

Из (14) следует

$$u_a e^{\sigma E' \tilde{a}} = 1 + U \tau^{\frac{1}{2}(\beta-1)} = 1 + U \left( \frac{\tilde{a} + \alpha}{A} \right)^{\beta-\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

Из (11) следует:

при  $\beta \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

$$u_0 = \frac{C}{(\beta - \frac{3}{2})(\beta - \frac{1}{2})} |x + \alpha|^{\beta-\frac{1}{2}} + C_1 x + C_0, \quad (19)$$

при  $\beta = \frac{1}{2}$

$$u_0 = -C \ln |x + \alpha| + C_1 x + C_0, \quad (20)$$

при  $\beta = \frac{3}{2}$

$$u_0 = C(x + \alpha) \ln |x + \alpha| + C_1 x + C_0. \quad (21)$$

Постоянная  $\beta$  задает автомоделный закон фильтрации. Постоянная  $\alpha$  задает начальное раскрытие трещины.

Из (17) и (18) следует соотношение, не содержащее  $\beta$ :

$$\tilde{q}_a u_a (\tilde{a} + \alpha) = \frac{AQ}{U} (u_a - e^{-\sigma E' \tilde{a}}),$$

которое задает связь между раскрытием трещины, давлением и расходом на границе трещины.

Искомый оператор, относительно которого краевая задача инвариантна, имеет вид:

$$Y = \left( \beta - \frac{1}{2} \right) (u - 1) \partial_u + 2\tau \partial_\tau + (x + \alpha) \partial_x.$$

Представление инвариантного решения записывается через инварианты оператора  $Y$ , которые удовлетворяют уравнению

$$YF = 0.$$

Функционально независимые инварианты удобно выбрать в виде:

$$I = (x + \alpha) \tau^{-\frac{1}{2}}, \quad u_1 = (u - 1) \tau^{-\frac{1}{2}(\beta-\frac{1}{2})}. \quad (22)$$

Представление инвариантного решения однородного уравнения (6) задается зависимостью  $u_1(I)$ :

$$u = 1 + u_1(I) \tau^{\frac{1}{2}(\beta-\frac{1}{2})}, \quad (23)$$

которая в литературе называется автомоделным решением [3].

Из (6) следует обыкновенное дифференциальное уравнение гипергеометрического типа:

$$u_1'' + \frac{1}{2} I u_1' - \frac{1}{2} \left( \beta - \frac{1}{2} \right) u_1 = 0. \quad (24)$$

Запишем инвариантные краевые условия через инварианты.

При  $x \rightarrow \infty$  из (22), (8) и (23) следует

$$I \rightarrow \infty, \quad u_1 = 0. \quad (25)$$

На подвижной границе

$$x + \alpha = A \tau^{\frac{1}{2}} = A(x + \alpha) I^{-1} \Rightarrow I = A$$

выполняются условия (9) и (10), которые в силу (17), (18), (23) принимают вид:

$$u_1 = U, \quad u_1' = -Q, \quad I = A. \quad (26)$$

Начальные условия при  $\tau = 0$  или  $I \rightarrow \infty$  при  $\beta \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$  имеют вид:

$$\frac{C}{(\beta - \frac{3}{2})(\beta - \frac{1}{2})} |x + \alpha|^{\beta-\frac{1}{2}} + C_1 x + C_0 = 1 + u_1 \tau^{\frac{1}{2}(\beta-\frac{1}{2})} \\ \Rightarrow C_1 = 0, \quad C_0 = 1, \quad u_1 = \frac{C}{(\beta - \frac{3}{2})(\beta - \frac{1}{2})} I^{\beta-\frac{1}{2}}.$$

Условия (25) выполняются при  $\beta < \frac{1}{2}$ . В противном случае  $= 0$ .

При  $\beta = \frac{1}{2}$  по формуле (20) имеем

$$-C \ln |x + \alpha| + C_1 x + C_0 = 1 + u_1 \Rightarrow \\ C_1 = C = 0, \quad C_0 = 1.$$

При  $\beta = \frac{3}{2}$  по формуле (21) получим точно такой же результат, как и при  $\beta = \frac{1}{2}$ .

