



ISSN: 2658–5782

Номер 4

Октябрь–Декабрь 2018

# МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

[mfs.uimech.org](http://mfs.uimech.org)





## Исследование динамики формирования полой струи при истечении пара из сверхкритического состояния<sup>1</sup>

Болотнова Р.Х.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Изучены особенности нестационарного процесса образования полости внутри струи при внезапном истечении водяного пара через тонкое сопло из сосуда высокого давления, изначально находящегося в сверхкритическом состоянии. Численное исследование проведено с применением решателя `sonicFoam` библиотеки `OpenFOAM` с уравнением состояния Пенга–Робинсона в двумерном осесимметричном приближении. Визуализация полученных решений представлена в виде кинограмм динамики полей скоростей и температур. Показано, что режим формирования и сохранения полости внутри струи поддерживается более 100 мкс от начала процесса истечения.

**Ключевые слова:** численное исследование, решатель `sonicFoam` пакета `OpenFOAM`, камера высокого давления, тонкое сопло, сверхкритическое состояние водяного пара

### 1. Введение

Безопасность объектов современного энергооборудования, включающего в качестве рабочих жидкостей паро-газожидкостные среды, эксплуатация которых происходит в условиях высоких давлений и температур, связана с задачами исследования динамики струй, возникающих в процессе разгерметизации теплоносителя. Исследование особенностей пространственного нестационарного процесса формирования сверхзвуковых струйных течений, происходящих через сопло из сосуда, в котором исследуемый флюид находится в сверхкритическом состоянии, является весьма актуальным научным направлением.

Критические режимы истечения пароводяной смеси изучались в работах [1–5]. Эволюция сверхзвуковых режимов в холодных газовых струях с формированием дисков Маха и образованием вихревых колец исследовалась в [1]. В работе [2] при проведении экспериментальных исследований струй перегретой воды, формирующихся при

истечении из камеры высокого давления через тонкие цилиндрические каналы, было установлено, что форма струи перегретой воды при повышении исходной температуры насыщения приобретает вид полого конуса с растущим углом раствора при вершине до ее полного «развала». В [3] показано, что с повышением начальной температуры насыщения происходит изменение конической формы струи с ее закручиванием навстречу движению потока.

В работе [4] с использованием кинетики испарения [5] исследовано влияние исходного равновесного состояния воды в камере высокого давления и интенсивности зародышеобразования при вскипании воды на формирование пароводяной струи на начальной стадии истечения для диаметра сопла ( $d = 0,5$  мм) в соответствии с условиями экспериментов [2].

В настоящей работе, являющейся продолжением исследований [6–8], изучается процесс истечения водяного пара, изначально находящегося в сверхкритическом состоянии в сосуде высокого давления, через тонкое сопло с формированием полости в центре струи с использованием решателя `sonicFoam` библиотеки открытого пакета `OpenFOAM` [9] с уравнением состояния водяного

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-41-020582-р\_а) и средствами государственного бюджета по госзаданию 0246-2018-0002.

пара Пенга–Робинсона [10], для более длительного по сравнению с [8], временного интервала в исследуемом процессе эволюции струи.

## 2. Основные уравнения и метод численного решения

При моделировании процесса формирования струи предполагалось, что в начальный момент времени в результате разрыва заслонки начнется истечение пара в окружающую среду с параметрами состояния, соответствующими начальным условиям. Процесс истечения происходит через тонкое сопло радиуса  $r = 0,25$  мм [2] и длины  $x_1 = 2$  мм из цилиндрического сосуда, в котором изначально водный флюид находился в сверхкритическом состоянии при давлении  $p_0 = 22,73$  МПа и температуре  $T_0 = 1273$  К. Рассматриваемая задача ограничивалась рамками однофазного приближения без учета возможности конденсации пара в процессе истечения, что обеспечивалось заданием соответствующих начальных условий закрытого состояния в сосуде высокого давления по аналогии с [8].

Для решения поставленной задачи используется следующая система дифференциальных уравнений газовой динамики для вязкого нетеплопроводного газа:

– уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

– уравнения Навье–Стокса с учетом сжимаемости

$$\rho \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \left( \zeta + \frac{\mu}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \vec{v},$$

– уравнения сохранения внутренней энергии

$$\rho \frac{de}{dt} + p \operatorname{div} \vec{v} + \frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \vec{v})^2 - 2\mu e^{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 0,$$

здесь

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3},$$

$x_1, x_2, x_3$  — эйлеровы координаты;  $t$  — время;  $\rho, p, T$  — плотность, давление и температура соответственно;  $\vec{v}$  — вектор скорости с проекциями  $v_1, v_2, v_3$  на соответствующие оси;  $e^{ij}$  — тензор скоростей деформаций;  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости;  $\zeta$  — объемная вязкость.

Термодинамические свойства водяного пара описываются уравнением состояния Пенга–Робинсона [10]:

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a(T)}{V_m(V_m + b) + b(V_m - b)},$$

Здесь:

$$a = 0.45724 \frac{\sqrt{RT_c}}{p_c} + \alpha(T_r, \omega); \quad b = 0.0778 \frac{RT_c}{p_c};$$

$$\rho = \frac{p}{Z(p, T)RT}; \quad T_r = \frac{T}{T_c}; \quad \alpha = (1 + \kappa(1 - T_r^{0.5}));$$

$$\kappa = 0.37464 + 1.54226\omega - 0.26992\omega^2;$$

$R$  — универсальная газовая постоянная;  $V_m$  — молярный объем;  $T_c$  и  $p_c$  — критические температура и давление;  $\omega$  — ацентрический фактор Питцера;  $Z(p, T)$  — коэффициент сжимаемости.

Для решения поставленной задачи использовался решатель sonicFoam библиотеки открытого пакета OpenFOAM, построенный на неявном алгоритме PISO, вычисляющем давление с двухшаговым корректором. Устойчивость решения при интегрировании по времени определялась условием Куранта. В соответствии с математической постановкой задачи проведено формирование расчетной сеточной области в декартовой системе координат и заданы начальные и граничные условия задачи с помощью утилит blockMesh, setFieldsDict и blockMeshDict. В оригинальном коде решателя sonicFoam для вычисления давления и внутренней энергии в файл thermophysicalProperties были внесены изменения, обеспечивающие подключение уравнения состояния водяного пара Пенга–Робинсона. При вычислении внутренней энергии водяного пара с привлечением термодинамических соотношений используется температурная зависимость для изобарной теплоемкости  $p$  и вязкости  $\mu$  в виде полиномов JANAF [9].

Оценка достоверности полученных решений для рассматриваемой задачи сделана в работе [8], в которой для начальной стадии формирования струи проведено сравнение результатов расчетов, полученных по динамике волны разгрузки, распространяющейся в области высокого давления, применением пакета OpenFOAM с уравнением состояния Пенга–Робинсона, и численным решением аналогичной задачи методом сквозного счета в случае одномерного плоского приближения с уравнением состояния совершенного газа.

## 3. Обсуждение результатов

На рис. 1 и 2 представлены результаты расчетов исследуемого режима формирования струи в виде динамики полей скоростей и температур. Как показано на рисунках, начиная с момента времени 10 мкс по невозмущенной области распространяется первая радиальная волна сжатия, за которой следует паровой поток, истекающий из сопла. Как и

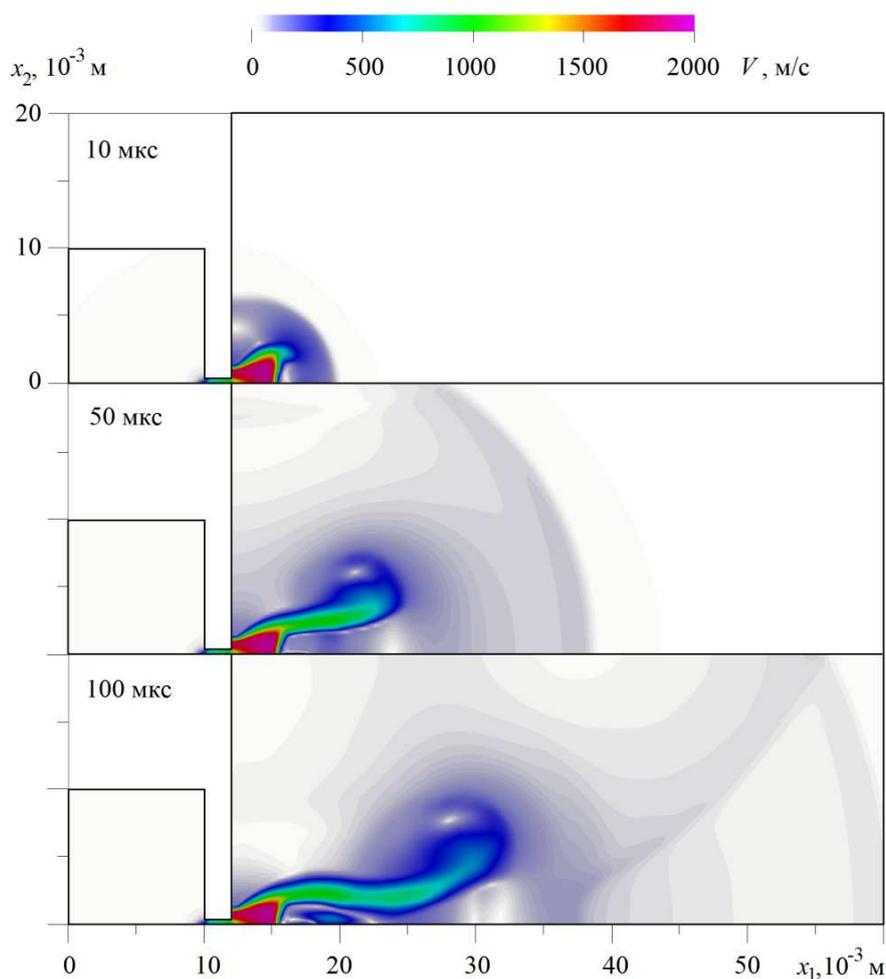


Рис. 1. Эволюция расчетного распределения скоростей в процессе истечения водяного пара через тонкое сопло из камеры высокого давления, изначально находящегося в сверхкритическом состоянии

в эксперименте [2], в расчетах наблюдается интенсивное расширение струи со сверхзвуковыми скоростями истечения, достигающими 2000 м/с близ границы со слабовозмущенной зоной на оси симметрии. Вдоль внешней границы расширяющейся сверхзвуковой струи формируется висячий скачок уплотнения, при отражении которого от оси симметрии образуется прямой скачок уплотнения — диск Маха: граница между зонами сверхзвукового и дозвукового течений (рис. 1). Вдоль боковой границы струи формируется основной поток газа, который характеризуется также сверхзвуковым режимом истечения со скоростями и температурами, достигающими 1000 м/с и 900 К соответственно. С течением времени по внешнему участку струи сверхзвуковой режим истечения сохраняется.

Взаимодействие высокоскоростного потока с

примыкающей к нему слабо возмущенной зоной приводит к искривлению траектории движения газа, что сопровождается образованием и развитием вихревых зон. В расчетах, представленных на рис. 1 и 2, заметен процесс формирования внешнего тороидального вихря (учитывая осесимметричность постановки задачи), который поддерживает сверхзвуковую скорость потока на внешнем участке струи. Более слабый вихрь, направление вращения которого противоположно основному внешнему вихрю, образуется вблизи оси симметрии в окружающем струю газе [8] и, за счет направления потока газа навстречу движению струи в ее центре, перемещает диск Маха к зоне истечения, что приводит к развитию полый струи. Рассматриваемый в расчетах режим истечения с сохранением полости внутри струи поддерживается в течении 100 мкс.

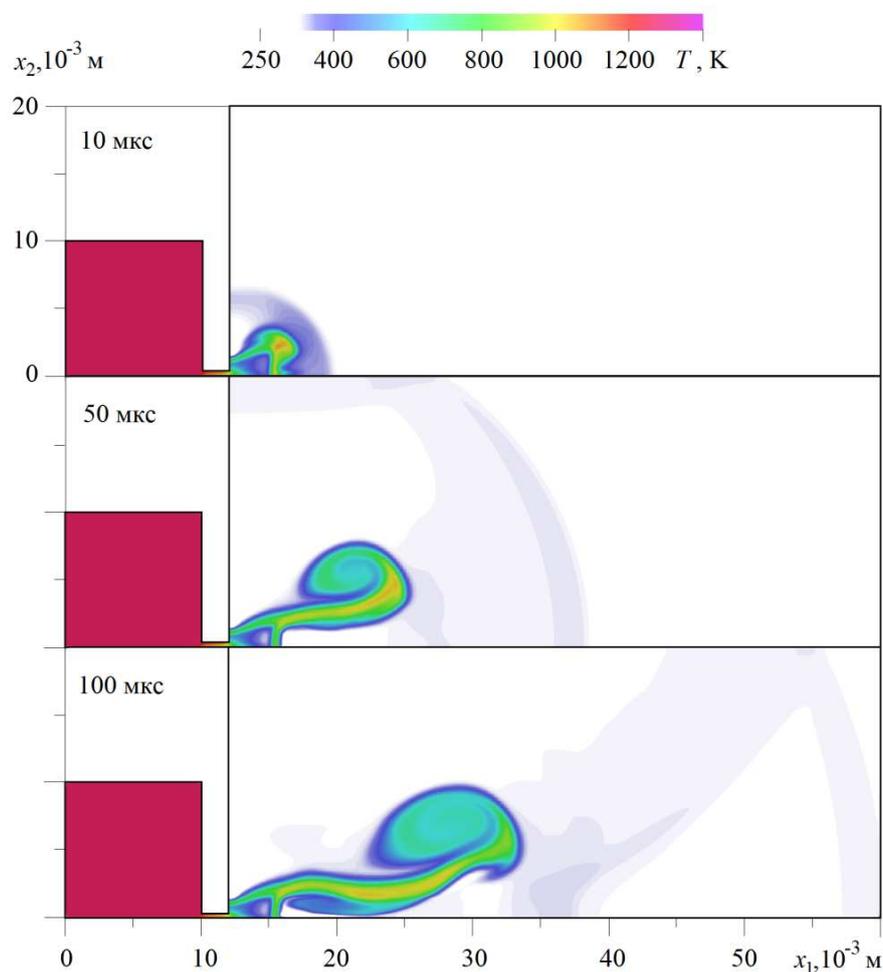


Рис. 2. Эволюция расчетного распределения температур в процессе истечения водяного пара через тонкое сопло из камеры высокого давления, изначально находящегося в сверхкритическом состоянии

#### 4. Заключение

Проведенные численные исследования по изучению сверхкритического режима истечения водяного пара через тонкое сопло показали, что в процессе истечения водяного пара из цилиндрического сосуда через тонкое сопло радиуса  $r = 0,25$  мм, изначально находящегося при давлении  $p_0 = 22,73$  МПа и температуре  $T_0 = 1273$  К, формируется полая струя пара со сверхзвуковым режимом истечения при отсутствии конденсации, чему способствует образование внутренней границы струи (диска Маха) и развитие внешнего и внутреннего тороидальных вихрей, поддерживающих режим полой струи в течении времени до 100 мкс, что качественно согласуется с данными экспериментальных исследований [2]. Для последующего

исследования рассматриваемого процесса потребуются учет конденсации, сопровождающей охлаждение пара при дальнейшем развитии струи.

#### Список литературы

- [1] Ishii R., Fujimoto H., Hatta N., Umeda Y. Experimental and numerical analysis of circular pulse jets // J. Fluid Mech. 1999. Vol. 392. P. 129–153. (DOI: 10.1017/S0022112099005303)
- [2] Решетников А.В., Бусов К.А., Мажейко Н.А., Скоков В.Н., Коверда В.П. Переходные режимы вскипания струй перегретой воды // Теплофизика и аэромеханика. 2012. Т. 19, № 3. С. 359–367. (<http://www.sibran.ru/upload/iblock/df3/df31846b55e7256ad10864ce5e0f7ccf.pdf>)
- [3] Болотнова Р.Х., Бузина В.А. Пространственное моделирование нестационарной стадии истечения вскипающей жидкости из камер высокого давления // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т. 7, № 4. С. 343–352. (DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.4.33)

- [4] Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А. Пространственное моделирование процесса формирования струи вскипающей воды при истечении из тонкого сопла // Теплофизика и аэромеханика. 2017. Т. 24, № 5. С. 783–794. ([http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=171733&ARTICLE\\_ID=171744](http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=171733&ARTICLE_ID=171744))
- [5] Болотнова Р.Х., Бузина В.А. (Коробчинская В.А.), Галимзянов М.Н., Шагапов В.Ш. Гидродинамические особенности процессов истечения вскипающей жидкости // Теплофизика и аэромеханика. 2012. Т. 19, № 6. С. 719–730. (<http://www.sibran.ru/upload/iblock/771/771227b1ee44e66c6d97c09317d651ad.pdf>)
- [6] Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А. Исследование процесса развития струи при истечении воды из сверхкритического состояния через тонкое сопло // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2016. Т. 11. С. 66–71. (DOI: 10.21662/uim2016.1.010)
- [7] Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А. Моделирование процесса формирования потока вскипающей воды при разгерметизации сосуда высокого давления с использованием открытого пакета OpenFoam // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2017. Т. 12, № 2. С. 169–173. (DOI: 10.21662/uim2017.2.025)
- [8] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Особенности формирования полой струи водяного пара сверхкритических параметров состояния, истекающего через тонкое сопло // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25, № 5. С. 783–789. ([http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=174876&ARTICLE\\_ID=174887](http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=174876&ARTICLE_ID=174887))
- [9] OpenFOAM. The Open Source Computational Fluid Dynamics (CFD) Toolbox. (<http://www.openfoam.com>)
- [10] Peng D.Y., Robinson D.B. A new two-constant equation of state // Industrial and Engineering Chemistry: Fundamentals. 1976. Vol. 15. P. 59–64. (DOI: 10.1021/i160057a011)



## Study the dynamics of hollow jet formation under vapor outflow from the supercritical state

**Bolotnova R.Kh.**

Mavlutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa

The features of the unsteady process of a cavity formation inside the jet at a sudden outflow of water vapor through a thin nozzle from a pressure vessel, initially in a supercritical state, are studied. A numerical study was carried out by using the sonicFoam solver of the OpenFOAM library with the Peng-Robinson equation of state in a two-dimensional axisymmetric approximation. Visualization of the obtained solutions is presented in the form of pictures dynamics for fields of velocities and temperatures. It is shown that the mode of formation and maintenance of the cavity inside the jet is supported more than 100  $\mu\text{s}$  from the beginning of the expiration process.

**Keywords:** numerical study, sonicFoam solver of package OpenFOAM, high-pressure chamber, thin nozzle, supercritical state of water vapor



## Исследование акустического рассеяния от одиночной звукопроницаемой сферы<sup>1</sup>

Насибуллаева Э.Ш.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В работе представлена обобщенная математическая модель и проведены численные исследования задачи акустического рассеяния от одиночной звукопроницаемой сферы при прохождении двух видов волн — сферической от монополярного источника излучения и плоской. При решении уравнений Гельмгольца используется численная техника, основанная на быстром методе мультиполей, которая позволяет достичь высокой точности получаемых результатов при минимальных затратах машинного времени. Проведено сравнение расчетов с известными экспериментальными данными и получено хорошее соответствие. Обобщены формулы для расчета основной характеристики поля рассеяния — полного сечения рассеяния — для звукопроницаемой сферы; показано влияние на данную характеристику физических параметров среды вне и внутри сферы, таких как плотность и скорость звука. Проведен численный параметрический анализ распределения давления вокруг одиночной звукопроницаемой сферы для различных значений волнового радиуса, плотности и скорости звука внешней и внутренней сред сферы. Полученные результаты в дальнейшем будут использоваться при проведении тестовых расчетов для верификации численного решения обобщенной задачи акустического рассеяния множества звукопроницаемых сфер (коаксиальных или произвольно расположенных в пространстве).

**Ключевые слова:** акустическое рассеяние, монополярный источник излучения, плоская волна, звукопроницаемая сфера, полное сечение рассеяния

### 1. Введение

Явление рассеяния звука на препятствиях малых размеров играет важную роль в акустике, в первую очередь из-за того, что на данном явлении основываются многие практические применения акустических волн, в том числе гидролокация, приборы неразрушающего контроля, медицинские сканеры, зондирования атмосферы и океана. Случай одиночной сферы (пузырька или капли) интересен с практической точки зрения, поскольку позволит в будущем проводить сравнения с результатами существующих экспериментальных данных и данных вычислительных экспериментов других исследователей как для произвольного падающего поля, так и для монополярного источника.

В настоящей работе были обобщены математическая модель, представленная в работе [1], для звуконепроницаемой одиночной сферы с произвольным акустическим импедансом, а также методика расчета [2], основанная на быстром методе мультиполей, которая позволяет достичь высокой точности получаемых результатов и минимизировать машинное время.

Целью настоящей работы является обобщение численной модели для определения поля внутри и вокруг одиночной звукопроницаемой сферы для двух видов падающей волны — сферической от монополярного источника излучения и плоской.

### 2. Постановка задачи и основные уравнения.

Рассматривается одиночная сфера радиуса  $a$  с координатами  $\mathbf{r}'_1 = (x'_1, y'_1, z'_1)$  в бесконечном трехмерном пространстве (см. рис. 1), заполненном однородной средой, которая характеризуется плотностью  $\rho_0$  и скоростью звука  $c_0$ . Сквозь поверхность

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-41-020582-р\_а), АН РБ (договор № 40/9) и средств государственного бюджета по госзаданию 0246-2018-0003.

сферы проходит волна, которая распространяется в другой среде, характеризующейся плотностью  $\rho_1$  и скоростью звука  $c_1$ , т.е. рассматриваются случаи сферического газового пузырька или сферической жидкой капли. Задача рассеяния звука от сферы сводится к решению уравнения Гельмгольца для комплексного потенциала  $\psi(\mathbf{r})$

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями, выражающими равенства потенциала и нормальных составляющих скорости частиц на поверхности препятствия, сквозь которую проходит волна:

$$\begin{aligned} (\psi(\mathbf{r}) - \psi_1^{\text{int}})|_{r=a} &= 0, \\ \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \psi_1^{\text{int}}}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В формулах (1) и (2)  $k$  — волновое число;  $\psi_1^{\text{int}}$  — комплексный потенциал внутри сферы, который также удовлетворяет уравнению Гельмгольца (1), но с волновым числом  $k_1$  для среды внутри сферы, т.е.

$$\nabla^2 \psi_1^{\text{int}} + k_1^2 \psi_1^{\text{int}} = 0. \quad (3)$$

Потенциал внешнего поля представляется в следующей форме:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) + \psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}), \quad (4)$$

где  $\psi_{\text{in}}(\mathbf{r})$  — потенциал падающего поля;  $\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r})$  — потенциал поля рассеяния, который удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial \psi_{\text{scat}}}{\partial r} - ik \psi_{\text{scat}} \right) = 0, \quad (5)$$

где  $i = \sqrt{-1}$  — мнимая единица. Данное условие соответствует уходящим на бесконечность волнам (на бесконечности волна затухает) и выделяет единственное решение уравнения (1) в классе обобщенных функций в неограниченной области.

### 2.1. Разложение по мультиполям

Для решения задачи применяется метод разложения по мультиполям (см., например, [2]). В случае одиночной звуконепроницаемой сферы с произвольным акустическим импедансом данная методика была подробно изложена в работе [1].

Вводится система отсчета, связанная с центром сферы, и осуществляется переход к сферической системе координат  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 = (r_1, \theta_1, \varphi_1)$ . На рис. 1 схематично представлены обозначения, используемые при разложении. Тогда разложение

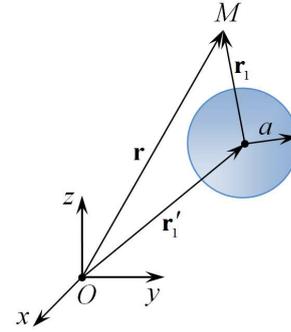


Рис. 1. Обозначения в разных системах отсчета

потенциала рассеянного поля, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца (1) и условию (5), может быть представлено в виде:

$$\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l A_l^s S_l^s(\mathbf{r}_1), \quad (6)$$

где  $A_l^s$  — неизвестные коэффициенты разложения по мультиполям;  $S_l^s(\mathbf{r}_1)$  — мультиполь порядка  $l$  и степени  $s$ , который определяется по формуле

$$S_l^s(\mathbf{r}_1) = h_l(kr_1) Y_l^s(\theta_1, \varphi_1).$$

Здесь  $h_l(kr)$  — сферические функции Хенкеля 1-го типа, удовлетворяющие условию Зоммерфельда;  $Y_l^s(\theta, \varphi)$  — ортогональные сферические гармоники. Вид данных функций представлен, например, в [3].

Разложение падающего поля около  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_1$  будет иметь вид:

$$\psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l C_l^{(\text{in})s}(\mathbf{r}'_1) R_l^s(\mathbf{r}_1),$$

где  $C_l^{(\text{in})s}(\mathbf{r}'_1)$  — коэффициенты разложения;  $R_l^s(\mathbf{r}_1)$  — регулярные решения уравнения Гельмгольца в сферических координатах, связанные со сферой:

$$R_l^s(\mathbf{r}_1) = j_l(kr_1) Y_l^s(\theta_1, \varphi_1).$$

Здесь  $j_l(z)$  — сферические функции Бесселя 1-го типа.

Тогда разложение потенциала (4) около  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_1$ :

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l [C_l^{(\text{in})s}(\mathbf{r}'_1) j_l(kr_1) + \\ + A_l^s h_l(kr_1)] Y_l^s(\theta_1, \varphi_1). \end{aligned} \quad (7)$$

Разложение потенциала внутри сферы примет вид:

$$\psi_1^{\text{int}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l B_l^s(\mathbf{r}'_1) j_l(k_1 r_1) Y_l^s(\theta_1, \varphi_1), \quad (8)$$

где  $B_l^s$  — неизвестные коэффициенты.

Тогда при подстановке (7), (8) в граничные условия (2) неизвестные коэффициенты  $A_l^s$  будут определяться по формуле

$$A_l^s = -\frac{j_l(ka)j_l'(k_1a) - \kappa j_l'(ka)j_l(k_1a)}{h_l(ka)j_l'(k_1a) - \kappa h_l'(ka)j_l(k_1a)} C_l^{(in)s}(\mathbf{r}'_1),$$

где введено обозначение  $\kappa = \frac{k}{k_1} \frac{\rho_1}{\rho_0}$ , а неизвестные коэффициенты  $B_l^s$  — по формуле

$$B_l^s = -\frac{ik}{k^2 a^2} \frac{C_l^{(in)s}(\mathbf{r}'_1)}{h_l(ka)j_l'(k_1a) - \kappa h_l'(ka)j_l(k_1a)}.$$

В случае монопольного источника излучения, расположенного в некоторой точке  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{source}$ , падающее поле, соответствующее фундаментальному решению уравнения Гельмгольца, определяется по формуле

$$\psi_{in}(\mathbf{r}) = -V_0 \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{source}|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{source}|}, \quad (9)$$

где  $V_0$  — амплитуда объемной скорости (или производительность) монопольного источника. Здесь и далее опускается временной множитель  $e^{-i\omega t}$ , где  $\omega = kc_0$  — угловая частота внешнего поля.

Задача для монопольного источника и одиночной сферы осесимметрична относительно оси, связывающей центр сферы и местоположение источника. Если эту ось взять в качестве оси  $z_1$ , тогда имеем (см., например, [2]):

$$\begin{aligned} C_l^{(in)s} &= -V_0 ik \delta_{s0} h_l(k|\mathbf{r}_{source} - \mathbf{r}'_1|) Y_l^0(0,0) = \\ &= -V_0 ik \delta_{s0} h_l(kd) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}, \end{aligned}$$

где  $d$  — расстояние между источником и центром сферы;  $\delta_{s0}$  — дельта-функция Дирака.

Тогда выражения для потенциала поля рассеяния, полного потенциала на поверхности сферы и потенциал падающего поля примут вид:

$$\begin{aligned} \psi_{scat} &= \frac{V_0 ik}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) h_l(kr_1) h_l(kd) \times \\ &\times \frac{j_l(ka)j_l'(k_1a) - \kappa j_l'(ka)j_l(k_1a)}{h_l(ka)j_l'(k_1a) - \kappa h_l'(ka)j_l(k_1a)} P_l(\cos \theta_1), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\psi|_{S_1} = \frac{V_0 k \kappa}{4\pi a^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1) j_l(k_1a) h_l(kd) P_l(\cos \theta_1)}{h_l(ka)j_l'(k_1a) - \kappa h_l'(ka)j_l(k_1a)}. \quad (11)$$

$$\psi_{in}(\mathbf{r}'_1) = -\frac{V_0}{4\pi d} e^{ikd}. \quad (12)$$

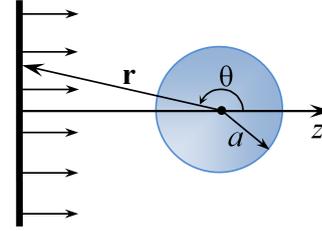


Рис. 2. Обозначения для падающей плоской волны на сферу

Поле внутри сферы определяется по формуле

$$\begin{aligned} \psi_{int} &= -\frac{\kappa V_0}{4\pi k a^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) h_l(kd) P_l(\cos \theta) \times \\ &\times \frac{j_l(k_1r)}{h_l(ka)j_l'(k_1a) - \kappa h_l'(ka)j_l(k_1a)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Поскольку связь между акустическим давлением и потенциалом определяется следующим образом:

$$p = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = i\omega \rho_0 \psi,$$

то значения  $p_{scat}$ ,  $p|_{r=a}$  и  $p_{in}$  можно вычислять с помощью формул (10), (11) и (12) с точностью до постоянной  $i\omega \rho_0$ .

В случае плоской волны, падающей в положительном направлении оси  $z$  (рис. 2), разложение потенциала падающей волны будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \psi_{in}(\mathbf{r}) &= \frac{p_0}{i\omega \rho_0} e^{ik \cdot \mathbf{r}} = \frac{p_0}{i\omega \rho_0} e^{ikr \cos \theta} = \\ &= \frac{p_0}{i\omega \rho_0} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta) = \\ &= \frac{p_0}{i\omega \rho_0} \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} j_l(kr) Y_l^0(\theta, 0), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $p_0$  — давление в начальный момент времени. Следовательно,

$$C_l^{(in)s} = \frac{p_0}{i\omega \rho_0} \delta_{s0} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)}.$$

Тогда для плоской волны формулы, аналогичные формулам (10), (11) и (13), примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi_{scat} &= -\frac{p_0}{i\omega \rho_0} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) h_l(kr) P_l(\cos \theta) \times \\ &\times \frac{j_l(ka)j_l'(k_1a) - \kappa j_l'(ka)j_l(k_1a)}{h_l(ka)j_l'(k_1a) - \kappa h_l'(ka)j_l(k_1a)}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \psi|_{S_1} &= -\frac{p_0 \kappa}{\omega \rho_0 (ka)^2} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \times \\ &\times \frac{j_l(k_1a) P_l(\cos \theta)}{h_l(ka)j_l'(k_1a) - \kappa h_l'(ka)j_l(k_1a)}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\Psi_{\text{int}} = -\frac{p_0 \kappa}{\omega \rho_0 (ka)^2} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(k_1 r) \times \frac{P_l(\cos \theta)}{h_l(ka) j_l'(k_1 a) - \kappa h_l'(ka) j_l(k_1 a)}. \quad (17)$$

### 3. Полное сечение рассеяния

Рассмотрим полное сечение рассеяния  $\sigma_s$  — характеристика, которая вводится для описания явления рассеяния (см., например, [4, 5]). Физический смысл данной величины — это площадь перпендикулярной потоку площадки (круга), попадая в которую налетающая частица испытывает рассеяние. Определяется данная характеристика следующим образом:

$$\sigma_s = \frac{P_s}{I_0} = \frac{1}{I_0} \int_{(S)} I_s dS, \quad (18)$$

где  $P_s$  — мощность рассеянной волны;  $I_0$  — интенсивность падающей волны;  $I_s$  — интенсивность рассеянной волны; интеграл берется по сферической поверхности  $S = 4\pi r^2$  радиуса  $r$ , которая окружает препятствие.

В работе [1] представлен подробный вывод формулы для определения значения  $\sigma_s$  в случае звуконепроницаемой сферы для монополюсного источника излучения и плоской волны. В настоящей работе приведем аналогичные формулы для звукопроницаемой сферы.

Полное сечение рассеяния вычисляется по формуле

$$\sigma_s = A \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |E_l|^2, \quad (19)$$

где значения коэффициентов  $A$  и  $E_l$  ( $l = 0, 1, \dots$ ) равны

$$A = 4\pi d^2, \quad E_l = \frac{j_l(ka) j_l'(k_1 a) - \kappa j_l'(ka) j_l(k_1 a)}{h_l(ka) j_l'(k_1 a) - \kappa h_l'(ka) j_l(k_1 a)} h_l(kd) \quad (20)$$

для монополюсного источника излучения и

$$A = \frac{4\pi}{k^2}, \quad E_l = \frac{j_l(ka) j_l'(k_1 a) - \kappa j_l'(ka) j_l(k_1 a)}{h_l(ka) j_l'(k_1 a) - \kappa h_l'(ka) j_l(k_1 a)} \quad (21)$$

в случае плоской волны.

Отметим, что при  $\kappa \rightarrow 0$  имеет место случай акустически мягкой сферы, а при  $\kappa \rightarrow \infty$  — акустически жесткой (см., например, [4]).

В формуле (19) ряд вычисляется до тех пор, пока модуль разности предыдущего (при  $l = l_{\text{prev}}$ )

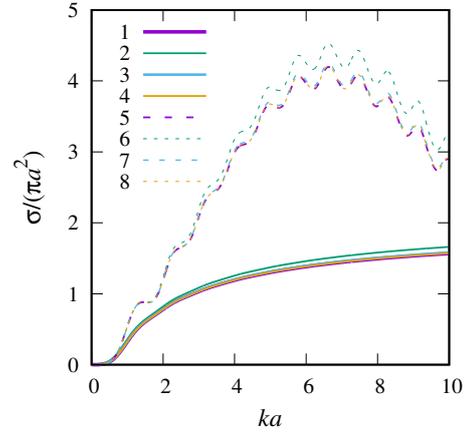


Рис. 3. Сравнение безразмерного значения полного сечения рассеяния  $\sigma_s / (\pi a^2)$  от волнового радиуса  $ka$  для следующих случаев:

1 и 5 — плоская волна;

2 и 6 — монополюсный источник излучения при  $\rho_{in} = 2$ ;

3 и 7 — монополюсный источник излучения при  $\rho_{in} = 5$ ;

4 и 8 — монополюсный источник излучения при  $\rho_{in} = 10$ .

Сплошные линии — капля воды в воздухе; штриховые — капля воды в глицерине

и текущего (при  $l = l_{\text{prev}} + 1$ ) значений  $\sigma_s$  не станет меньше  $\varepsilon = 10^{-10}$ .

На рис. 3 представлено сравнение безразмерного сечения рассеяния для различных случаев внешнего воздействия (плоская волна или монополюсный источник излучения) и двух видов капель воды (в воздухе и глицерине). Видно, что при увеличении расстояния между центром сферы и монополюсным источником излучения  $\rho_{in}$  кривые стремятся к кривым для случая плоской волны. Объясняется это тем, что при увеличении аргумента функции Хенкеля  $h_l(kd)$ , т.е. при  $kd \rightarrow \infty$ , имеет место следующее асимптотическое представление данной функции [3]:

$$h_l(kd) \approx \frac{1}{kd} (-i)^{l+1} e^{ikd},$$

тогда получим, что

$$|h_l(kd)|^2 \approx \frac{1}{(kd)^2} \quad \text{при } kd \rightarrow \infty,$$

и значения коэффициентов, вычисленные по формуле (20), будут стремиться к значениям, вычисленным по формулам (21). Далее рассмотрим изменение полного сечения рассеяния от волнового радиуса при различных значениях параметров для случая падения на сферу плоской волны.

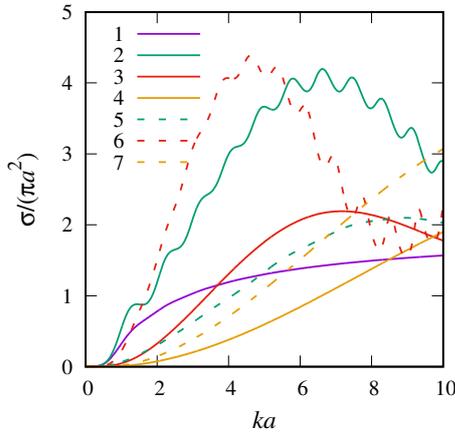


Рис. 4. Сравнение безразмерного значения полного сечения рассеяния  $\sigma_s / (\pi a^2)$  от волнового радиуса  $ka$  в случае плоской волны при различных характеристиках сред:  
 1 – капля воды в воздухе;  
 2 – капля воды в глицерине;  
 3 – капля воды в дихлорэтано;  
 4 – капля воды в хлорбензоле;  
 5 – капля глицерина в воде;  
 6 – капля дихлорэтана в воде;  
 7 – капля хлорбензола в воде

На рис. 4 приведено сравнение безразмерного сечения рассеяния, рассчитанного по формуле (19) с коэффициентами (21), в зависимости от волнового числа  $ka$  для различных сред внутри и вне сферы. Физические характеристики сред представлены в табл. 1. Заметим, что относительная погрешность полученных значений для случаев капли воды в воздухе и жесткой сферы не превышают 0.16% (для  $ka \leq 0.2$ ), поскольку отношение величины  $\rho_1 / \rho_0$ , а, следовательно, и значение  $k$ , близко к нулю.

В том случае, когда рассматривается капля в жидкости, в которой значения  $\rho_0$  и  $c_0$  мало отличаются от соответствующих значений  $\rho_1$  и  $c_1$  жидкости внутри капли, например, в случае воды и касторового масла (см. табл. 1), то рассеяние прак-

Таблица 1. Плотность  $\rho$  и скорость звука  $c$  различных сред при 20°C

Вещество	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$c$ , м/с
Воздух	1.205	343.1
Вода	998	1484
Глицерин	1260	1923
Касторовое масло	960	1480
Дихлорэтан	1252.6	1034
Хлорбензол	1106.2	1289

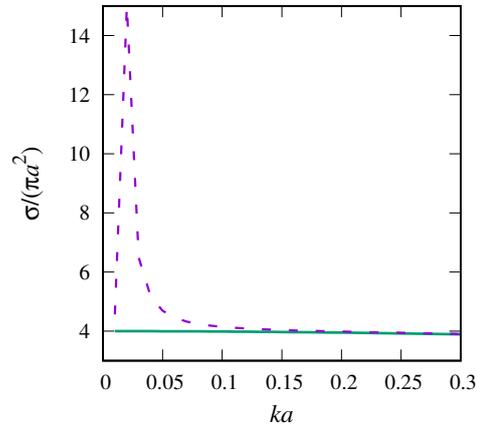


Рис. 5. Сравнение безразмерного значения полного сечения рассеяния  $\sigma_s / (\pi a^2)$  от волнового радиуса  $ka$  в случае плоской волны для воздушного пузырька в воде (штриховая линия) и мягкой сферы (сплошная линия)

тически отсутствует. Так, для капли касторового масла в воде при  $ka = 10$  имеем  $\sigma_s / (\pi a^2) \approx 3 \cdot 10^{-3}$ .

На рис. 5 показано изменение безразмерного значения полного сечения рассеяния для воздушного пузырька в воде, когда  $\rho_0 \gg \rho_1$ . Отметим, что при частоте падающей волны  $\omega$ , близкой по значению к собственной частоте пузырька  $\omega_0$  ( $\omega \approx \omega_0$ ), в системе имеет место резонанс, который приводит к значительному рассеянию звука. Для  $ka \ll 1$  собственная частота и полное сечение рассеяния определяются по следующим формулам [4]:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\rho_1 c_1^2}{\rho_0 a^2}}, \quad \sigma_s = \frac{4\pi}{k^2} = \frac{4\pi a^2}{(ka)^2}.$$

Рассмотрим на примере пузырька радиусом  $a = 5$  мкм: собственная частота  $\omega_0 \approx 4.13$  МГц, следовательно его резонансный волновой радиус  $ka \approx 0.0139$  (рис. 5, штриховая линия). При  $ka \ll 1$  и  $\omega \gg \omega_0$  полное сечение рассеяния будет стремиться к значению полного сечения рассеяния для мягкой сферы (см., например, [1, 4])  $\sigma_s \rightarrow 4\pi a^2$ . На рис. 5 безразмерное значение полного сечения рассеяния мягкой сферы изображено сплошной линией.