### 5. Исследование автомоделной краевой задачи

Сделаем замену переменных

$$\frac{1}{2} I = z, \quad \frac{u_1}{U} = w.$$

Краевая задача (24), (25), (26) сводится к гипергеометрическому уравнению Вебера [7]

$$w_{zz} + 2z w_z + \lambda w = 0, \quad \lambda = 1 - 2\beta; \quad (27)$$

при  $z \rightarrow \infty, w = 0$ ;

при  $z = \frac{1}{2}A = z_0, w = 1, w' = -\frac{2Q}{U} = -Q_0$ .

Уравнение Вебера сводится к уравнению Шреденгера

$$\tilde{w}'' - q(z)\tilde{w} = 0, \quad q(z) = z^2 + 1 - \lambda = z^2 + 2\beta \quad (28)$$

заменой

$$w = \tilde{w}e^{-\frac{1}{2}z^2}.$$

Самосопряженный вид уравнения Вебера следующий:

$$\left(e^{z^2}w'\right)' = -\lambda e^{z^2}w. \quad (29)$$

В [7] доказано утверждение для уравнения Шреденгера: если

$$q(z) > 0, \quad \int q^{\frac{1}{2}}(t)dt = \infty, \quad \int \left| \frac{5q'^2}{16q^3} - \frac{q''}{4q^2} \right| q^{\frac{1}{2}}(t)dt < \infty,$$

то пара решений уравнения (28) имеет при  $z \rightarrow \infty$  следующую асимптотику

$$q^{\frac{1}{4}}w \sim \exp \left[ \pm \int^z q^{\frac{1}{2}}(s)ds \right],$$

которую можно дифференцировать.

Проверим условия утверждения

$$\int q^{1/2}dt \sim \int t dt = \infty, \\ \int \left| \frac{5q'^2}{16q^3} - \frac{q''}{4q^2} \right| q^{\frac{1}{2}}dt \sim \frac{3}{4} \int t^{-4}dt < \infty.$$

В нашем случае

$$\int_{z_0}^z (t^2 + 2\beta)^{\frac{1}{2}} dt = \\ = \frac{1}{2}t (t^2 + 2\beta)^{\frac{1}{2}} + \beta \ln \left| t + (t^2 + 2\beta)^{\frac{1}{2}} \right| \Big|_{z_0}^z.$$

Следовательно, убывающее решение имеет асимптотику

$$z^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{\beta}{2z^2} \right) \tilde{w} \sim \\ \sim C \left| z + (z^2 + 2\beta)^{\frac{1}{2}} \right|^{-\beta} \exp \left[ -\frac{1}{2}z^2 \left( 1 + \frac{\beta}{z^2} \right) \right] \\ \Rightarrow \tilde{w} \sim \tilde{C} z^{-\beta - \frac{1}{2}} e^{-\frac{z^2}{2}} \Rightarrow w \sim C z^{-\beta - \frac{1}{2}} e^{-z^2}, \\ w' \sim C \left( \beta + \frac{1}{2} + 2z^2 \right) z^{-\beta - \frac{3}{2}} e^{-z^2}.$$

Если предположить, что асимптотическое поведение имеет место всюду в области фильтрации, то из краевых условий (27) следует:

$$C z_0^{-\beta - \frac{1}{2}} e^{-z_0^2} = 1, \quad Q_0 = C \left( \beta + \frac{1}{2} + 2z_0^2 \right) z_0^{-\beta - \frac{3}{2}} e^{-z_0^2} \\ \Rightarrow Q_0 = z_0^{-1} \left( \beta + \frac{1}{2} + 2z_0^2 \right). \quad (30)$$

Формула (30) определяет закон автомодельной фильтрации  $\beta$  в зависимости от постоянных  $z_0, Q_0$  из автомодельных краевых условий.

Дифференцирование  $D = \frac{d}{dz}$  уравнения Вебера (27) лишь изменяет постоянную  $\lambda$

$$(D^n w)'' + 2z(D^n w)' = -(\lambda + 2n)D^n w.$$

Если  $\lambda = -2n$ , то  $D^n w = \int_z^\infty e^{-t^2} dt \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ . В этом случае решение исходного уравнения с условием на бесконечности имеет вид:

$$w_n = D^{-n} \int_z^\infty e^{-t^2} dt, \quad D^{-1}w = - \int_z^\infty w(t)dt.$$

С помощью самосопряженного уравнения Вебера (29) найдены решения при  $\lambda = -2n$  [7]:

$$w_n = e^{-z^2} (e^{z^2} D^n w)^{(n)}, \quad (31)$$

$$(D^n w)'' + 2z(D^n w)' = 0.$$

Если  $D^n w$  — постоянная, то получаются полиномы Вебера:

$$v_n = e^{-z^2} (e^{z^2})^{(n)}, \quad (32)$$

$$v_0 = 1, v_1 = 2z, v_2 = 2 + (2z)^2, v_3 = 2z(6 + (2z)^2), \dots$$

Предположим, что

$$s = (2z)^2, \quad v_{2k+1} = 2zS_k(s), \quad v_{2k} = Q_k(s),$$

где  $S_k, Q_k$  — полиномы степени  $k$ ,

$$Q_0 = 1, \quad S_0 = 1, \quad Q_1 = s + 2, \quad S_1 = s + 6, \dots$$

Из формул (32) следуют рекуррентные соотношения:

$$v_{2k+1} = 2z(Q_k + 4Q_k') \Rightarrow S_k = Q_k + 4Q_k', \\ v_{2(k+1)} = (s+2)S_k + 4sS_k' \Rightarrow \\ Q_{k+1} = (s+2)S_k + 4sS_k',$$

которые показывают справедливость индуктивно-го предположения. Можно вывести рекуррентные соотношения для каждой серии полиномов:

$$S_{k+1} = (s + 6)S_k + 8(s + 3)S'_k + 16sS''_k,$$

$$Q_{k+1} = (s + 2)Q_k + 8(s + 1)Q'_k + 16sQ''_k.$$

Все коэффициенты полиномов  $S_k, Q_k$  положительны, значит, они не имеют действительных корней при  $s > 0$ . Полиномы  $v_{2k+1}$  имеют корень равный нулю. При  $z \rightarrow \infty$  полиномы Вебера (32) неограниченно растут.

Не являющиеся постоянными решения уравнений (31) с краевыми условиями на бесконечности имеют при  $z \rightarrow 0$  вид:

$$D^n w = \int_z^\infty e^{-t^2} dt \Rightarrow w_n = D^{-n} \int_z^\infty e^{-t^2} dt \rightarrow 0.$$

Отсюда следует, что  $w_n$  не имеет нулей при  $z > 0$ :

$$w_0 = \int_z^\infty e^{-t^2} dt, \quad w_1 = \int_z^\infty ds \int_s^\infty e^{-t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{2} (w''_1 + 2w'_1) = \frac{1}{2} (-e^{-z^2} + 2zw_0),$$

$$w_2 = \frac{1}{4} (w''_2 + 2zw'_2) = \frac{1}{4} (w_0 + 2zw_1) =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{1}{2} (-2ze^{-t^2} + (s + 2)w_0),$$

$$w_3 = \frac{1}{6} (w''_3 + 2zw'_3) = \frac{1}{6} (w_1 + 2zw_2) =$$

$$= \frac{1}{6} \frac{1}{4} \frac{1}{2} (-(s + 4)e^{-t^2} + 2z(s + 6)w_0),$$

$$w_4 = \frac{1}{8} \frac{1}{6} \frac{1}{4} \frac{1}{2} (-2z(s + 10)e^{-z^2} + (s^2 + 12s + 12)w_0), \dots$$

Предположение индукции

$$w_{2k} = \frac{1}{2^{2k}} \frac{1}{(2k)!} (-2zP_{k-1}(s)e^{-z^2} + Q_k(s)w_0),$$

$$w_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1}} \frac{1}{(2k+1)!} (-R_k(s)e^{-z^2} + 2zS_k(s)w_0),$$

где  $P_k, Q_k, R_k, S_k$  – полиномы степени  $k$ .