На рис. 6 представлены сравнения случаев, когда среда внутри капли отличается только плотностью от внешней среды:  $\rho_1 = \rho_0 \pm 5\%$ ,  $c_1 = c_0$ . Видно, что качественно характер кривых не меняется, а количественное изменение не превышает 19% относительно капли большей плотности (при изменении плотности на 10%).

На рис. 7 представлено сравнение безразмерных значений полного сечения рассеяния в слу-

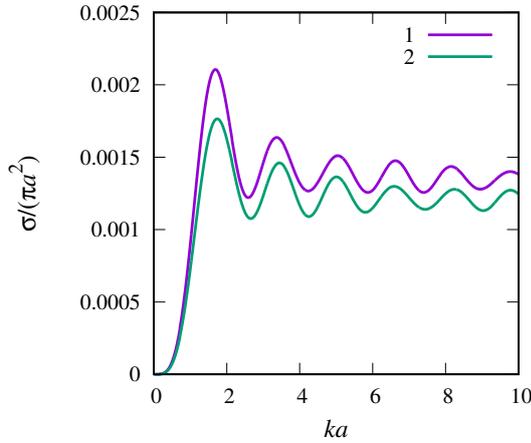


Рис. 6. Сравнение безразмерного значения полного сечения рассеяния  $\sigma_s / (\pi a^2)$  от волнового радиуса  $ka$  в случае плоской волны при различных характеристиках среды внутри капли в воде:  
 1 –  $\rho_1 = 0.95\rho_0$ ,  $c_1 = c_0$ ;  
 2 –  $\rho_1 = 1.05\rho_0$ ,  $c_1 = c_0$

чаях, когда отличаются обе характеристики среды внутри сферы (плотность и скорость звука):  $\rho_1 = \rho_0 \pm 5\%$ ,  $c_1 = c_0 \pm 5\%$ . При фиксированном значении скорости звука  $c_1$  кривые 1–3 и 4–6 сдвигаются вверх. Однако, в случае, когда  $c_1 < c_0$  увеличение значения плотности  $\rho_1$  приводит к уменьшению значения  $\sigma_s / (\pi a^2)$ , а при  $c_1 > c_0$  – к увеличению значения данной величины.

Из рис. 6 и 7 видно, что на рассеяние звуковой волны существенным образом влияет различие в скорости звука сред вне и внутри сферы, в то время, как различие в плотности этих сред имеет несущественное значение.

Отметим, что в случае малого волнового радиуса, когда  $ka \ll 1$ , преобладают монополярная ( $l = 0$ ) и дипольная ( $l = 1$ ) составляющие [4]. В этом приближении полное сечение рассеяния сводится к следующему упрощенному виду:

$$\sigma_s = 4\pi a^2 \left[ \left( \frac{1 - \chi_1/\chi}{(ka)^2 - 3\chi_1/\chi} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{1 - \rho_1/\rho}{1 + 2\rho_1/\rho} \right)^2 \right] (ka)^4, \quad (22)$$

где  $\chi = \rho_0 c_0^2$  – упругость среды вокруг сферы;  $\chi_1 = \rho_1 c_1^2$  – упругость среды внутри сферы. Для значений  $ka$  до 0.1 относительная погрешность величины  $\sigma_s$ , вычисленная по формулам (19), (21) и (22), не превышает 1%.

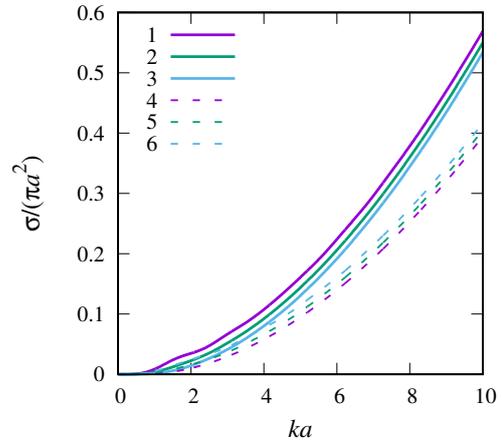


Рис. 7. Сравнение безразмерного значения полного сечения рассеяния  $\sigma_s / (\pi a^2)$  от волнового радиуса  $ka$  в случае плоской волны при различных характеристиках среды внутри капли в воде:  
 1 –  $\rho_1 = 0.95\rho_0$ ,  $c_1 = 0.95c_0$ ;  
 2 –  $\rho_1 = \rho_0$ ,  $c_1 = 0.95c_0$ ;  
 3 –  $\rho_1 = 1.05\rho_0$ ,  $c_1 = 0.95c_0$ ;  
 4 –  $\rho_1 = 0.95\rho_0$ ,  $c_1 = 1.05c_0$ ;  
 5 –  $\rho_1 = \rho_0$ ,  $c_1 = 1.05c_0$ ;  
 6 –  $\rho_1 = 1.05\rho_0$ ,  $c_1 = 1.05c_0$

#### 4. Сравнение с экспериментальными данными

Эксперимент, представленный в работе [7], связан с измерениями отклика поверхности одночного пузырька в жидкости на падающую плоскую волну. В данной работе эксперименты проводились в резервуаре из оргстекла размерами  $1.2 \times 0.45 \times 0.51$  м<sup>3</sup>, заполненном водой, стенки которого выложены безэховым материалом для уменьшения отражения. Источником, излучающим волну, управляли в импульсном режиме, выделяя сигнал от пузырька, который располагался на тонкой нити, прикрепленной к рамке из тонкой проволоки и расположенной на оси на глубине 0.18 м. Расстояние от датчика до нити было равно  $r = 0.58$  м. Размеры создаваемых в данном эксперименте пузырьков составляли  $a = (585 \pm 35)$  мкм. Отметим, что в данной работе было показано отсутствие каких-либо существенных изменений в форме пузырька.

На рис. 8 представлено сравнение расчетных и экспериментальных данных значения целевой силы (target strength, TS) при изменении частоты  $f$  от 70 до 150 кГц для трёх радиусов пузырька  $a = 550, 585, 620$  мкм. Целевая сила, измеренная в децибелах, рассчитывалась по следующей формуле

$$TS = 10 \lg \sigma_{bs}, \quad (23)$$

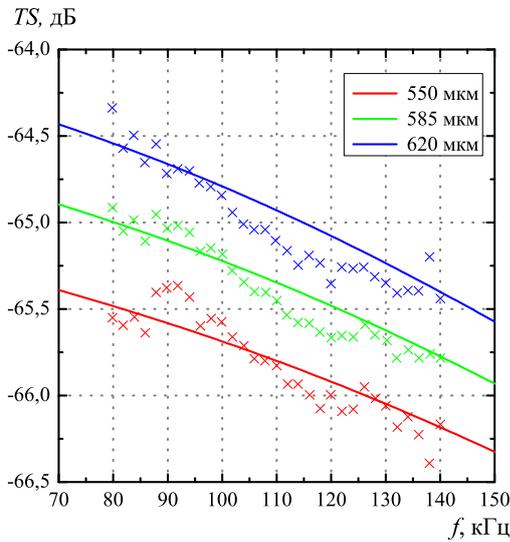


Рис. 8. Сравнение между расчетными данными (линии) и экспериментальными данными работы [7] (символы): величина отклика TS от частоты падающего поля для одиночного пузырька радиуса  $585 \pm 35$  мкм

где  $\sigma_{bs}$  — обратное сечение рассеяния для пузырька, определяемое по формуле

$$\sigma_{bs} = \left| \frac{\Psi_{scat}|_{S_1}}{\Psi_{in}(\mathbf{r})} \right|^2.$$

Здесь  $\Psi_{scat}$  вычисляется по формуле (15) на поверхности пузырька  $S_1$ , а знаменатель равен  $\Psi_{in}(\mathbf{r}) = V_0 e^{ikr}/r$ , так как отраженная от пузырька плоская волна становится сферической.

При расчетах производилось усечение ряда в разложении (15). Число усечения  $M$ , определяемое по эвристической формуле [6]

$$M = [eka], \quad e = 2.71828 \dots, \quad (24)$$

является нижней границей для небольших чисел  $ka$ , а для больших значений достаточно использовать формулу  $M \geq eka/2$  [2].

Рис. 8 показывает, что расчетные и экспериментальные данные хорошо согласуются (максимальная относительная погрешность составляет не более 0.42%).

Отметим, что в разложении (15) в соответствии с формулой (24) остается только два слагаемых ( $l = 0, 1$ ), что согласуется с тем фактом, что при отражении от пузырька преобладающими являются только первые две моды (монопольное и дипольное рассеяние), в то время как остальные моды более высокого порядка дают незначительный эффект.

## 5. Численные расчеты

В результате численного моделирования были написаны программные коды на языке Fortran 90. Для вычисления специальных функций и их производных  $h_l(z), h'_l(z), j_l(z), P_l(z)$  были адаптированы программные коды [8], написанные на языке Fortran 77.

На рис. 9 представлены диаграммы распределения модуля нормированного давления вокруг капли в жидкости, когда физические параметры сред не совпадают ( $\rho_1 \neq \rho_0$  и  $c_1 \neq c_0$ ), при падении плоской волны для различных значений волнового радиуса ( $ka = 0.1, 1, 5.05, 10$ ). В случае капли воды в дихлорэтана (рис. 9 (слева)), т.е. в случае капли меньшей плотности и большей скорости звука, чем окружающая ее жидкость, с некоторого значения  $ka$  (см. диаграмму для  $ka = 1$ ) появляется «теневая» зона за каплей, которая при дальнейшем увеличении  $ka$  «освещается» (появляется так называемое пятно Пуассона). А в случае капли дихлорэтана в воде (рис. 9 (справа)), когда капля имеет большую плотность и меньшую скорость звука, чем окружающая ее жидкость, наблюдается резкое повышение давления за сферой, т.е. капля представляет собой сферическую жидкую линзу. При увеличении значения  $ka$  область резкого повышения давления уменьшается, но увеличивается ее максимальное значение.

На рис. 10 для наглядности приведены нормированные амплитуды давления вблизи сферической капли на оси  $Oy$  ( $y = 0$ ), соответствующие значениям  $ka$ , представленным на рис. 9. На рис. 11 показана зависимость функции отклика на поверхности сферы (переходной функции)  $H$ , измеренной в децибеллах, которая рассчитывалась по следующей формуле

$$H = 20 \lg \left| \frac{\Psi|_{S_1}}{\Psi_{in}(\mathbf{r}'_1)} \right|. \quad (25)$$

Данная функция представляет отношение амплитуды акустического поля при особом расположении поверхности к амплитуде падающего поля в центре сферы. При расчетах производилось усечение ряда в разложении по формуле (24).

На рис. 12 представлены диаграммы распределения нормированного давления вокруг воздушного пузырька в воде (случай  $\rho_1 \ll \rho_0$ ) при падении плоской волны в дорезонансной области ( $ka = 0.005$ ), в области резонанса ( $ka = 0.0139$ ), в послерезонансной области ( $ka = 0.02$ ) и вдали от резонанса ( $ka = 0.1$ ), где значения для пузырька близки к значениям для мягкой сферы. На рис. 13 показаны графики нормированной амплитуды давления

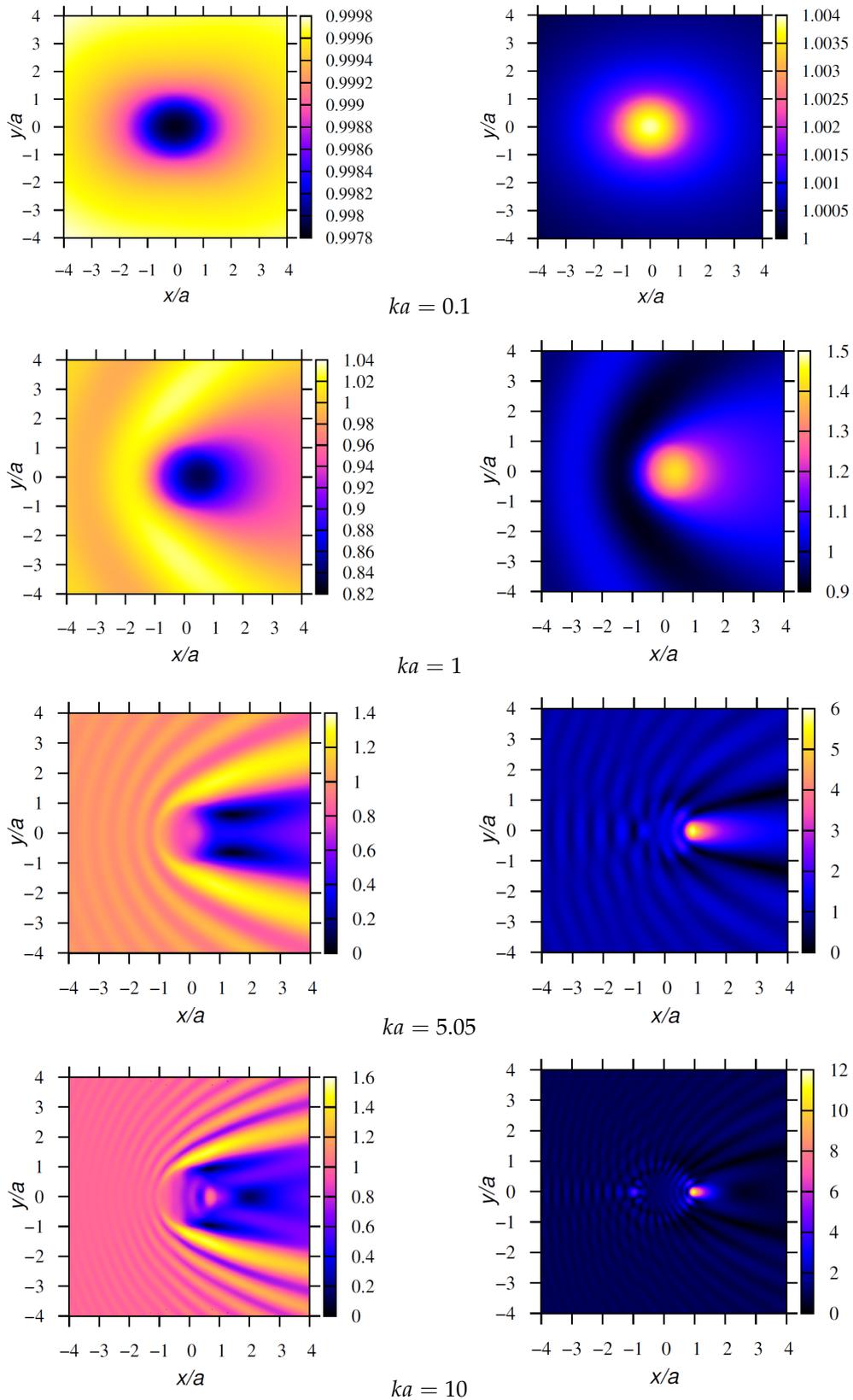


Рис. 9. Диаграммы распределения модуля нормированного давления вокруг капли в жидкости при падении плоской волны для различных значений волнового радиуса  $ka$ : капля воды в дихлорэтане (слева); капля дихлорэтана в воде (справа)

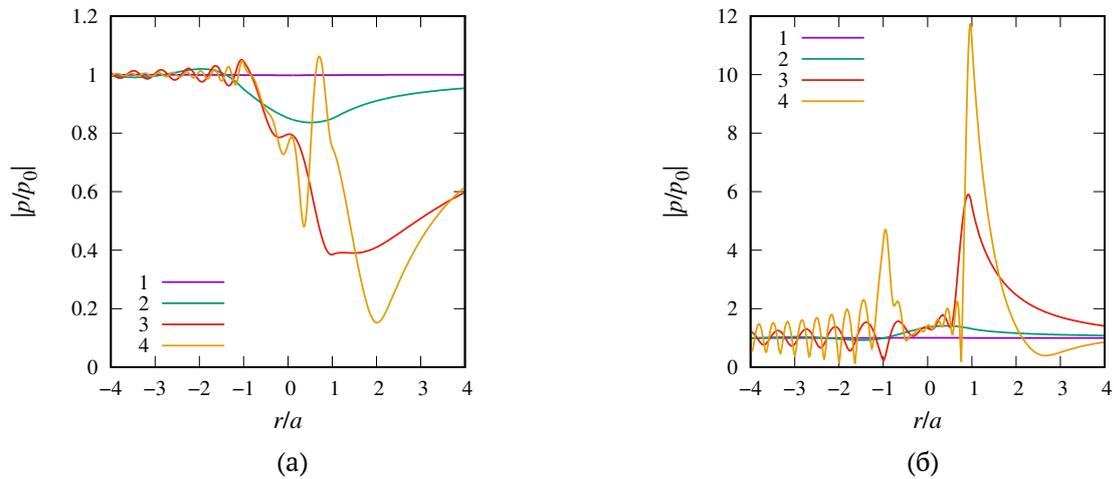


Рис. 10. Нормированная амплитуда давления вблизи одиночной сферической капли воды в дихлорэтане (а) и капли дихлорэтана в воде (б) при воздействии плоской волны для различных значений волнового радиуса  $ka$ : 1 –  $ka = 0.1$ ; 2 –  $ka = 1$ ; 3 –  $ka = 5.05$ ; 4 –  $ka = 10$

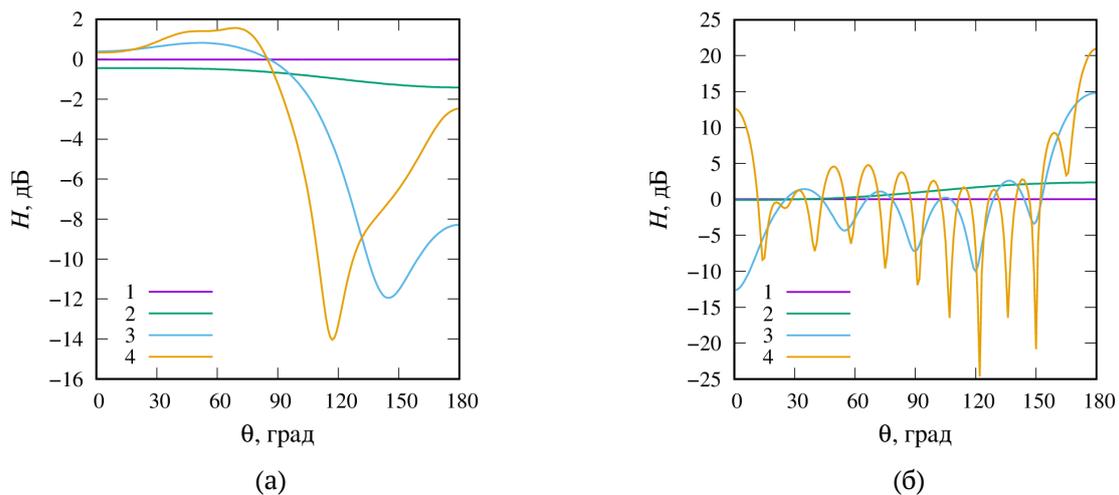


Рис. 11. Зависимость функции отклика  $H$  на поверхности сферы от угла  $\theta$  для капли воды в дихлорэтане (а) и капли дихлорэтана в воде (б) при воздействии плоской волны для различных значений волнового радиуса  $ka$ : 1 –  $ka = 0.1$ ; 2 –  $ka = 1$ ; 3 –  $ka = 5.05$ ; 4 –  $ka = 10$

на оси  $Oy$  ( $y = 0$ ) вблизи пузырька для соответствующих рис. 12 значений  $ka$ . Для рассмотренного диапазона значений ( $ka \ll 1$ ) функция отклика на поверхности пузырька  $H$  остается практически постоянной — максимальная погрешность относительно минимального значения данной функции не превышает 0.1%.

Рис. 14, 15 демонстрируют случай капли воды в воздухе, т.е. случай  $\rho_1 \gg \rho_0$ . Диаграммы распределения нормированного давления вокруг капли при падении плоской волны для различных значений  $ka$  представлены на рис. 14. Отметим, что при увеличении  $ka$  распределение давления стано-

вится близким к распределению давления вокруг жесткой сферы (см., например, [1]). На рис. 15(а) показаны кривые нормированной амплитуды давления вдоль оси  $Oy$  ( $y = 0$ ) для значений  $ka$ , приведенных на рис. 14, а рис. 15(б) демонстрирует зависимость функции отклика на поверхности капли  $H$  от угла  $\theta$ .