Докажем предположение индукции

$$2(2k + 1)w_{2k+1} = 2zw_{2k} + w_{2k-1} \Rightarrow$$

$$w_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1}} \frac{1}{(2k+1)!} [-sP_{k-1}e^{-z^2} + 2zQ_kw_0 +$$

$$+ 2(2k) (-R_{k-1}e^{-z^2} + 2zS_{k-1}w_0)],$$

$$2(2k)w_{2k} = 2zw_{2k-1} + w_{2k-2} \Rightarrow$$

$$w_{2k} = \frac{1}{2^{2k}} \frac{1}{(2k)!} [-2zR_{k-1}e^{-z^2} + sS_{k-1}w_0 +$$

$$+ 2(2k - 1) (-2zP_{k-2}e^{-z^2} + Q_{k-1}w_0)].$$

Отсюда следуют рекуррентные соотношения для полиномов:

$$R_k = sP_{k-1} + 4kR_{k-1},$$

$$S_k = Q_k + 4kS_{k-1},$$

$$P_{k-1} = R_{k-1} + 2(2k - 1)P_{k-2},$$

$$Q_k = sS_{k-1} + 2(2k - 1)Q_{k-1},$$

с начальными полиномами:

$$P_{-1} = 0, \quad Q_0 = 1, \quad R_0 = 1, \quad S_0 = 1, \quad P_0 = 1,$$

$$Q_1 = s + 2, \quad R_1 = s + 4, \quad S_1 = s + 6, \quad P_1 = s + 10.$$

Рекуррентные равенства для каждой серии полиномов:

$$P_k = (s + 8k + 2)P_{k-1} - 8k(2k - 1)P_{k-2},$$

$$Q_{k+1} = (s + 8k + 2)Q_k - 8k(2k - 1)Q_{k-1},$$

$$R_k = (s + 8k - 2)R_{k-1} - 8(k - 1)(2k - 1)R_{k-2},$$

$$S_k = (s + 8k - 2)S_{k-1} - 8(k - 1)(2k - 1)S_{k-2}.$$

Полиномы  $R_k$  и  $S_k, P_k$  и  $Q_{k+1}$  имеют одинаковые рекуррентные соотношения, но разные начальные полиномы. Полиномы  $Q_k, S_k$  совпадают с полиномами Вебера:

$$Q_2 = s^2 + 12s + 12, \quad S_2 = s^2 + 20s + 60,$$

$$P_2 = s^2 + 28s + 132, \quad R_2 = s^2 + 18s + 32, \dots$$

Интегрирование

$$D^{-1}w = - \int_z^\infty w(t)dt \quad (DD^{-1}w = w)$$

уравнения Вебера (27) лишь изменяет постоянную  $\lambda$

$$(D^{-n}w)'' + 2z(D^{-n}w)' = -(\lambda - 2n)D^{-n}w.$$

Если  $\lambda = 2n$ , то  $D^{-n}w = w_0$ . В этом случае решение исходного уравнения с условием на бесконечности имеет вид:

$$w_{-n} = (-1)^n D^n w_0 = e^{-z^2} F_{n-1}(z) \rightarrow 0 \quad (33)$$

при  $z \rightarrow \infty$ , где  $F_k(z)$  – полином степени  $k$ ;

$$w_{-1} = e^{-z^2}, \quad w_{-2} = 2ze^{-z^2},$$

$$w_{-3} = (s - 2)e^{-z^2}, \quad w_{-4} = 2z(s - 6)e^{-z^2}, \dots$$

Предположение индукции

$$F_{2k+1} = 2zS_k(s), \quad F_{2k} = R_k(s), \quad s = (2z)^2,$$

где  $S_k, R_k$  — полиномы степени  $k$ .

Из формулы (33) следует

$$\begin{aligned} 2zS_k e^{-z^2} &= -D \left( e^{-z^2} R_k \right) = 2ze^{-z^2} (R_k - 4R_k'), \\ R_{k+1} e^{-z^2} &= -D \left( 2ze^{-z^2} S_k \right) = \\ &= e^{-z^2} \left( (s-2)S_k - 4sS_k' \right). \end{aligned}$$