## 6. Заключение

В работе обобщена математическая модель и проведено численное исследование акустического рассеяния от звукопроницаемой сферы (случай, когда падающая волна проходит через поверхность

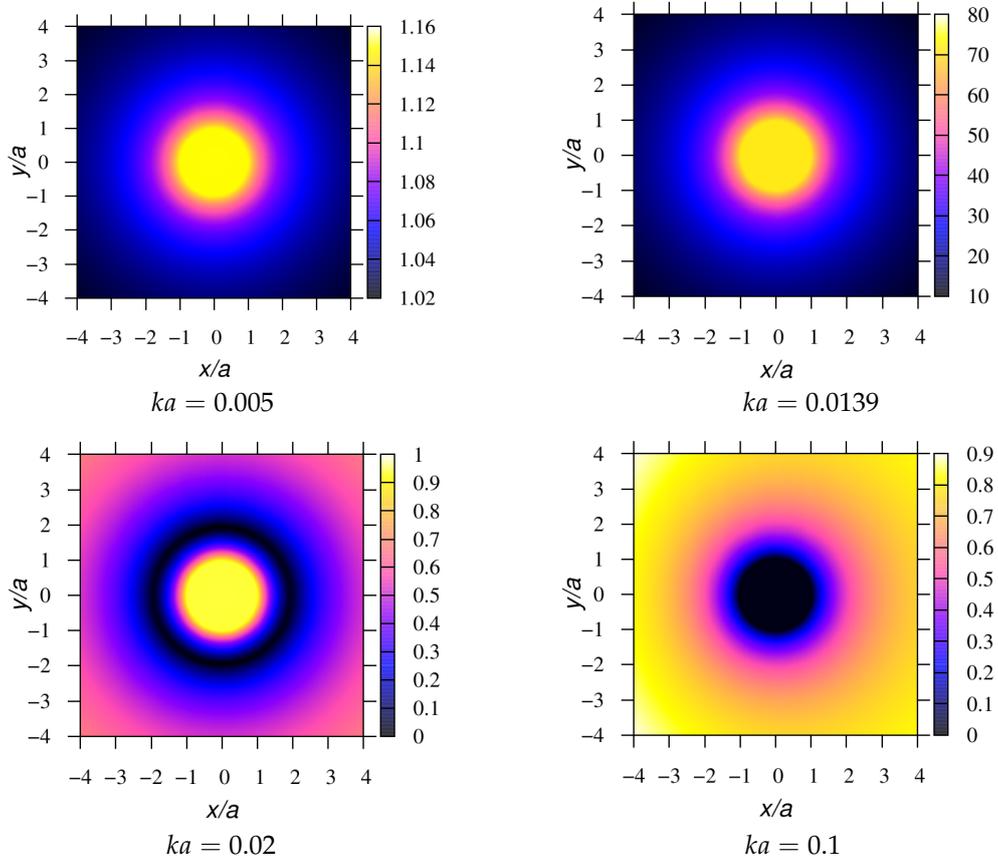


Рис. 12. Диаграммы распределения модуля нормированного давления вокруг воздушного пузырька в воде при падении плоской волны для различных значений волнового радиуса  $ka$

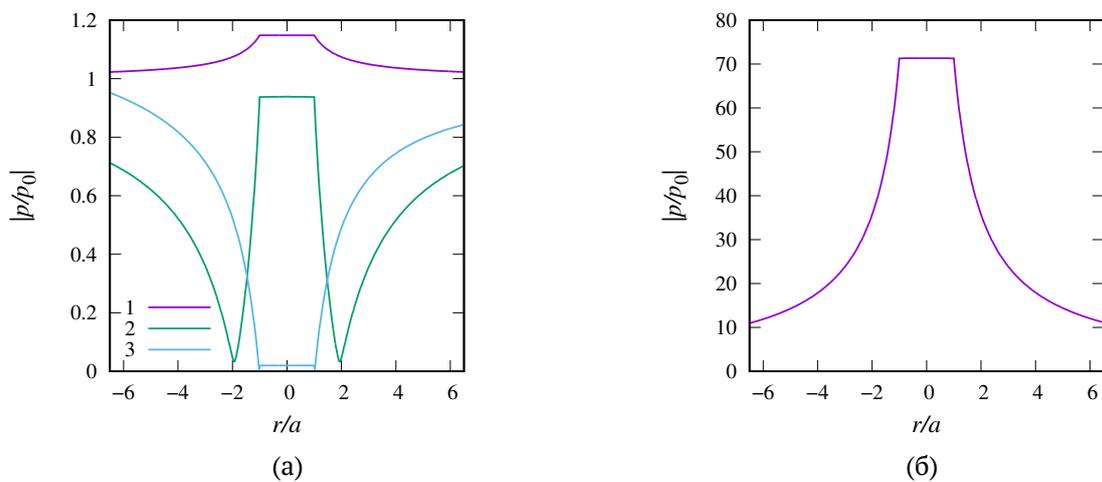


Рис. 13. Нормированная амплитуда давления вблизи одиночного воздушного сферического пузырька в воде при падении плоской волны вне резонансной области для различных значений  $ka$ : 1 –  $ka = 0.005$ ; 2 –  $ka = 0.02$ ; 3 –  $ka = 0.1$  (а) и в области резонанса (б)

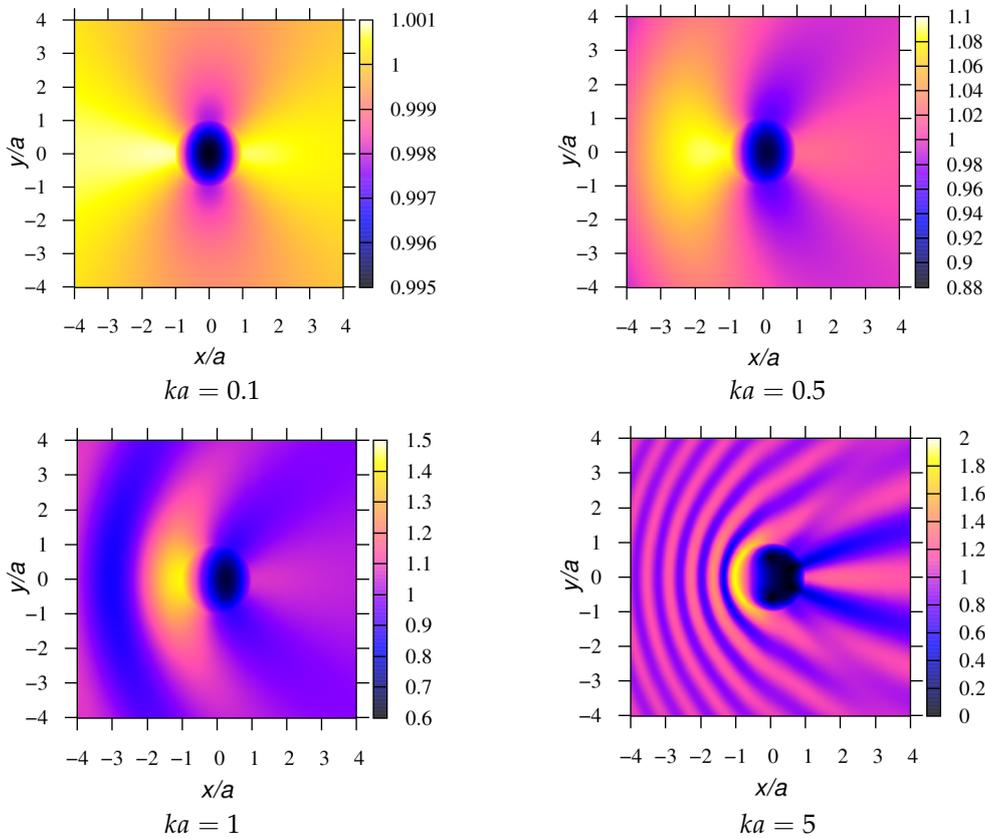


Рис. 14. Диаграммы распределения модуля нормированного давления вокруг одиночной сферической капли воды в воздухе при падении плоской волны для различных значений волнового радиуса  $ka$

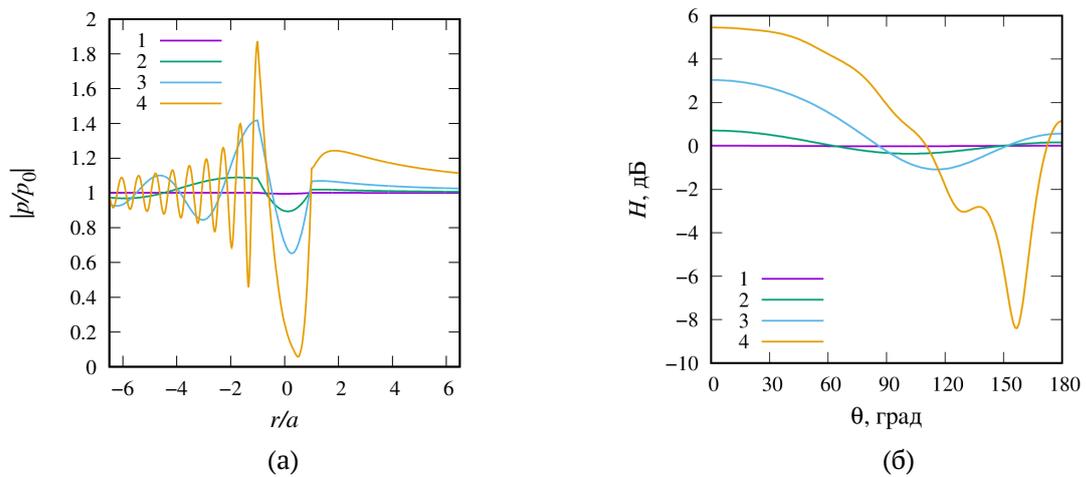


Рис. 15. Нормированная амплитуда давления вблизи одиночной сферической капли воды в воздухе на оси  $Oy$  (а) и зависимость функции отклика  $H$  на поверхности сферы от угла  $\theta$  (б) при падении плоской волны для различных значений волнового радиуса: 1 –  $ka = 0.1$ ; 2 –  $ka = 0.5$ ; 3 –  $ka = 1$ ; 4 –  $ka = 5$

сферы) для двух видов внешнего воздействия: сферической волны от монополюсного источника излучения и плоской волны. Методика разложения по мультиполям в случае звуконепроницаемой сферы с произвольным акустическим импедансом [2] обобщена на случай звукопроницаемой сферы, поскольку данная методика позволяет достичь высокой точности получаемых результатов и минимизировать машинное время. Получены формулы разложения для двух частных случаев внешнего поля. Проведено сравнение результатов расчетов настоящей работы с экспериментальными данными работы [7], получено хорошее соответствие.

Представлены обобщенные формулы для основной характеристики поля рассеяния — полного сечения рассеяния — для звукопроницаемой сферы и двух видов внешнего воздействия. Проведен численный анализ влияния таких физических параметров внешней и внутренней сред на данную характеристику как скорость звука и плотность при изменении значения волнового радиуса  $ka$ . Показано, что на рассеяние звуковой волны существенным образом влияет различие в скорости звука сред вне и внутри сферы, в то время, как различие в плотности этих сред имеет несущественное значение.

Проведен численный параметрический анализ распределения давления вокруг одиночной звукопроницаемой сферы для различных значений волнового радиуса  $ka$ , плотности сред  $\rho_0$  и  $\rho_1$ , а также скорости звука сред  $c_0$  и  $c_1$ . Показано, что в случае газового пузырька ( $\rho_1 \ll \rho_0$ ) при  $ka \ll 1$  имеет место резонанс, а при больших значениях  $ka$  рассеяние от пузырька становится близко к рассеянию от мягкой звукопроницаемой сферы. А в случае капли жидкости в газе ( $\rho_1 \gg \rho_0$ ) при больших значениях  $ka$  рассеяние близко к рассеянию жесткой звуконепроницаемой сферы. В том слу-

чае, когда внутри и вне сферы находятся жидкости с различными значениями плотности и скорости звука ( $\rho_1 \neq \rho_0, c_1 \neq c_0$ ) при определенных значениях параметров возможно появление «теневого» зоны за сферой (пятно Пуассона) или, наоборот, «освещение» зоны, когда капля представляет собой сферическую жидкую линзу.

Полученные результаты в дальнейшем будут использоваться для проведения тестовых расчетов для обобщенной задачи акустического рассеяния множества звукопроницаемых сфер (как коаксиальных, так и произвольно расположенных в пространстве).

## Список литературы

- [1] Насибуллаева Э.Ш. Исследование рассеяния от звукопроницаемой одиночной сферы при внешнем воздействии // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2017. Т. 12, № 1. С. 73–82. (DOI: [10.21662/uim2017.1.011](https://doi.org/10.21662/uim2017.1.011))
- [2] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from  $N$  spheres using multipole reexpansion // J. Acoust. Soc. Am. 2002. Vol. 112, No. 6. P. 2688–2701. (DOI: [asa.scitation.org/doi/10.1121/1.1517253](https://doi.org/10.1121/1.1517253))
- [3] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.
- [4] Гринченко В.Т., Вовк И.В., Мацыпура В.Т. Основы акустики. Киев: Наукова думка, 2009. 867 с.
- [5] Шендеров Е.Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судострое-ние. 1989. 304 с.
- [6] Duda R.O., Martens W.L. Range dependence of the response of a spherical head model // J. Acoust. Soc. Am. 1998. Vol. 104. Pp. 3048–3058. (DOI: [asa.scitation.org/doi/10.1121/1.423886](https://doi.org/10.1121/1.423886))
- [7] Kapodistrias G., Dahl P.H. Effects of interaction between two bubble scatterers // J. Acoust. Soc. Am. 2000. Vol. 107. Pp. 3006–3017. (DOI: [asa.scitation.org/doi/10.1121/1.429330](https://doi.org/10.1121/1.429330))
- [8] Zhang S., Jin J. Computation of special functions. NY: Wiley-Interscience, 1996. 717 p.



## The study of acoustic scattering from a single sound-permeable sphere

Nasibullaeva E.Sh.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa

The paper presents a generalized mathematical model and numerical investigation of the problem of acoustic scattering from a single sound-permeable sphere during the passage of two types of waves - spherical from a monopole radiation source and a plane one. In solving the Helmholtz equation, a numerical technique based on the fast method of multipoles is used, which allows achieving high accuracy of the results obtained at the lowest cost of computer time. The calculations are compared with known experimental data and a good agreement is obtained. The formulas for calculating the main characteristic of the scattering field (the total scattering cross section) for a sound-permeable sphere are generalized. The effect on this characteristic of the physical parameters of media outside and inside the sphere, such as the density and speed of sound, is shown. A numerical parametric analysis of the pressure distribution around a single sound-permeable sphere for different values of the wave radius, density, and speed of sound of the outer and inner medium of the sphere is carried out. The obtained results will later be used for test verification calculations for the numerical solution of the generalized problem of acoustic scattering of a set of sound-permeable spheres (coaxial or arbitrarily located in space).

**Keywords:** acoustic scattering, a monopole radiation source, a plane wave, a sound-permeable sphere, a total scattering cross section



## К теории нагнетания гидратообразующего газа в снежный массив, насыщенный тем же газом

Чиглинцева А.С.<sup>\*,\*\*</sup>, Шагапов В.Ш.<sup>\*,\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup>Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

<sup>\*\*</sup>Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа

<sup>\*\*\*</sup>Институт механики и машиностроения ФИЦ КазНЦ РАН, Казань

Построена математическая модель процесса образования газогидрата при нагнетании газа в снежный массив, насыщенный тем же газом. В осесимметричной постановке получены аналитические решения для распределения полей температур, давлений и насыщенных фаз. Показано, что появление различных характерных зон в снежном массиве зависит от исходного состояния системы «газ–снег», определяемое температурой и давлением, и массового расхода нагнетаемого газа. Установлено, что увеличение интенсивности нагнетания газа (дебита газа) приводит к росту как протяженности объемной зоны образования гидрата, так и к увеличению доли гидрата на границе, разделяющей ближнюю и промежуточную области.

**Ключевые слова:** газогидрат, снежный массив, фильтрация, автомодельные решения

### 1. Введение

Газовые гидраты представляют собой твердые кристаллические соединения (клатраты), образованные молекулами воды и основными компонентами природного газа [1]. Известно, что газогидраты можно использовать как удобную форму для хранения и утилизации парниковых, радиоактивных, промышленных и других газов, тем самым предотвращая выбросы вредных веществ в атмосферу [2, 3]. Так, в 2003 году в Японии компания Mitsui Engineering Shipbuilding (MES) впервые в мире разработала демонстрационный наземный проект по транспортировке и хранению природного газа в форме гидратных гранул. В 2009 году MES совместно с Chugoku Electric Power построили первую в мире производственную установку для гидрата природного газа мощностью до 5 тонн в сутки [3].

### 2. Постановка задачи и основные уравнения

Полагается, что имеется однородный горизонтальный снежный массив постоянной толщины и неограниченной протяженности, насыщенный в исходном состоянии газом  $S_{g0}$  при давлении  $p_0$  и температуре  $T_0$ , соответствующих термодинамическим условиям существования данных фаз в свободном состоянии. При этом полагаем, что для исходного состояния системы «газ–лед» начальная температура находится ниже точки плавления льда и давление меньше равновесного давления фазовых переходов  $p_s(T_0)$  системы «газ–лед–гидрат».

Полагаем, что кровля и подошва массива непроницаемы и являются слабыми проводниками тепла. Пусть в массиве пробурена скважина радиуса  $r = r_w$ , вскрывшая массив на всю толщину. Представляется, что через скважину закачивается холодный газ с постоянным массовым расходом  $Q_g$ , отнесенным на единицу длины скважины (текущее давление на границе скважины  $p_w$ ), и постоянной температурой  $T_w$  [4].

В зависимости от интенсивности нагнетания газа, определяемой значением массового расхо-

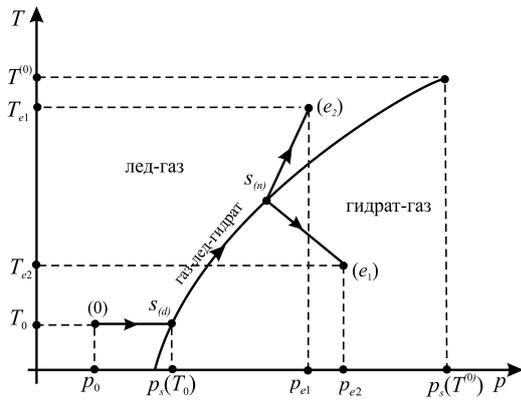


Рис. 1. Иллюстрация режимов нагнетания газа в снежный массив

да, будем полагать, что в области фильтрации газа могут возникать различные характерные зоны. Если нагнетание газа происходит при термобарических условиях, отмеченных на фазовой диаграмме ( $p - T$ ) точкой ( $e_1$ ) (рис. 1), то в этом случае ближняя область ( $e_1 - S_{(n)}$ ), примыкающая к скважине, будет насыщена фазами газа и гидрата, а в случае, когда состояние нагнетаемого газа задается точкой ( $e_2$ ), что соответствует условию отсутствия гидратообразования, то, полагаем, что образуется область ( $e_2 - S_{(n)}$ ), насыщенная льдом и газом. Далее формируется промежуточная область ( $S_{(n)} - S_{(d)}$ ), в которой газ и лед переходят в состав гидрата, и дальняя ( $S_{(d)} - 0$ ), заполненная исходными фазами газа и льда [5–7].

Снег и гидрат будем считать несжимаемыми, а газ — калорически совершенным:

$$\rho_i, \rho_h = \text{const}, \quad p = \rho_g R_g T. \quad (1)$$

Система основных уравнений, описывающая процессы фильтрации и теплопереноса, сопровождающиеся переходом газа и льда в гидратное состояние, и представляющая собой законы сохранения масс газа, снега и притока тепла, закон Дарси, в осесимметричном приближении примет вид [5–11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (S_g \rho_g) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_g \rho_g v_g) &= -\rho_h G \frac{\partial S_h}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial t} (S_i \rho_i) &= -\rho_h (1 - G) \frac{\partial S_h}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho c T) + \rho_g c_g S_g v_g \frac{\partial T}{\partial r} &= \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \rho_h l_h \frac{\partial S_h}{\partial t}, \\ S_g v_g &= -\frac{k_g}{\mu_g} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad S_g + S_i + S_h = 1, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \rho c &= \rho_g S_g c_g + \rho_h S_h c_h + \rho_i S_i c_i, \\ \lambda &= \lambda_g S_g + \lambda_h S_h + \lambda_i S_i. \end{aligned}$$

где  $G$  — массовая концентрация газа в гидрате;  $\rho_j$  и  $S_j$  ( $j = h, i, g$ ) — истинные плотности и насыщенности  $j$ -й фазы; индексы  $h, i$  и  $g$  относятся к гидрату, снегу и газу;  $v_g, k_g, c_g$  и  $\mu_g$  — соответственно скорость, проницаемость, удельная теплоемкость при постоянном объеме и динамическая вязкость газовой фазы;  $t$  — время;  $p$  — давление;  $T$  — температура;  $l_h$  — удельная теплота образования гидрата, отнесенная на единицу его массы;  $\rho c$  и  $\lambda$  — удельная теплоемкость в единице объема и коэффициент теплопроводности системы «газ–лед–гидрат».