Отсюда следуют рекуррентные соотношения для полиномов:

$$S_k = R_k - 4R_k', \quad R_{k+1} = (s-2)S_k - 4sS_k'$$

с начальными полиномами:

$$R_0 = 1, \quad S_0 = 1, \quad R_1 = s-2, \quad S_1 = s-6.$$

Можно вывести рекуррентные соотношения для каждой серии полиномов:

$$\begin{aligned} R_{k+1} &= (s-2)R_k - 8(s-1)R_k' + 16sR_k'', \\ S_{k+1} &= (s-6)S_k - 8(s-3)S_k' + 16sS_k'', \\ R_2 &= s^2 - 12s + 12, \\ S_2 &= s^2 - 20s + 60, \\ R_3 &= s^3 - 42s^2 + 420s - 840, \\ S_3 &= s^3 - 30s^2 + 180s - 120, \dots \end{aligned}$$

Полиномы  $S_k, R_k$  имеют чередующиеся по знаку коэффициенты, поэтому имеют  $k$  положительных корней. Коэффициент при старшей степени равен 1. Минимальный корень  $s_*$  уменьшается с ростом  $k$  как для четных, так и для нечетных номеров полиномов. Между соседними корнями  $S_k$  есть корень  $R_k$  [7]. При  $n \geq 3$  решение  $w_{-n}$  имеет колебательный характер с конечным числом нулей.

Решения имеют физический смысл до наименьшего корня. В точке корня  $u = 1$  и давление равно пластовому, т.е. корень задает фронт волны фильтрации. Появление фронта — следствие нелинейности уравнения пьезопроводности (4).

## 6. Приближение с нецелым $\lambda$

Рассмотрим уравнение Вебера (27) с нецелым отрицательным  $\lambda$

$$-2(n+1) < \lambda < -2n \quad \Rightarrow \quad 0 < -\frac{\lambda}{2} - n = \epsilon < 1$$

Разложим решение в асимптотический ряд по степеням  $\epsilon$

$$w = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots$$

с краевыми условиями:

$$\begin{aligned} u_0|_{z=z_0} &= 1, \quad u_0|_{z \rightarrow \infty} = 0; \\ u_j|_{z=z_0} &= u_j|_{z \rightarrow \infty} = 0, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

В нулевом приближении получим уравнение Вебера (27) с целым  $\lambda = -2n$ . Решение краевой задачи определяется с помощью функций (31)

$$u_0 = \frac{w_n(z)}{w_n(z_0)}.$$

Для первого приближения получим неоднородное уравнение Вебера

$$u_1'' + 2zu_1' = 2nu_1 + 2u_0, \quad u_1|_{z=z_0} = u_1|_{z \rightarrow \infty} = 0.$$

Решение определяется с помощью функции Грина  $G(z, s)$

$$u_1 = 2 \int_{z_0}^{\infty} G(z, s) u_0(s) ds.$$

Функция Грина строится с помощью фундаментальной системы решений самосопряженного однородного уравнения [7]:

$$\left( e^{z^2} u' \right)' = 2ne^{z^2} u,$$

$$G(z, s) = \begin{cases} C_1 u_1(z) & z_0 \leq z \leq s \\ C_2 u_2(z) & s \leq z < \infty \end{cases}$$

$$C_1 u_1(s) = C_2 u_2(s), \quad C_2 u_2' - C_1 u_1' = e^{-s^2}. \quad (34)$$

Функционально независимые решения  $u_1, u_2$  удовлетворяют первому и второму краевому условию соответственно.

В качестве фундаментальной системы решений выберем решение  $w_n$  (31) и полином Вебера  $v_n$  (32). Тогда

$$u_2(z) = w_n(z) \rightarrow 0 \quad z \rightarrow \infty,$$

$$u_1(z) = w_n(z)v_n(z_0) - w_n(z_0)v_n(z)$$

и определитель Вронского равен

$$W(s) = u_1 u_2' - u_2 u_1' = w_n(z_0) \left( w_n v_n' - v_n w_n' \right).$$

Определяя постоянные из равенств (34), получим функцию Грина

$$G(z, s) = \begin{cases} e^{-s^2} W^{-1}(s) w_n(s) (w_n(z) v_n(z_0) - w_n(z_0) v_n(z)) & \text{при } z_0 \leq z \leq s \\ e^{-s^2} W^{-1}(s) w_n(z) (w_n(s) v_n(z_0) - w_n(z_0) v_n(s)) & \text{при } s \leq z < \infty \end{cases}$$

Аналогично определяются следующие приближения.