Поскольку здесь рассматриваются достаточно большие масштабы времени, которые значительно превышают характерное время диффузионной кинетики процесса, то в работе принимается равновесная схема образования гидрата, предполагающая, что его интенсивность лимитируется отводом скрытой теплоты гидратообразования [12]. Поэтому в зоне, где одновременно находятся лед, газ и гидрат, должно выполняться условие фазового равновесия [12–14]:

$$T_s(p) = T_{(s0)} + T_* \ln \left( p / p_{(s0)} \right), \quad (3)$$

где  $T_{(s0)}, T_*, p_{(s0)}$  — эмпирические параметры, зависящие как от вида газогидрата, так и от рассматриваемых диапазонов температур и давлений ( $T_{(s0)}$  — равновесная температура при  $p = p_{(s0)}$ ) [1].

На границах раздела между рассматриваемыми зонами, где терпят скачки насыщенности фаз, а также потоки массы и тепла, выполняются соотношения, следующие из условий баланса массы и тепла [4–10]:

$$\begin{aligned} \left[ (S_h \rho_h (1 - G) + S_i \rho_i) \dot{r}_{(s)} \right] &= 0, \\ \left[ \rho_g S_g (v_g - \dot{r}_{(s)}) - \rho_h S_h G \dot{r}_{(s)} \right] &= 0, \\ \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right] &= \left[ \rho_h l_h S_h \dot{r}_{(s)} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $[\psi]$  — скачок параметра  $\psi$  на границе между зонами  $r = r_{(s)}$  ( $s = n, d$ );  $\dot{r}_{(s)}$  — скорость движения этой границы;  $s = n$  — относится к границе между ближней и промежуточной областями;  $s = d$  — к границе между промежуточной и дальней областями.

С учетом закона Дарси (четвертое уравнение(2)) и уравнения состояния для газа (1) условия на границе скважины ( $r = r_w$ )

запишем в виде [4, 10]:

$$\begin{aligned} -\frac{k_g \pi}{\mu_g R_g T_g} \left( r \frac{\partial p^2}{\partial r} \right) &= Q_g = \text{const}, \\ T_w = T_e = \text{const}, \quad (r_w \rightarrow 0, t > 0). \end{aligned} \quad (5)$$

Задача имеет автомодельное решение. Введем следующую автомодельную переменную [15, 16]:

$$\xi = r / \left( 2\sqrt{\chi_0^{(p)} t} \right),$$

где  $\chi_0^{(p)} = k_g p_0 / (S_{g0} \mu_g)$  – коэффициент пьезопроводности.

Пренебрегая переменностью температуры в ближней зоне и применяя линеаризацию Лейбензона [5, 9], систему (2) можно привести к виду:

$$\begin{aligned} -\left( \xi + \frac{S_{g0}}{2S_{ge}} \frac{1}{\xi} \right) \frac{dp_{(1)}^2}{d\xi} &= \frac{S_{g0}}{2S_{ge}} \frac{d^2 p_{(1)}^2}{d\xi^2}, \\ -\xi \frac{dT_{(1)}}{d\xi} &= \frac{\text{Pe}_{(1)} \phi_{(1)}}{p_0^2} \frac{dp_{(1)}^2}{d\xi} \frac{dT_{(1)}}{d\xi} + \\ &+ 2\phi_{(1)} \left( \frac{1}{\xi} \frac{dT_{(1)}}{d\xi} + \frac{d^2 T_{(1)}}{d\xi^2} \right), \\ -\left( \xi + \frac{1}{2\xi} \right) \frac{dp_{(3)}^2}{d\xi} &= \frac{1}{2} \frac{d^2 p_{(3)}^2}{d\xi^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\phi_{(1)} = \chi^{(T)} / 4\chi_0^{(p)}$ ;  $\text{Pe}_{(1)} = \rho_{g0} c_g k_g p_0 / (\lambda_{(1)} \mu_g)$  – число Пекле;  $\chi^{(T)} = \lambda_{(1)} / (\rho c)$  – коэффициент температуропроводности. Здесь и в дальнейшем, нижние индексы 1, 2 и 3 относятся к ближней, промежуточной и дальней зонам соответственно.

Для распределений давления и температуры в ближней зоне ( $0 < \xi < \xi_{(n)}$ ), проинтегрировав первое и второе уравнения (6), с учетом (5) получим следующие решения:

$$\begin{aligned} p_{(1)}^2 &= p_{(n)}^2 + \frac{Q_g \mu_g R_g T_g}{k_g \pi} \int_{\xi}^{\xi_{(n)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{\eta_{(1)}}\right) d\xi, \\ T_{(1)} &= T_{(n)} + \\ &+ \frac{(T_g - T_{(n)}) \int_{\xi}^{\xi_{(n)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\phi_{(1)}} - \frac{\text{Pe}_{(1)}}{2p_0^2} p_{(1)}^2\right) d\xi}{\int_0^{\xi_{(n)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\phi_{(1)}} - \frac{\text{Pe}_{(1)}}{2p_0^2} p_{(1)}^2\right) d\xi}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\eta_{(1)} = S_{g0} / S_{g(e)}$ .

Для дальней зоны ( $\xi_{(d)} < \xi < \infty$ ) с учетом на-

чальных условий (1) можно записать:

$$p_{(3)}^2 = p_0^2 + \frac{(p_{(d)}^2 - p_0^2) \int_{\xi}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp(-\xi^2) d\xi}{\int_{\xi_{(d)}}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp(-\xi^2) d\xi}.$$

Для промежуточной зоны уравнения в автомодельной переменной запишутся в следующем виде:

$$\frac{d^2 p_{(2)}}{d\xi^2} = \frac{B \frac{dp_{(2)}}{d\xi} + C \left( \frac{dp_{(2)}}{d\xi} \right)^2}{A}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{dS_{h(2)}}{d\xi} &= -\frac{1}{\tilde{\rho} \xi R_g T_s(p_{(2)})} \left[ \frac{k_g}{2\mu_g \chi_0^{(p)}} \times \right. \\ &\times \left( p_{(2)} \frac{d^2 p_{(2)}}{d\xi^2} + \left( 1 - \frac{T_*}{T_s(p_{(2)})} \right) \times \right. \\ &\times \left. \left( \frac{dp_{(2)}}{d\xi} \right)^2 + \frac{p_{(2)}}{\xi} \frac{dp_{(2)}}{d\xi} \right) + \\ &\left. + S_g \xi \left( 1 - \frac{T_*}{T_s(p_{(2)})} \right) \left( \frac{dp_{(2)}}{d\xi} \right) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\chi_0^{(p)}} \left( \lambda + \frac{\rho_h l_h p_{(2)}^2 k_g}{\tilde{\rho} R_g T_s(p_{(2)}) T_* \mu_g} \right), \\ B &= -2\rho c \xi - \frac{\lambda}{\xi \chi_0^{(p)}} - \frac{\rho_h l_h p_{(2)}}{\tilde{\rho} R_g T_s(p_{(2)}) T_*} \times \\ &\times \left( \frac{k_g p_{(2)}}{\mu_g \xi \chi_0^{(p)}} + \frac{2S_g (T_s(p_{(2)}) - T_*) \xi}{T_s(p_{(2)})} \right), \\ C &= \frac{1}{\chi_0^{(p)}} \left( \frac{\lambda}{p_{(2)}} - \frac{p_{(2)} k_g c_g}{R_g \mu_g T_s(p_{(2)})} - \right. \\ &\left. \frac{\rho_h l_h p_{(2)} k_g (T_s(p_{(2)}) - T_*)}{\tilde{\rho} R_g T_s^2(p_{(2)}) T_* \mu_g} \right). \end{aligned}$$

Условия (4) для ближней границы ( $\xi = \xi_{(n)}$ ) в автомодельных координатах примут вид:

$$\begin{aligned} -\left( \frac{dp}{d\xi} \right)_{(n)}^- + \left( \frac{dp}{d\xi} \right)_{(n)}^+ &= \frac{2\chi_0^{(p)} \mu_g}{k_g} \left( (S_{g(n)}^- - \right. \\ &\left. - S_{g(n)}^+) + \frac{\rho_h G}{\rho_{g(n)}} (S_{h(n)}^- - S_{h(n)}^+) \right) \xi_{(n)}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{(1)} \left( \frac{dT}{d\xi} \right)_{(n)}^- - \lambda_{(2)} \left( \frac{dT}{d\xi} \right)_{(n)}^+ &= \\ = 2\rho_h l_h \chi_0^{(p)} (S_{h(n)}^- - S_{h(n)}^+) \xi_{(n)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя аналитические решения (7), условия (10) и (11) можно привести к виду:

$$\begin{aligned} & \frac{Q_g \mu_g R_g T_g}{2p_{(n)} k_g \pi \xi_{(n)}} \exp\left(-\frac{\xi_{(n)}^2}{\eta_{(1)}}\right) + q_{(n)} = \\ & = \frac{2\chi_0^{(p)} \mu_g \xi_{(n)}}{k_g} \left( (S_{g(n)}^- - S_{g(n)}^+) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\rho_h G}{\rho_g(n)} (S_{h(n)}^- - S_{h(n)}^+) \right), \quad (12) \\ & \frac{\lambda_{(1)} (T_{(n)} - T_g) \frac{1}{\xi_{(n)}} \exp\left(-\frac{\xi_{(n)}^2}{4\Phi_{(1)}} - \frac{Pe_{(1)} p_{(n)}^2}{2p_0^2}\right)}{\int_0^{\xi_{(n)}} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\Phi_{(1)}} - \frac{Pe_{(1)} p_{(1)}^2}{2p_0^2}\right) d\xi} \\ & - \lambda_{(2)} \frac{T_* q_{(n)}}{p_{(n)}} = 2\rho_h l_h \chi_0^{(p)} (S_{h(n)}^- - S_{h(n)}^+) \xi_{(n)}, \quad (13) \\ & q_{(n)} = \left( \frac{dp_{(2)}}{d\xi} \right)_{\xi_{(n)}}. \end{aligned}$$

Условия (12) и (13) с учетом выражения (3) на ближней границе  $\xi = \xi_{(n)}$  связывают неизвестный параметр  $q_{(n)}$ , значение координаты границы  $\xi_{(n)}$  и значение давления на ней  $p_{(n)}$ .

Для промежуточной области ( $\xi_{(n)} \leq \xi \leq \xi_{(d)}$ ) уравнения, представляющие собой систему из трех обыкновенных дифференциальных уравнений (8) и (9), можно записать в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{dp_{(2)}}{d\xi} = q, \quad \frac{dq}{d\xi} = \frac{Bq + Cq^2}{A}, \\ & \frac{dS_{h(2)}}{d\xi} = -\frac{1}{\tilde{\rho} \xi R_g T_s(p_{(2)})} \left[ \frac{k_g}{2\mu_g \chi_0^{(p)}} \left( p_{(2)} \frac{dq}{d\xi} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left( 1 - \frac{T_*}{T_s(p_{(2)})} \right) q^2 + \frac{p_{(2)}}{\xi} q \right) + \right. \\ & \quad \left. + S_g \xi \left( 1 - \frac{T_*}{T_s(p_{(2)})} \right) q \right]. \quad (14) \end{aligned}$$

Счет по системе обыкновенных дифференциальных уравнений (14) начинается от правой границы  $\xi = \xi_{(d)}$ , значение которой выбирается произвольным образом, в сторону левой границы  $\xi = \xi_{(n)}$  с отрицательным шагом [5–7]. За начальные данные Коши на дальней границе  $\xi = \xi_{(d)}$  можно взять следующие величины:

$$p_{(d)} = p_s(T_0), \quad q_{(d)} = \left( \frac{dp}{d\xi} \right)_{(d)}^+, \quad S_h = 0.$$

Численное решение задачи было реализовано методом стрельбы. Каждый вариант счета и «пристрелка» по параметру  $\xi_{(d)}$  продолжались соответственно до выполнения условий (12) и (13) [5–7].

### 3. Результаты расчетов

Для параметров, определяющих свойства фаз снега, газа и гидрата, были приняты следующие значения:

$$\begin{aligned} & \rho_i = 900 \text{ кг/м}^3; \rho_h = 910 \text{ кг/м}^3; \\ & c_g = 1650 \text{ Дж/(кг·К)}; c_i = 2090 \text{ Дж/(кг·К)}; \\ & c_h = 2200 \text{ Дж/(кг·К)}; \lambda_g = 0.03 \text{ Вт/(м·К)}; \\ & \lambda_i = 2 \text{ Вт/(м·К)}; \lambda_h = 0.5 \text{ Вт/(м·К)}; \\ & l_h = 1.45 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}; G = 0.12; \\ & \mu_g = 9.5 \cdot 10^{-6} \text{ Па·с}; k_g = 10^{-15} \text{ м}^2; \\ & R_g = 520 \text{ Дж/(кг·К)}; T_{(s0)} = 263 \text{ К}; \\ & p_{(s0)} = 1.86 \text{ МПа}; T_* = 30 \text{ К}. \end{aligned}$$

В качестве исходных значений давления, температуры и снегонасыщенности массива принимались следующие параметры:  $p_0 = 0.1$  МПа,  $T_0 = 225$  К,  $S_{i0} = 0.3$ .

На рис. 2 представлены результаты расчетов для двух режимов нагнетания газа в снежный массив, насыщенный тем же газом (метаном). Видно, что в случае нагнетания газа при термобарических условиях, соответствующих образованию гидрата, образуется зона, насыщенная газом и гидратом (рис. 2(а)), а в случае, когда состояние нагнетаемого газа соответствует условию отсутствия гидратообразования, то появляется область, насыщенная льдом и газом (рис. 2(б)). Далее образуется промежуточная область, в которой газ и лед переходят в состав гидрата, и дальняя, заполненная исходными фазами газа и льда. Из рис. 2 также видно, что увеличение массового расхода нагнетаемого газа для обоих режимов приводит к росту как протяженности объемной зоны образования гидрата, так и к увеличению гидратонасыщенности на ближней границе.

### 4. Заключение

Построены автотомельные решения для осесимметричной задачи, описывающие распределения основных параметров в массиве. Показано, что в снежном массиве, насыщенном газом, в зависимости от термобарических условий нагнетания этого же газа возможно образование трех характерных зон в области фильтрации. Установлено, что с увеличением массового расхода газа протяженность объемной зоны образования гидрата и доля гидрата на границе между ближней и промежуточной зонами увеличиваются.

### Список литературы

- [1] Истомин В.А., Якушев В.С. Газовые гидраты в природных условиях. М.: Недра, 1992, 236 с.
- [2] Бондарев Э.А., Рожин И.И., Попов В.В., Аргунова К.К. Оценка возможности подземного хранения гидратов природного газа в зоне многолетней мерзлоты // Криосфера Земли. 2015. Т. XIX, № 4. С. 64–74. (<http://www.izdatgeo.ru/pdf/krio/2015-4/64.pdf>)

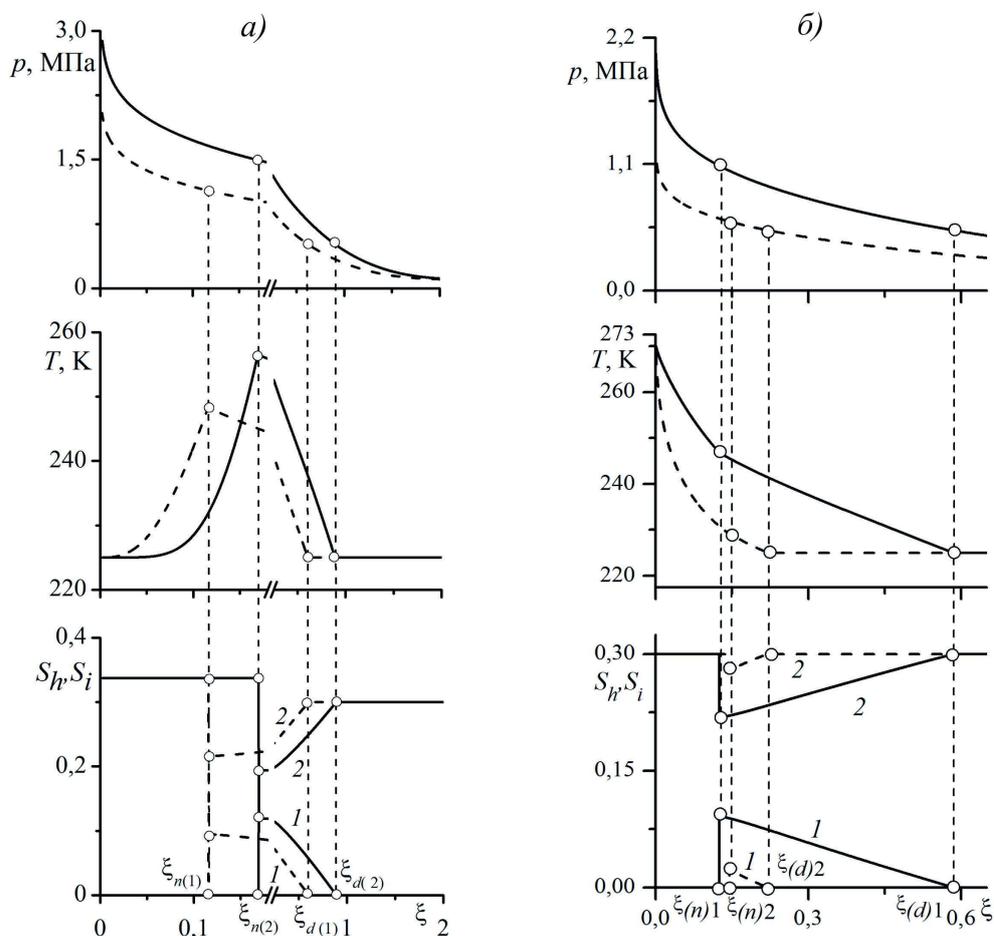


Рис. 2. Распределения давления, температуры и насыщенностей гидрата (1), снега (2) в массиве для двух режимов нагнетания газа при различных значениях массового расхода газа  $Q_g$ : а)  $2 \cdot 10^{-3}$  кг/(м·с) (штриховая линия),  $4 \cdot 10^{-3}$  кг/(м·с) (сплошная линия); б)  $5 \cdot 10^{-4}$  кг/(м·с) (штриховая линия),  $15 \cdot 10^{-4}$  кг/(м·с) (сплошная линия)

- [3] Nakai S. Development of Natural Gas Hydrate (NGH) Supply Chain // Proceedings, 25th World Gas Conference, Kuala Lumpur, Malaysia, 4-8 June. 2012. Pp. 3040–3050.
- [4] Shagapov V.Sh., Khasanov M.K., Musakaev N.G. Formation of a gas hydrate due to injection of a cold gas into a porous reservoir partly saturated by water // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2008. V. 49, №. 3. Pp. 462–472. (DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer. 2015.01.105)
- [5] Шагапов В.Ш., Чиглинцева А.С. О нагнетании гидратообразующего газа в снежный массив, насыщенный тем же газом, при переходе через точку плавления льда // Теплофизика и аэромеханика. 2018. Т. 25, №. 1. С. 89–104. (DOI: 10.1134/S0869864318010080)
- [6] Чиглинцева А.С. Автомодельное решение задачи образования гидрата в снежном массиве // Вычислительная механика сплошных сред. 2017. Т. 10, №. 2. С. 212–224. (DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.2.18)
- [7] Чиглинцева А.С. Автомодельная задача о нагнетании гидратообразующего холодного газа в снежный массив, насыщенный тем же газом // Неравновесные процессы в сплошных средах: материалы междунар. симп.: в 2 т. / Перм. гос. нац. исслед. ун-т. Пермь. 2017. Т. 2. С. 236–238.
- [8] Чиглинцева А.С., Шагапов В.Ш. О нагнетании гидратообразующего газа в пласт снега, насыщенный тем же газом // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2017. Т. 12, №. 2. С. 219–226. (DOI: 10.21662/uim2017.2.033)
- [9] Хасанов М.К. Исследование режимов образования газогидратов в пористой среде, частично насыщенной льдом // Теплофизика и аэромеханика. 2015. Т. 22, №. 2. С. 255–266. (DOI: 10.1134/S0869864315020109)
- [10] Шагапов В.Ш., Мусакаев Н.Г. Динамика образования и разложения гидратов в системах добычи, транспортировки и хранения газа. М.: Наука, 2016. 238 с.
- [11] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред: в 2 ч. М.: Наука, 1987.
- [12] Шагапов В.Ш., Чиглинцева А.С., Русинов А.А. Теоретическое моделирование процесса извлечения газа из пористого газогидратного резервуара частично насыщенного газом с учетом теплового взаимодействия с окружающими породами // Теоретические основы химической технологии. 2016. Т. 50, №. 4. С. 452–462. (DOI: 10.7868/S004035711604014X)

- [13] Шагапов В.Ш., Чиглинцева А.С., Русинов А.А. Математическое моделирование процесса образования гидрата в пласте насыщенного снегом при нагнетании холодного газа // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9, №. 2. С. 173–181.  
(DOI: [10.7242/1999-6691/2016.9.2.15](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.2.15))
- [14] Шагапов В.Ш., Чиглинцева А.С., Белова С.В. К теории процесса образования газогидрата в замкнутом теплоизолированном объеме, опрессованном метаном // Инженерно-физический журнал. 2017. Т. 90, №. 5. С. 1208–1222.  
(DOI: [10.1007/s10891-017-1669-8](https://doi.org/10.1007/s10891-017-1669-8))
- [15] Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Запихаева М.Н. Моделирование процесса образования льда при инъекции воды в пористую среду, насыщенную льдом и газом // Вестник Башкирского университета. 2013. Т. 18, №. 1. С. 22–26.  
([https://elibrary.ru/download/elibrary\\_18956893\\_55543496.pdf](https://elibrary.ru/download/elibrary_18956893_55543496.pdf))
- [16] Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Запихаева М.Н. Моделирование процесса образования льда при нагнетании воды в сухую пористую среду // Известия Уфимского научного центра РАН. 2016. №. 4. С. 14–18.  
([https://elibrary.ru/download/elibrary\\_27521020\\_53771951.pdf](https://elibrary.ru/download/elibrary_27521020_53771951.pdf))



## The theory of injection of a hydrate-forming gas into a snow massif saturated with the same gas

Chiglintseva A.S.<sup>\*,\*\*</sup>, Shagapov V.Sh.<sup>\*,\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup>Mavlutov Institute of Mechanics, UFRS RAS, Ufa

<sup>\*\*</sup>Ufa State Petroleum Technological University, Ufa

<sup>\*\*\*</sup>Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Scientific Center of the RAS, Kazan

The mathematical model of the process of gas hydrate formation during gas injection into a snow massif, saturated with the same gas, is constructed. In axisymmetric formulation, analytical solutions are obtained for the distribution of temperature fields, pressures and phase saturations. It is shown that the appearance of various characteristic zones in a snow massif depends on the initial state of the gas – snow system, determined by temperature and pressure, and the mass flow rate of the injected gas. It has been established that an increase in the intensity of gas injection (gas flow rate) leads to an increase in both the length of the bulk zone of hydrate formation and the increase in the fraction of hydrate at the boundary separating the near and intermediate zones.

**Keywords:** gas hydrate, snow massif, filtration, self-similar solutions



## Определение локальной неоднородности среды по собственным частотам колебаний струны

Утяшев И.М. \*, Ахтямов А.М.\*\*\*

\*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

\*\*Башкирский государственный университет, Уфа

В работе рассматривается задача определения локальной неоднородности среды по собственным частотам колебания струны. Неоднородность моделируется тремя участками: в первом и третьем среда однородная, а в среднем – упругие характеристики моделируются квадратичной функцией. Данная модель реализована с помощью условий сопряжения на границе сред. Показано, что для идентификации центра неоднородности и определения ее размеров достаточно двух собственных частот, причем в случае жесткого закрепления обоих концов струны решение задачи двойственно. Задача решается разложением фундаментальной системы решений в степенной ряд по переменным  $x$  и  $\lambda$ . Приведены оценки погрешности метода.

**Ключевые слова:** собственные числа, обратная задача, Штурма–Лиувилля, потенциал, струна, условия сопряжения, характеристический определитель

### 1. Введение

В настоящей работе предлагается моделирование неоднородности среды в виде квадратичной функции. В частности, рассматриваются поперечные колебания струны длиной  $l$ , описываемые уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - p(x)u, \quad (1)$$

с жестко закрепленными концами

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0.$$

В уравнении (1) неоднородность среды описывается квадратичным потенциалом вида:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in (0, x_c - r), \\ r^2 - (x - x_c)^2, & \text{при } x \in (x_c - r, x_c + r), \\ 0, & \text{при } x \in (x_c + r, l), \end{cases}$$

где  $x_c$  – центр неоднородности, а  $r$  – ее радиус.

Приводя значения  $x$  к безразмерным величинам  $\xi = x/l$ , и используя замены  $u(\xi, t) = y(\xi) \cos(\omega t)$ ,  $\lambda = \frac{\omega^2 l^2}{c^2}$ ,  $q(\xi) = p(\xi) \frac{l^2}{c^2}$ ,  $a = \frac{x_c}{l}$ ,  $\varepsilon = \frac{r}{l}$  приходим к задаче Штурма–Лиувилля:

$$-y'' + q(\xi)y = \lambda y, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad (2)$$

где

$$q(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi \in (0, a - \varepsilon), \\ \varepsilon^2 - (\xi - a)^2 & \text{при } \xi \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon), \\ 0 & \text{при } \xi \in (a + \varepsilon, 1). \end{cases} \quad (3)$$

В 1929 году В.А. Амбарцумян [1] показал, что для краевой задачи с дифференциальным уравнением

$$ly = -y'' + q(\xi)y = \lambda y,$$

и краевыми условиями  $y'(0) = y'(\pi) = 0$ , где  $q(\xi)$  – действительная непрерывная функция, и если  $\lambda_n = n^2$ , ( $n = 0, 1, \dots$ ), то  $q(\xi) \equiv 0$ . То есть показано, что если спектр уравнения  $y'' + \lambda y = 0$

при тех же краевых условиях сохранился, то возмущение отсутствует. В 1946 г. Г. Борг [2] показал (см. также [3]), что один спектр не определяет уравнения, случай Амбарцумяна оказывается исключением. Г. Боргом были рассмотрены способы построения уравнения по двум спектрам. Эти результаты носят условный характер, так как предполагается существование дифференциального уравнения, для которого данные две последовательно собственные числа являются спектрами. В 50-х и 60-х годах XX века в работах Б.М. Левитана и М.Г. Гасимова [4, 5] было показано, что оператор Штурма–Лиувилля с дискретным спектром однозначно определяется двумя спектрами краевых задач с различным граничным условием в нулевой точке и одним и тем же условием на другом конце. В частности, непрерывная функция  $q(\xi)$  может быть однозначно определена по спектрам двух задач Штурма–Лиувилля  $L_0$  и  $L_1$ :

Задача  $L_0$ :

$$ly = -y'' + q(\xi)y = \lambda y, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Задача  $L_1$ :

$$ly = -y'' + q(\xi)y = \lambda y, \quad y'(0) = y(1) = 0.$$

После публикации классических монографий В.А. Марченко [6] и Б.М. Левитана [7], где потенциал  $q(\xi)$  представлял собой либо непрерывную, либо суммируемую функцию, основные усилия ученых были направлены на обобщение полученных результатов как в направлении восстановления более общих потенциалов и дифференциальных уравнений [8–11], так и в направлении использования более общих краевых условий [12–18]. Во всех этих работах для восстановления непрерывной функции или более общей функции  $q(\xi)$  требуется как минимум два бесконечных набора собственных чисел. Однако для задач физики и механики такой подход малоэффективен, так как в реальности с помощью частотомеров можно определить лишь конечные наборы собственных частот. К тому же, как правило, об идентифицируемом объекте имеется некоторая дополнительная информация, которая позволяет конкретизировать класс искомым функций. Поэтому возникает задача идентификации потенциала специального вида по конечному числу собственных частот. Тем не менее эффективных методов решения этой задачи предложено не было. Ранее авторами настоящей работы решались задачи идентификации видов и параметров краевых условий по конечному числу собственных частот [19, 20]. Для идентификации краевых условий для краевой задачи с переменным потенциалом был предложен метод разложения в ряд Тейлора

по двум переменным  $\xi$  и  $\lambda$  фундаментальной системы решений. В работе [20] отмечено, что если разложить в ряды фундаментальные решения задачи Штурма–Лиувилля с переменным потенциалом  $q(\xi)$ , то краевые условия можно достаточно точно восстановить по собственным значениям, используя только главную часть ряда. В работе [21] аналогичным методом решена коэффициентная обратная задача по восстановлению линейного потенциала вида  $q(x) = q_0 + q_1x$ . В настоящей работе этот метод предлагается использовать для восстановления квадратичного потенциала вида (3).

## 2. Прямая задача. Определение собственных значений

В настоящей работе задача (2) представляет собой частный случай задачи  $L_0$  с потенциалом (3). Надо иметь в виду, что в точках  $\xi = a - \varepsilon$  и  $\xi = a + \varepsilon$  перехода от одной функции к другой должны выполняться условия сопряжения, выражающие условия непрерывности решения задачи (2). Для правильной записи этих условий обозначим через  $y_1(\xi, \lambda)$  решение задачи (2) на сегменте  $(0, a - \varepsilon)$ , через  $y_2(\xi, \lambda)$  — на сегменте  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , а через  $y_3(\xi, \lambda)$  — на сегменте  $(a + \varepsilon, 1)$ . Тогда условия сопряжения могут быть записаны следующим образом:

$$y_1(a - \varepsilon) = y_2(a - \varepsilon), \quad y_1'(a - \varepsilon) = y_2'(a - \varepsilon), \quad (4)$$

$$y_2(a + \varepsilon) = y_3(a + \varepsilon), \quad y_2'(a + \varepsilon) = y_3'(a + \varepsilon). \quad (5)$$

Общими решениями на соответствующих сегментах будут следующие функции:

$$y_1 = C_{11}y_{11} + C_{12}y_{12}, \quad y_2 = C_{21}y_{21} + C_{22}y_{22},$$

$$y_3 = C_{31}y_{31} + C_{32}y_{32},$$

где  $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}, C_{31}$  и  $C_{32}$  — произвольные константы, а  $y_{i1}, y_{i2}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — линейно независимые решения дифференциального уравнения задачи (2), удовлетворяющие условиям:

$$y_{i1}(0) = 1, \quad y_{i1}'(0) = 0, \quad y_{i2}(0) = 0, \quad y_{i2}'(0) = 1. \quad (6)$$

Из (2) и (6) следует

$$y_{11}(x, \lambda) = y_{31}(x, \lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}x),$$

$$y_{12}(x, \lambda) = y_{32}(x, \lambda) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}, \quad (7)$$

$$y_2(\xi, \lambda) = 1 + (E^2 - a^2 - \lambda) \frac{\xi^2}{2} + \frac{1}{3}a\xi^3 + \left( (E^2 - a^2 - \lambda)^2 - 2 \right) \frac{\xi^4}{24} + (E^2 - a^2 - \lambda) a \frac{\xi^5}{15} + \left( (E^2 - a^2 - \lambda)^3 - 14E^2 + 30a^2 + 14\lambda \right) \frac{\xi^6}{720} \dots \quad (8)$$

$$y_{22}(\xi, \lambda) = \xi + (E^2 - a^2 - \lambda) \frac{\xi^3}{6} + \frac{1}{6} a \xi^4 + \left( (E^2 - a^2 - \lambda)^2 - 6 \right) \frac{\xi^5}{120} + (E^2 - a^2 - \lambda) a \frac{\xi^6}{60} \dots \quad (9)$$

Найдем уравнение для определения собственных значений. Из (2) и (6) следует

$$y_1(0) = C_{11} = 0.$$

Из краевого условия  $y(1) = 0$  (2) и условий сопря-

$$\Delta_0(\lambda) = \begin{vmatrix} y_{12}(a - \varepsilon) & -y_{21}(a - \varepsilon) & -y_{22}(a - \varepsilon) & 0 & 0 \\ y'_{12}(a - \varepsilon) & -y'_{21}(a - \varepsilon) & -y'_{22}(a - \varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & -y_{21}(a + \varepsilon) & -y_{22}(a + \varepsilon) & y_{31}(a + \varepsilon) & y_{32}(a + \varepsilon) \\ 0 & -y'_{21}(a + \varepsilon) & -y'_{22}(a + \varepsilon) & y'_{31}(a + \varepsilon) & y'_{32}(a + \varepsilon) \\ 0 & 0 & 0 & y_{31}(1) & y_{32}(1) \end{vmatrix}$$

соответствующей системы.

Для удобства вычисления понизим порядок данного определителя. Разложив его по первому столбцу, получим:

$$\Delta_0(\lambda) = y_{12}(a - \varepsilon) \cdot \begin{vmatrix} -y'_{21}(a - \varepsilon) & -y'_{22}(a - \varepsilon) & 0 & 0 \\ -y_{21}(a + \varepsilon) & -y_{22}(a + \varepsilon) & y_{31}(a + \varepsilon) & y_{32}(a + \varepsilon) \\ -y'_{21}(a + \varepsilon) & -y'_{22}(a + \varepsilon) & y'_{31}(a + \varepsilon) & y'_{32}(a + \varepsilon) \\ 0 & 0 & y_{31}(1) & y_{32}(1) \end{vmatrix} - y'_{12}(a - \varepsilon) \cdot \begin{vmatrix} -y_{21}(a - \varepsilon) & -y_{22}(a - \varepsilon) & 0 & 0 \\ -y_{21}(a + \varepsilon) & -y_{22}(a + \varepsilon) & y_{31}(a + \varepsilon) & y_{32}(a + \varepsilon) \\ -y'_{21}(a + \varepsilon) & -y'_{22}(a + \varepsilon) & y'_{31}(a + \varepsilon) & y'_{32}(a + \varepsilon) \\ 0 & 0 & y_{31}(1) & y_{32}(1) \end{vmatrix}.$$

Аналогично разложив определители четвертого порядка по первой строке, получим

$$\Delta_0(\lambda) = -y_{12}(a - \varepsilon) \cdot y'_{21}(a - \varepsilon) \cdot \begin{vmatrix} -y_{22}(a + \varepsilon) & y_{31}(a + \varepsilon) & y_{32}(a + \varepsilon) \\ -y'_{22}(a + \varepsilon) & y'_{31}(a + \varepsilon) & y'_{32}(a + \varepsilon) \\ 0 & y_{31}(1) & y_{32}(1) \end{vmatrix} + y_{12}(a - \varepsilon) \cdot y'_{22}(a - \varepsilon) \cdot \begin{vmatrix} -y_{21}(a + \varepsilon) & y_{31}(a + \varepsilon) & y_{32}(a + \varepsilon) \\ -y'_{21}(a + \varepsilon) & y'_{31}(a + \varepsilon) & y'_{32}(a + \varepsilon) \\ 0 & y_{31}(1) & y_{32}(1) \end{vmatrix} + y'_{12}(a - \varepsilon) \cdot y_{21}(a - \varepsilon) \cdot \begin{vmatrix} -y_{22}(a + \varepsilon) & y_{31}(a + \varepsilon) & y_{32}(a + \varepsilon) \\ -y'_{22}(a + \varepsilon) & y'_{31}(a + \varepsilon) & y'_{32}(a + \varepsilon) \\ 0 & y_{31}(1) & y_{32}(1) \end{vmatrix} - y'_{12}(a - \varepsilon) \cdot y_{22}(a - \varepsilon) \cdot \begin{vmatrix} -y_{21}(a + \varepsilon) & y_{31}(a + \varepsilon) & y_{32}(a + \varepsilon) \\ -y'_{21}(a + \varepsilon) & y'_{31}(a + \varepsilon) & y'_{32}(a + \varepsilon) \\ 0 & y_{31}(1) & y_{32}(1) \end{vmatrix}.$$

жения (4) и (5) получим систему:

$$\begin{aligned} C_{12}y_{12}(a - \varepsilon) - C_{21}y_{21}(a - \varepsilon) - C_{22}y_{22}(a - \varepsilon) &= 0, \\ C_{12}y'_{12}(a - \varepsilon) - C_{21}y'_{21}(a - \varepsilon) - C_{22}y'_{22}(a - \varepsilon) &= 0, \\ -C_{21}y_{21}(a + \varepsilon) - C_{22}y_{22}(a + \varepsilon) + \\ + C_{31}y_{31}(a + \varepsilon) + C_{32}y_{32}(a + \varepsilon) &= 0, \\ -C_{21}y'_{12}(a + \varepsilon) - C_{22}y'_{21}(a + \varepsilon) + \\ + C_{31}y'_{31}(a + \varepsilon) + C_{32}y'_{32}(a + \varepsilon) &= 0, \\ C_{31}y_{31}(1) + C_{32}y_{32}(1) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение для определения собственных значений задачи (2) получают из условия существования ненулевого решения для констант  $C_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) системы (10). Ненулевое решение для  $C_{ij}$  существует тогда и только тогда, когда равен нулю определитель

Таким образом, характеристический определитель задачи (2) имеет следующий вид:

$$\Delta_0(\lambda) = - \begin{vmatrix} y_{12}(a-\varepsilon) & y_{21}(a-\varepsilon) \\ y'_{12}(a-\varepsilon) & y'_{21}(a-\varepsilon) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -y_{22}(a+\varepsilon) & y_{31}(a+\varepsilon) & y_{32}(a+\varepsilon) \\ -y'_{22}(a+\varepsilon) & y'_{31}(a+\varepsilon) & y'_{32}(a+\varepsilon) \\ 0 & y_{31}(1) & y_{32}(1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{12}(a-\varepsilon) & y_{22}(a-\varepsilon) \\ y'_{12}(a-\varepsilon) & y'_{22}(a-\varepsilon) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -y_{21}(a+\varepsilon) & y_{31}(a+\varepsilon) & y_{32}(a+\varepsilon) \\ -y'_{21}(a+\varepsilon) & y'_{31}(a+\varepsilon) & y'_{32}(a+\varepsilon) \\ 0 & y_{31}(1) & y_{32}(1) \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Собственные значения задачи (2) являются нулями характеристического уравнения (11).

**Пример 1.** Пусть  $a = 0,2$  и  $\varepsilon = 0,1$ . Подставив найденные выше функции  $y_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) (7)–(9) в (11) и решив уравнение  $\Delta_0(\lambda) = 0$ , получим спектр собственных значений. С помощью математического пакета можем вычислить, например, первые три собственных значения:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 9,870542, \\ \lambda_2 &= 39,480669, \\ \lambda_3 &= 88,828514. \end{aligned}$$

Следует отметить, что погрешность найденных собственных чисел зависит от выбора количества членов разложения фундаментальной системы решений в степенной ряд. Чем больше номер собственного числа, тем большее количество членов нужно брать. Зависимость погрешности найденных собственных значений от количества членов степенного ряда подробно описано авторами в [20].

### 3. Обратная задача. Определение $a$ и $\varepsilon$ .

Рассмотрим обратную задачу — требуется определить параметры  $a$  и  $\varepsilon$  квадратичного потенциала  $q(\xi)$  по собственным значениям задачи (2).

**Пример 2.** Пусть известны две собственные частоты задачи (2):

$$\lambda_1 = 9,870542, \quad \lambda_2 = 39,480669.$$

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} y_{11}(a-\varepsilon) & y_{21}(a-\varepsilon) \\ y'_{11}(a-\varepsilon) & y'_{21}(a-\varepsilon) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -y_{22}(a+\varepsilon) & y_{31}(a+\varepsilon) & y_{32}(a+\varepsilon) \\ -y'_{22}(a+\varepsilon) & y'_{31}(a+\varepsilon) & y'_{32}(a+\varepsilon) \\ 0 & y_{31}(1) & y_{32}(1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{11}(a-\varepsilon) & y_{22}(a-\varepsilon) \\ y'_{11}(a-\varepsilon) & y'_{22}(a-\varepsilon) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -y_{21}(a+\varepsilon) & y_{31}(a+\varepsilon) & y_{32}(a+\varepsilon) \\ -y'_{21}(a+\varepsilon) & y'_{31}(a+\varepsilon) & y'_{32}(a+\varepsilon) \\ 0 & y_{31}(1) & y_{32}(1) \end{vmatrix}. \quad (12)$$

**Пример 3.** Пусть для задачи  $L_1$  с потенциалом вида (3) параметры  $a$  и  $\varepsilon$  имеют те же значения что и в примере 1. Тогда подставив их в (12),

Требуется определить параметры  $a$  и  $\varepsilon$ .