Второе краевое условие на границе по первому приближению принимает вид:

$$-Q_0 \approx \frac{w'_n(z_0)}{w_n(z_0)} + \epsilon u'_1(z_0) \Rightarrow Q_0 \approx -\frac{w'_n(z_0)}{w_n(z_0)} + (\lambda + 2n) \int_{z_0}^{\infty} G(z_0, s) \frac{w_n(s)}{w_n(z_0)} ds.$$

Последнее равенство определяет закон фильтрации  $\beta = \frac{1}{2}(1 - \lambda)$  по краевым условиям  $z_0$  и  $Q_0$ .

## 7. Заключение

Выведено нелинейное уравнение упругой фильтрации, которое линеаризуется точечной заменой. В одномерном случае поставлена краевая

задача упругой фильтрации через подвижную границу. Выведена инвариантная подмодель автотомодельной фильтрации через подвижную границу и определена зависимость между краевыми данными для любого автотомодельного режима фильтрации. Асимптотики инвариантной подмодели определяют связь между постоянными автотомодельных краевых условий.

## Список литературы

- [1] Есипов Д.В., Куранаков Д.С., Лапин В.Н., Чёрный С.Г. Математические модели гидроразрыва пласта // Вычислительные технологии. 2014. Т. 19, № 2. С. 33–61. (<http://www.ict.nsc.ru/jct/annotation/1589>)
- [2] Carter R.D. Appendix I. Derivation of the general equation for estimating the extent of the fractured area // *Drilling and Production Practice* / Eds. G.C. Howard, C.R. Fast. N.Y.: Amer. Petrol. Inst. 1957. P. 261–270.
- [3] Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
- [4] Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика: Учебник для вузов. М.: Недра, 1993. 416 с.
- [5] Nordgren R.P. Propagation of a vertical hydraulic fracture // *Soc. Petrol. Eng. J.* 1972. 12. Pp. 306–314. (DOI: 10.2118/3009-PA)
- [6] Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В. Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды: монография. Новосибирск.: Изд-во НГТУ, 2012. 659 с.
- [7] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.



## Self-similar elastic regime of filtration through moving boundary

**Khabirov S.V., Khabirov S.S.**

Mavlutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa

The one-dimensional problem of elastic filtration of fluid through moving boundary is considered. The boundary conditions for invariant problem is introduced. The problem is reduced to overdetermine boundary problem for Veber equation. The exact solutions are obtained. For arbitrary invariant filtration law the relationship between overdetermine invariant boundary conditions is obtained.

**Keywords:** elastic filtration, moving boundary, invariant solutions, Veber equation, boundary problem, asymptotics of solutions

# Содержание

<b>Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Даринцев О.В.</b> Изучение течения жидкости через деформируемый пьезоэлементом канал.....	1–10
<b>Аганин А.А., Давлетшин А.И., Халитова Т.Ф.</b> Численное моделирование динамики пузырьков в центральной области стримера .....	11–22
<b>Топорков Д.Ю.</b> Коллапс слабонесферического кавитационного пузырька в ацетоне и тетрадекане .....	23–28
<b>Ронжин Р.П., Михайленко К.И.</b> О зависимости производства холодного воздуха от размера площади горячего выхода вихревой трубы .....	29–35
<b>Криони И.Н., Семёнова А.В., Киреев В.Н.</b> Алгоритм определения минимального тягового усилия при протаскивании трубопровода ...	36–41
<b>Семёнова А.В., Криони И.Н.</b> Определение допустимого максимального размера препятствия при протаскивании трубопровода .....	42–46
<b>Филиппов А.А.</b> Вдавливание цилиндрической оболочки в упругопластическое полупространство.....	47–51
<b>Борисоглебский И.К., Метусова М.В., Михайленко К.И.</b> Зависимость эффекта Ранка–Хилша от геометрии холодного выхода .....	52–58
<b>Сираева Д.Т.</b> Редукция частично инвариантных подмоделей ранга 3 дефекта 1 к инвариантным подмоделям .....	59–63
<b>Хабиров С.В., Хабиров С.С.</b> Автомодельный упругий режим фильтрации через подвижную границу .....	64–72