Подставим собственные значения в (11), получим систему уравнений

$$\begin{cases} \Delta_0(\lambda_1) = 0, \\ \Delta_0(\lambda_2) = 0. \end{cases}$$

относительно неизвестных  $a$  и  $\varepsilon$ . Решив эту систему с помощью математического пакета в интервалах  $a \in (0, 1)$  и  $\varepsilon \in (0, 1)$ , получим два набора решений  $\{a = 0,1999$  и  $\varepsilon = 0,1000\}$ ,  $\{a = 0,7999$  и  $\varepsilon = 0,0999\}$ .

Откуда возникло второе решение? Для ответа на данный вопрос исследуем поведение первых трех собственных частот  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  в зависимости от местоположения неоднородности среды  $a$  и ее размеров  $\varepsilon$ . На рис. 1–3 можно заметить симметрию распределения собственных значений относительно центра струны при различных значениях  $a$ . Это говорит о двойственности решения обратной задачи, то есть одним и тем же собственным значениям соответствуют два различных параметра  $a$ . Также на рисунках видно что, чем больше параметр  $\varepsilon$ , тем выше становятся собственные числа.

Для однозначного решения предлагается использовать спектр частот вспомогательной задачи, т.е. применить метод, предложенный Г. Боргом [2] и использованный авторами в работах [21, 22]. В частности, предлагается рассмотреть задачу (2) с другим граничным условием на левом конце. Пусть  $y'(0) = 0$  (задача  $L_1$ ), тогда характеристический определитель примет вид:

где функции  $y_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) имеют вид (7)–(9), можем вычислить, например, первые три собственных значения:

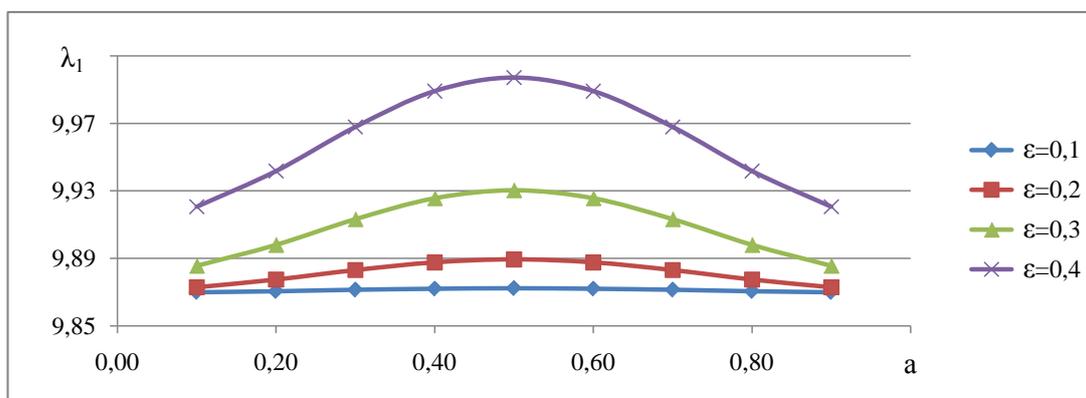


Рис. 1. Зависимость первой частоты от местоположения и размеров неоднородности

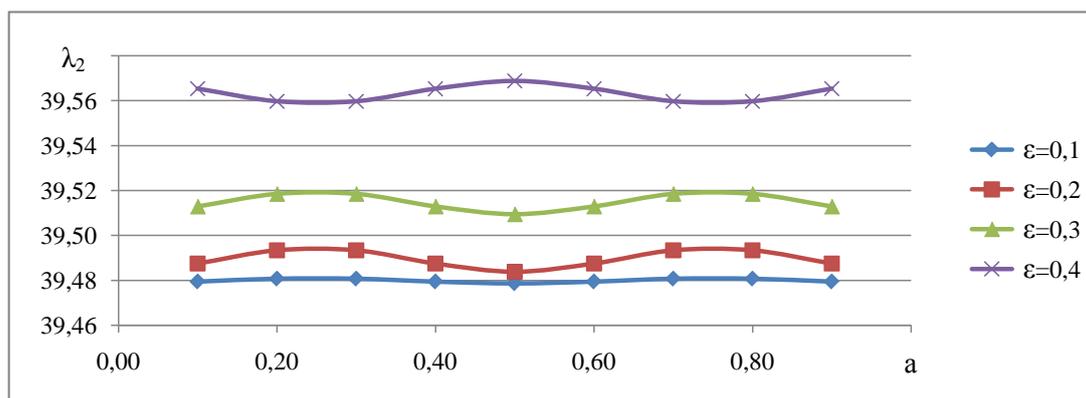


Рис. 2. Зависимость второй частоты от местоположения и размеров неоднородности

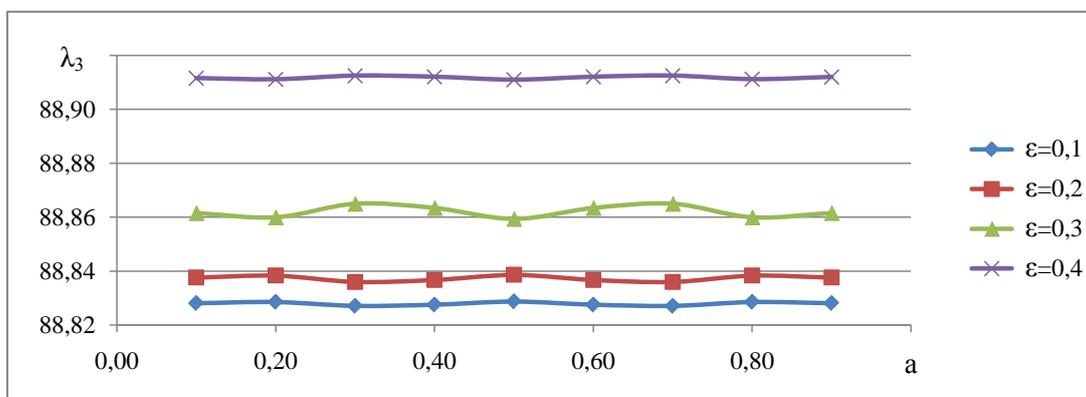


Рис. 3. Зависимость третьей частоты от местоположения и размеров неоднородности

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 2,469802, \\ \lambda_2 &= 22,207567, \\ \lambda_3 &= 61,685329.\end{aligned}$$

Рассмотрим решение обратной задачи для случая с несимметричными граничными условиями.

**Пример 4.** Пусть известны два собственных значения  $\lambda_1 = 2,469802$ ,  $\lambda_2 = 22,207567$  задачи  $L_1$  с потенциалом (3). Подставив их в характеристический определитель (12), получим систему:

$$\begin{cases} \Delta_1(\lambda_1) = 0, \\ \Delta_1(\lambda_2) = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему относительно неизвестных  $a$  и  $\varepsilon$  в интервалах  $a \in (0, 1)$  и  $\varepsilon \in (0, 1)$ , получим единственное решение  $\{a = 0.2000$  и  $\varepsilon = 0.1000\}$ .

Рассмотрим зависимость первой собственной частоты  $\lambda_1$  от параметров  $a$  и  $\varepsilon$ . На рис. 4 можно заметить отсутствие симметрии распределения собственных значений относительно центра струны. Независимо от параметра  $\varepsilon$  при отдалении центра неоднородности  $a$  от свободного конца собственные частоты уменьшаются. Также видно, что каждому собственному значению соответствует только одно значение  $a$  и  $\varepsilon$ . Из этого можно сделать вывод: для задачи  $L_1$  с потенциалом вида (3) существует единственное решение обратной задачи.

Графики остальных собственных значений в зависимости от параметров  $a$  и  $\varepsilon$  также имеют несимметричный вид относительно центра струны.

Рассмотрим случай, когда решение обратной задачи ищется по собственным значениям из разных спектров.

**Пример 5.** Пусть даны два собственных значения:  $\lambda_{01} = 9,870542$  из спектра задачи  $L_0$ , а  $\lambda_{11} = 2,469802$  из  $L_1$ . Подставив их соответственно в характеристические определители (11) и (12), получим

систему

$$\begin{cases} \Delta_0(\lambda_{01}) = 0, \\ \Delta_1(\lambda_{11}) = 0, \end{cases}$$

решив которую также получим единственное решение  $\{a = 0.2000$  и  $\varepsilon = 0.1000\}$ .

#### 4. Оценка погрешности метода идентификации

Проверим вычислительный эксперимент по зашумлению входных данных. Для анализа погрешности будем использовать решение примера 4. В качестве входных данных примем собственные значения, заданные в виде  $\lambda_{j\gamma} = \lambda_j(1 + \gamma\psi)$ , где  $\lambda_j$  — собственное значение, вычисленное с точностью до 14 значащих цифр;  $\gamma$  — амплитуда зашумления;  $\psi$  — случайная величина с равномерным законом распределения, определенная на отрезке  $[-1, 1]$ . Полагая  $\gamma = 10^{-n}$  ( $n = 3, \dots, 9$ ), исследуем относительную погрешность приведенного в данной работе метода в зависимости от  $\gamma$ .

В табл. 1 для различных значений амплитуды  $\gamma$  и величины  $\psi$  приведены результаты пяти экспериментов. Значения  $\psi$  получены с помощью генератора случайных чисел математического пакета Maple. Из табл. 1 следует, что при амплитуде зашумления  $\gamma = 10^{-4}$  решение задачи восстановления параметра  $a$  может не существовать (отсутствие решения в таблице отмечено прочерком). Это свидетельствует о том, что погрешность входных данных должна быть не более  $\gamma = 10^{-5}$ . В этом случае погрешность восстановления параметра  $a$  не превышает 10%.

#### 5. Заключение

В работе показано, что потенциал, заданный в виде (3), идентифицируется по двум собственным значениям. Метод решения, основанный на разложении фундаментальной системы решений в

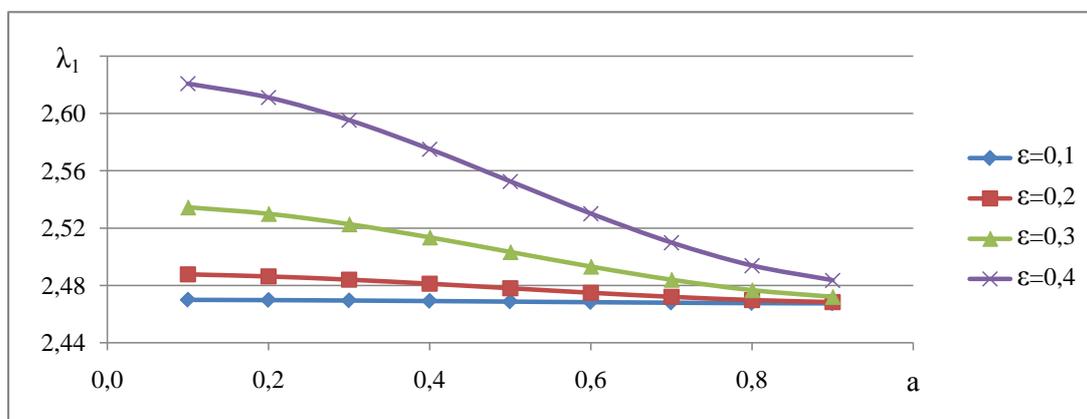


Рис. 4. Зависимость первой частоты от местоположения неоднородности при различных параметрах  $\varepsilon$

Таблица 1. Относительная погрешность решения в зависимости от зашумления входных данных

$\gamma$	$\delta_a(\psi), \%$				
$10^{-3}$	–	–	1,6356	–	–
$10^{-4}$	–	0,65182	–	0,37809	0,03555
$10^{-5}$	0,97932	6,04138	10,4704	8,08981	4,43831
$10^{-6}$	0,55554	0,59489	0,65419	0,41887	0,41887
$10^{-7}$	0,03437	0,02683	0,10474	0,09025	0,05214
$10^{-8}$	0,00696	0,00301	0,00151	0,00756	0,00788
$10^{-9}$	0,00021	0,00099	0,00073	9,37E-05	0,00044

степенной ряд, позволяет получить численное решение задачи идентификации квадратичного потенциала. Как видно из примеров 2, 4, 5 решение данной обратной задачи существует, причем из рис. 1–3 следует, что двойственность решения возникает только в случае симметричных граничных условий. Так как собственные частоты колебания сильно зависят от параметров упругой среды, в которой колеблется струна, то данная задача может найти применение на практике для сенсоров отслеживания изменения состава окружающей среды.

## Список литературы

- [1] Ambarzumijan V.A. *Über eine Frage der Eigenwerttheorie // Zeitschrift für Physik.* 1929. Vol. 53, № 9–10. Pp. 690–695. (DOI: 10.1007/BF01330827)
- [2] Borg G. *Eine Umkehrung der Sturm Liouvilleschen Eigenwertanfgabe // Acta Math.* 1946. Vol. 78, № 1. Pp. 1–96. (DOI: 10.1007/BF02421610)
- [3] Levinson N. *The inverse Sturm–Liouville problem // Math. Tidsskr. B.* 1949. Pp. 25–30. (<https://www.jstor.org/stable/24527827>)
- [4] Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения Штурма–Лиувилля по двум спектрам // *Изв. АН СССР, сер. матем.* 1964. Т. 28, № 1. С. 63–78. (<http://mi.mathnet.ru/izv3064>)
- [5] Левитан Б.М., Гасымов М.Г. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам // *УМН.* 1964. Т. 19, № 2(116). С. 3–63. (<http://mi.mathnet.ru/umn6187>)
- [6] Марченко В.А. *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения.* Киев: Наукова думка, 1977. 329 с.
- [7] Левитан Б.М. *Обратные задачи Штурма–Лиувилля и их приложения.* М.: Наука, 1984. 240 с.
- [8] Шкаликов А.А., Савчук А.М. Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость // *Функц. анализ и его прил.* 2010. Т. 44, № 4. С. 34–53. (DOI: 10.4213/faa3022)
- [9] Юрко В.А. *Введение в теорию обратных спектральных задач.* М: Физматлит, 2007. 384 с.
- [10] Гусейнов И.М., Набиев И.М. Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов // *Математический сборник.* 2007. Т. 198, № 11. С. 47–66. (DOI: 10.4213/sm1491)
- [11] Набиев И.М. Обратная квазипериодическая задача для оператора диффузии // *ДАН.* 2007. Т. 415, № 2. С. 168–170. (<https://elibrary.ru/item.asp?id=9533626>)
- [12] Садовничий В.А. Единственность решения обратной задачи в случае уравнения второго порядка с нераспадающимися условиями, регуляризованные суммы части собственных чисел. Факторизация характеристического определителя // *ДАН СССР.* 1972. Т. 206, № 2. С. 293–296. (<http://mi.mathnet.ru/dan37122>)
- [13] Плаксина О.А. Обратные задачи спектрального анализа для операторов Штурма–Лиувилля с неразделенными граничными условиями // *Матем. сб.* 1986. Т. 131(173), № 1(9). С. 3–26. (<http://mi.mathnet.ru/msb1897>)
- [14] Плаксина О.А. Обратные задачи спектрального анализа для операторов Штурма–Лиувилля с неразделенными граничными условиями. II // *Матем. сб.* 1988. Т. 136(178), № 1(5). С. 140–159. (<http://mi.mathnet.ru/msb1733>)
- [15] Гасымов М.Г., Гусейнов И.М., Набиев И.М. Обратная задача для оператора Штурма–Лиувилля с неразделенными сопряженными граничными условиями // *Сибирский математический журнал.* 1991. Т. 31, № 6, С. 46–54.
- [16] Коротяев Е.Л., Челкак Д.С. Обратная задача Штурма–Лиувилля со смешанными краевыми условиями // *Алгебра и анализ.* 2009. Т. 21, № 5. С. 114–137. (<http://mi.mathnet.ru/aa1155>)
- [17] Mamedov Kh.R., Cetinkaya F. Inverse problem for a class of Sturm–Liouville operator with spectral parameter in boundary condition // *Bound. Value Probl.* 2013. Article ID 183. 16 p., electronic only. (DOI: 10.1186/1687-2770-2013-183)
- [18] Panakhov E.S., Koyunbakan H., Unal I.C. Reconstruction formula for the potential function of Sturm–Liouville problem with eigenparameter boundary condition // *Inverse Problems in Science and Engineering.* 2010. Vol. 18, № 1. P. 173–180. (DOI: 10.1080/17415970903234976)
- [19] Ахтямов А.М. К единственности решения одной обратной спектральной задачи // *Дифференциальные уравнения.* 2003. Т. 39, № 8. С. 1011–1015. (<http://mi.mathnet.ru/de10883>)
- [20] Утяшев И.М., Ахтямов А.М. Идентификация краевых условий струны по собственным частотам колебаний // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН.* 2016. Т. 11, № 1. С. 38–52. (DOI: 10.21662/uim2016.1.007)
- [21] Ахтямов А.М., Утяшев И.М. Восстановление линейного потенциала в задаче Штурма–Лиувилля // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН.* 2017. Т. 12, № 2. С. 152–156. (DOI: 10.21662/uim2017.2.022)
- [22] Ахтямов А.М., Утяшев И.М. Восстановление полиномиального потенциала в задаче Штурма–Лиувилля // *Журнал Средневолжского математического общества.* 2018. Т.20, № 2. С. 148–158. (DOI: 10.15507/2079-6900.20.201802.148-158)



## Determination of local inhomogeneity of the medium from the natural frequencies of string oscillations

Utyashev I.M.\* , Akhtyamov A.M.\*\*,\*\*

\*Mavlutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa

\*\*Bashkir State University, Ufa

The paper considers the problem of determining the local inhomogeneity of the medium from the natural frequencies of string oscillation. The inhomogeneity is modeled in three sections: in the first and third sections medium is homogeneous, and on average section the elastic characteristics are modeled by a quadratic function. This model is implemented using the conjugation conditions at boundary between media. It is shown that to identify the center of an inhomogeneity and determine its size, two natural frequencies are enough, and in the case of rigid fixing of both ends of the string, the solution of the problem is dual. The problem is solved by expanding the fundamental system of solutions into a power series in the variables  $x$  and  $\lambda$ . The estimates of the error of the method are given.

**Keywords:** eigenvalues, Sturm-Liouville problem inverse problem, potential, string, conjugation conditions, characteristic determinant



## Модель сервопоршня агрегата дозирования топлива с использованием матричного подхода и нейронной сети

Денисова Е.В., Черникова М.А.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В работе рассмотрена модель сервопоршня агрегата дозирования топлива на основе матричного подхода с использованием нейронных сетей. Для разработки модели сервопоршня используется зависимость начального отклонения поршня от управляющего сигнала при различных значениях жиклеров. Данная зависимость представляется в виде матрицы и используется в нейронной сети. Этот подход позволяет описать перемещение сервопоршня с достаточной степенью точности. Так как учет изменения площадей регулировочных жиклеров служит источником параметрической неопределенности, что при работе системы автоматического управления может привести к падению качества управления, то такой учет является актуальным. Модель сервопоршня предлагается использовать в структуре системы автоматического управления газотурбинным двигателем и для полунатурных стендов.

**Ключевые слова:** агрегат дозирования топлива, сервопоршень, матричный подход, нейронная сеть, моделирование

### 1. Введение

Математическое моделирование в последнее время является неотъемлемой частью при оценке эффективности любого подхода, методологии в сфере авиационной промышленности. Появление новых поколений двигателей ставит перед разработчиками важную задачу по согласованию управляющей (электронной) и исполнительной (гидромеханической) частей системы автоматического управления (САУ) двигателей. Существует большое количество подходов к расчетам процессов, протекающих в гидромеханической части САУ. Эти подходы, в основном, ориентированы на решение систем нелинейных уравнений, что требует больших временных затрат, и, следовательно, они не могут быть использованы при полунатурных или натурных испытаниях САУ. Поскольку гидромеханические системы используются в настоящее время в

авиационной промышленности, а сервопоршень агрегата дозирования топлива (АДТ) является одним из ключевых элементов, то моделирование его работы является необходимым для получения согласования работы исполнительной и электронной частей. Если не учитывать процессы, происходящие при работе сервопоршня, которые являются нелинейными и сложными, это может привести к потере управляемости двигателем.

Целью настоящей работы является разработка модели сервопоршня агрегата дозирования топлива с использованием матричного подхода и нейронной сети (НС).

### 2. Постановка задачи

Рассмотрим конструктивную схему АДТ в силовую установку беспилотного летательного аппарата (БПЛА). Более подробное описание работы АДТ можно найти в статье [1]. На рис. 1 показана часть схемы АДТ, разъясняющая работу поршня с точки зрения его перемещения в функции управляющего сигнала от электромагнитного клапана (ЭМК).

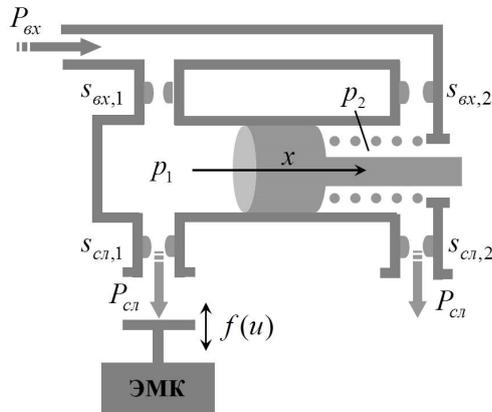


Рис. 1. Принципиальная схема АДТ, где  $s_{вх,i}$ , ( $i = 1, 2$ ) – площадь прохода жидкости на входе (в жиклерах);  $s_{сл,i}$ , ( $i = 1, 2$ ) – площадь прохода жидкости на сливе;  $P_{вх}$  – давление жидкости на входе в полость сервопоршня;  $P_{сл}$  – давление жидкости на выходе (сливе) из полости сервопоршня;  $p_1$  и  $p_2$  – давления в левой и правой полостях сервопоршня соответственно

Модель всего АДТ достаточно сложная и представляет собой блок, на вход которого поступает управляющий сигнал  $u$ , а на выходе формируется сигнал расхода топлива  $Q$ . Для того чтобы найти расход топлива используют формулу

$$Q = a\mu f\sqrt{\Delta P} \quad (1)$$

Расход топлива определяется несколькими параметрами:  $a = \sqrt{2/\rho}$  – коэффициент, зависящий от плотности топлива  $\rho$ , который, в свою очередь, зависит от температуры топлива ( $T$ ). Коэффициент  $a$  нельзя принимать постоянной величиной, так как температура топлива меняется при различных режимах работы исполнительного механизма. Еще один коэффициент в формуле (1) это  $\mu$  – коэффициент истечения жидкости, который характеризуется как отношение возможного расхода топлива к реальному. Этот коэффициент будем считать постоянным и равным  $\mu = 0,7$ . Параметр  $f$  – площадь дроссельной иглы – считается величиной переменной, если неизвестно точное положение сервопоршня;  $\Delta P$  – перепад давления – величина переменная, хотя считается, что она поддерживается клапаном постоянного перепада давления.

Таким образом, расход топлива есть величина, зависящая от нескольких факторов одновременно.

Представим модель сервопоршня АДТ как функцию  $x = f(u)$  на основе матричного подхода и нейронной сети. В дальнейшем планируется

разработать модель всего АДТ с учетом работы всех элементов.

### 3. Методы решения

Для разработки модели сервопоршня АДТ используем результаты, ранее полученные в работе [2], где динамическая модель АДТ была реализована с помощью решения системы нелинейных дифференциальных уравнений. Сервопоршень является основным элементом, так как именно с его помощью производится согласование электронной и гидромеханической частей системы управления.

Между управляющим сигналом  $u$  и перемещением сервопоршня  $x$  устанавливается однозначная связь, далее перемещение преобразуется в расход топлива. Результаты моделирования показали наличие следующих недостатков, связанных с особенностями конструкции: расслоение статических характеристик, образование «метелки», что в работе САУ БПЛА недопустимо. Полученные результаты полностью подтверждены экспериментальными данными. Далее, для использования модели в полунатурном стенде, предлагается следующий подход: представить отклонение сервопоршня от начального положения  $\Delta x/x_0$  в зависимости от управляющего сигнала  $u$  (рис. 2) в виде матрицы и реализовать на ее основе НС в виде блока в *Simulink*.

На полунатурном стенде можно проводить целенаправленное изменение площади жиклера, что позволяет выбрать наиболее приемлемую статическую характеристику элемента. При работе АДТ подобное изменение может произойти и случайно, например, при попадании механической частицы в рабочую жидкость, в частности из-за появления кавитационных режимов. В процессе работы эле-

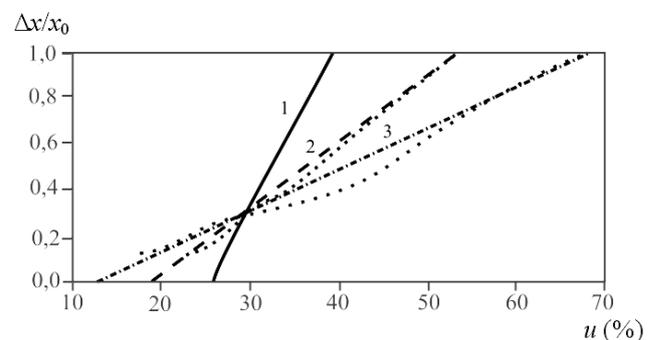


Рис. 2. Отклонение сервопоршня от начального положения  $\Delta x/x_0$  в зависимости от управляющего сигнала  $u$  для различных значений жиклеров  $s_{вх,i}/\alpha$ ,  $s_{сл,i}/\alpha$  ( $i = 1, 2$ ): 1 –  $\alpha = 1$ ; 2 –  $\alpha = 2,5$ , 3 –  $\alpha = 4$ , полученные при численных расчетах (линии) и экспериментально (круги)

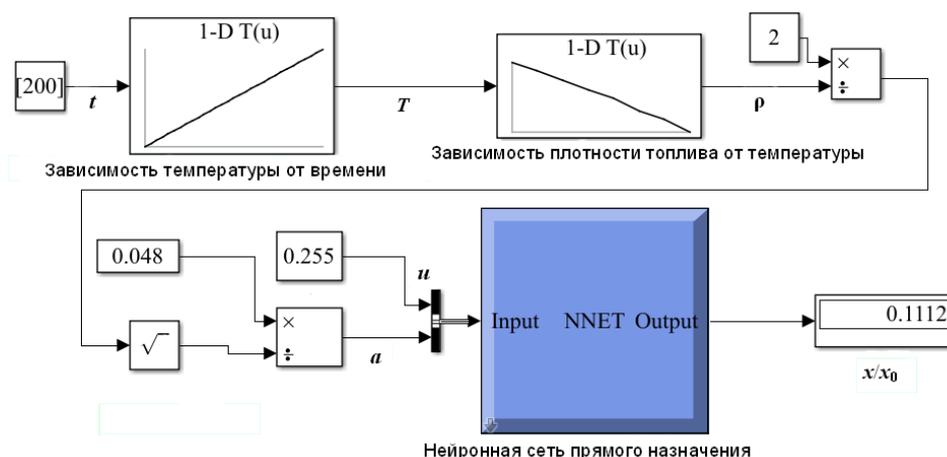


Рис. 3. Модель сервопоршня АДТ в среде имитационного моделирования *Simulink*

мента достаточно часто происходит разрушение поверхностей поршня и обечайки в силу их трения друг с другом, а также кавитационные разрушения рабочих поверхностей.

Следует отметить тот факт, что изменение проливов (площадей) регулировочных жиклеров также приводит к появлению параметрической неопределенности, в том числе и к появлению так называемой «метелки» (см. рис. 2) – расслоению статических характеристик, что в принципе недопустимо. В свою очередь, подобное изменение проливов может возникнуть в процессе функционирования топливного агрегата как из-за попадания микрочастиц от корпусных деталей в силу их старения, так и из-за появления «воздушных» пробок в топливе.

Для учета расслоения статических характеристик искусственно введем информационный параметр  $\alpha$ . Этот параметр позволит изменить величины  $a$  и  $f$  комплексно, не выделяя отдельно изменение каждого значения.

Для того чтобы найти отклонение сервопоршня от начального положения, воспользуемся матричным подходом [3] и представим отклонение  $\Delta x/x_0$  в зависимости от управляющего сигнала  $u$  в виде матрицы, где третьим параметром в матрице будет  $\alpha$ . Полученную матрицу используем в НС.

Для аппроксимации заданного набора входных–выходных данных можно воспользоваться различными подходами. Чтобы не искать явный вид функциональной зависимости, используем для ее описания НС, которые являются универсальными аппроксиматорами [4]. Для обучения НС необходимо выполнить предобработку исходных данных, которая заключается в нормализации данных, то есть необходимо привести числовые значения к конкретному диапазону. В данном

случае исходные данные следующие:  $X$  меняется от 0,125 до 4,  $Y$  – от 0 до 0,66, где  $X$  – вектор входных параметров  $(u, \alpha)$ , а  $Y$  – выходной параметр  $(\Delta x/x_0)$ .

Для решения поставленной задачи выберем многослойный перцептрон, обучаемый согласно алгоритму обратного распространения ошибки.

Число нейронов во входном и выходном слоях соответствует числу входных и выходных параметров (во входном слое – 2, в выходном – 1).

Также введен один скрытый слой, т.к. согласно теореме об универсальной аппроксимации многослойного перцептрона с одним скрытым слоем достаточно для построения равномерной аппроксимации с точностью  $\gamma$  для любого обучающего множества. Количество нейронов в скрытом слое примем 50 [5]. Выбранное количество нейронов обеспечивает необходимую точность аппроксимации и низкие затраты на время обучения НС, что подтверждается представленными далее результатами.

Во входном слое используем сигмоидальную функцию активации, в выходном – линейную, что обусловлено простотой применения, обучения и статистического анализа.

В дальнейшем планируется разработать полную модель АДТ с учетом работы всех элементов. Модель будет представлять блок, на вход которого поступает управляющий сигнал  $u$ , на выходе формируется сигнал расхода топлива  $Q$ .

На рис. 3 показана работа блока модели сервопоршня АДТ в среде имитационного моделирования *Simulink*. Модель сервопоршня АДТ работает следующим образом: на вход блока «Зависимость температуры от времени» поступает расчетный момент времени ( $t$ , сек), в который необходимо найти

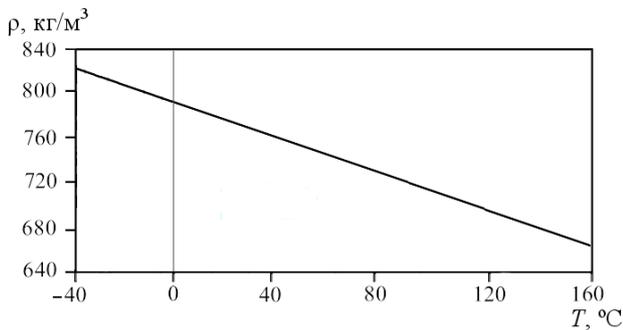


Рис. 4. Зависимость плотности  $\rho$  керосина от температуры  $T$

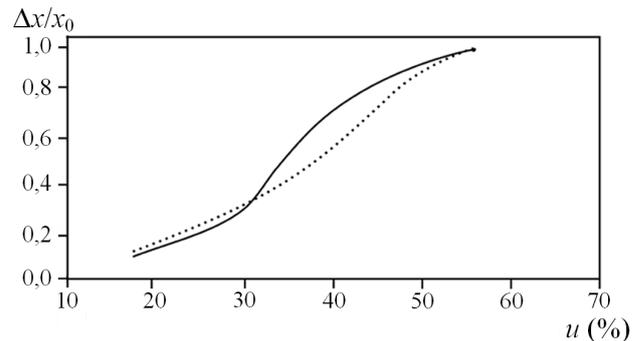


Рис. 5. Сравнение результатов НС (сплошная линия) с экспериментальными данными (пунктирная линия)

желаемое значение температуры ( $T$ ), затем полученное значение  $T$  поступает на вход блока расчета плотности топлива ( $\rho$ ) (рис. 4). В дальнейшем блоки модели АДТ, используя полученное значение плотности, рассчитывают необходимые компоненты уравнения (1), которое позволяет найти расход топлива  $Q$  при заданном сигнале управления  $u$ .

Как видно из рис. 5 результаты тестирования НС, сформированной на основе данных, полученных в ходе экспериментов динамической модели сервопоршня (рис. 2), и экспериментальные данные близки. Поэтому для сокращения времени расчетов и построения более быстрых моделей сервопоршня АДТ была синтезирована НС, использующая матричный подход при обработке данных.

Адекватность модели сервопоршня АДТ подтверждается результатами, представленными в табл. 1, где на входе в модель показан управляющий сигнал, а на выходе получено отклонение сервопоршня от начального положения.

Таблица 1. Сравнение полученных результатов  $\Delta x/x_0$  с экспериментальными данными для значения  $\alpha = 2.5$

№ п/п	$u, \%$	$\Delta x/x_0$	$\Delta x/x_0$ эксперимент
1	24	0,1154	0,12
2	25	0,1395	0,145
3	30	0,3472	0,3
4	35	0,6404	0,41
5	40	0,9855	0,59
6	50	0,9489	0,91
7	55	0,9431	0,99

#### 4. Результаты

Искусственно введен параметр, характеризующий степень возможного расслоения статических характеристик сервопоршня, позволяющий учитывать такое расслоение. Введение параметра  $\alpha$  позволило использовать матричный подход и НС при моделированию сервопоршня АДТ в среде имитационного моделирования *Simulink*.

#### 5. Заключение

Полученная модель может использоваться при моделировании всей САУ БПЛА, что позволит улучшить качество управления системой в целом.

#### Список литературы

- [1] Насибуллаева Э.Ш., Денисова Е.В. Динамическая модель агрегата дозирования топлива в силовую установку беспилотного летательного аппарата // Вестник РФФИ. 2012. № 2–3(74–75). С. 60–68. ([http://www.rfbr.ru/rffi/ru/bulletin/o\\_1774291#62](http://www.rfbr.ru/rffi/ru/bulletin/o_1774291#62))
- [2] Денисова Е.В., Насибуллаева Э.Ш., Насибуллаев И.Ш. Исследование динамических процессов в элементах топливной автоматики // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 5(158). С. 31–36. (<http://novtex.ru/mech/mech2014/annot05.html#5>)
- [3] Денисова Е.В., Мигранов А.Б., Черникова М.А. Матричный подход к моделированию газотурбинного двигателя с использованием нейронных сетей // Современные наукоемкие технологии. 2018. № 3. С. 35–40. (<https://www.top-technologies.ru/ru/article/view?id=36933>)
- [4] Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления / Под редакцией Н.Д. Егупова. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 744 с.
- [5] Хайкин С. Нейронные сети: полный курс, 2-е издание.: Пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. 1104 с.



## The model of the servo piston of the fuel metering unit using matrix approach and neural network

Denisova E.V., Chernikova M.A.

Mavlutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa

In the paper, the model of a servo piston of a fuel metering unit based on a matrix approach using neural networks is considered. To develop the model of a servo piston, the dependence of the initial piston deviation on the control signal for different values of the nozzles is used. This dependence is represented in the form of a matrix and is used in the neural network. This approach allows describing the movement of the servo piston with a sufficient degree of accuracy. As a record of change squares adjustment of the nozzles is a source of parametric uncertainty in the operation of the automatic control system can lead to a drop in the quality of control, such accounting is relevant. The model of the servo piston is proposed to be used in the structure of the automatic control system for a gas turbine engine and for semi-natural stands.

**Keywords:** fuel metering unit, servo piston, matrix approach, neural network, simulation



## Плавление льда в пористой среде, насыщенной льдом и газом, при нагнетании теплой воды<sup>1</sup>

Шагапов В.Ш.\* , Запивахина М.Н.\*\*

\*Институт механики и машиностроения – обособленное структурное подразделение ФИЦ КазНЦ РАН, Казань  
 \*\*Башкирский государственный университет, Уфа

Рассмотрены численные модели инъекции теплой воды (в диапазоне температур от 300 до 340 К) в холодный пористый пласт. Предложены упрощенные модели, описывающие процессы тепло- и массопереноса. Исследовано влияние параметров, определяющих начальное состояние пористой среды, граничного давления, температуры и влагосодержания на темп распространения гидродинамических и температурных полей в пористой среде. Установлено, что экономически целесообразным является плавление мерзлых грунтов, насыщенных льдом и газом (воздухом), при достаточно низкой температуре инъектируемой воды (около 300 К).

**Ключевые слова:** инъекция, фильтрация, пористая среда, образование льда, плавление льда

### 1. Введение

В связи с интенсивным освоением северных территорий, большая часть которых располагается в зонах распространения вечной мерзлоты, особенно актуальным становится изучение процессов, связанных с тепломассопереносом в почвах, грунтах и горных породах [1]. В работах [2–5] рассматривались задачи фазового перехода на фронте при равновесной температуре, а в работах [6–8] — в объемной области в условиях стабильности газогидрата с учетом кинетики.

Методы математического моделирования процессов, связанных с фазовыми переходами вода-лед, находят применение при проектировании инженерных сооружений, разработке способов добычи полезных ископаемых, прогнозировании различных природных явлений и аварий. Опыт показывает, что физико-математические свойства грунтов и пород зависят от количества содержа-

щихся в них льда и воды. В связи с этим особо важным является изучение механизма влагопереноса в промерзающих и протаивающих грунтах.

### 2. Постановка задачи и основные уравнения

В плоскооднмерной автотомодельной постановке рассмотрим задачу о нагнетании теплой воды в пористую среду, насыщенную льдом и газом (воздухом), находящуюся в исходном состоянии при температуре плавления льда  $T_0 = 273$  К. Рассмотрим случай, когда фазовые переходы происходят в объемной области. Тогда в результате нагнетания теплой воды от границы вглубь пласта начинает распространяться объемная область разложения льда, которая разделяет пласт на три зоны. В первой зоне, находящейся вблизи границы пласта, поры будут насыщены водой, во второй (промежуточной) — заполнены водой и льдом, а в третьей (дальней) — в порах содержатся газ и лед. Насыщенность пор льдом в дальней зоне равна исходному значению льдонасыщенности пласта  $S_{i0}$ .

Будем считать, что в исходный момент времени температура пористого грунта равна  $T_0$ , а давление  $p_0$ .

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 49 «Взаимодействие физических, химических и биологических процессов в Мировом океане».

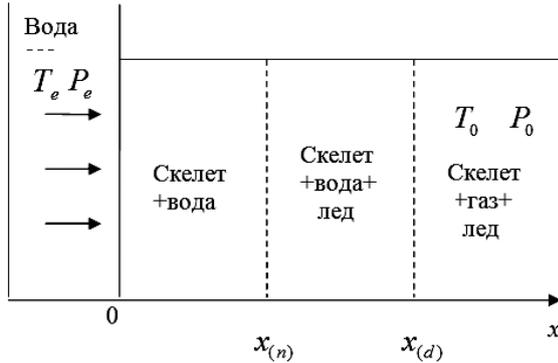


Рис. 1. Схема процесса нагнетания теплой воды в пористый грунт, насыщенный льдом и газом

Пусть через границу  $x = 0$  закачивается теплая вода с температурой  $T_e$  при постоянном давлении  $p_e$ . Схема процесса нагнетания теплой воды в пористый грунт, насыщенный льдом и газом, показана на рис. 1.

Тогда граничное условие примет вид:

$$x = 0: \quad T = T_e, \quad p = p_e \quad (t > 0).$$

Процессы тепломассопереноса при нагнетании воды в пористый пласт опишем, приняв следующие гипотезы. Температуры пористого пласта и насыщающего вещества (газа, воды или льда) будем считать одинаковыми, т.е. процесс одно-температурный. Скелет пористой среды, лед и вода несжимаемы; скелет и лед неподвижны, пористость скелета постоянна:

$$\rho_{sk}, \quad \rho_\ell, \quad \rho_i, \quad m = \text{const}.$$

Здесь  $\rho_j$  ( $j = sk, \ell, i$ ) — истинные плотности скелета, воды и льда, соответственно;  $m$  — пористость.

С учетом принятых гипотез, полагая, что в ближней области поры заполнены только водой, т.е.  $S_\ell = 1$ , уравнение сохранения массы воды и притока тепла запишем в виде [9, 10]:

$$\frac{\partial(\rho_\ell m v_\ell)}{\partial x} = 0, \quad \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_\ell c_\ell m v_\ell \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right),$$

$$\left( \rho c = (1 - m)\rho_{sk}c_{sk} + m \sum_{j=sk, \ell, i} S_j \rho_j c_j, \quad (1) \right.$$

$$\left. \lambda = (1 - m)\lambda_{sk} + m \sum_{j=sk, \ell, i} S_j \lambda_j \right), \quad S_\ell = 1,$$

где  $S_\ell$  — водонасыщенность;  $v_\ell$  — скорость фильтрации воды;  $\rho c$ ,  $\lambda$  — удельная объемная теплоемкость и теплопроводность системы;  $c_j$ ,  $\lambda_j$  — удельная теплоемкость и теплопроводность фаз. Во всем

пласте величины  $\rho c$  и  $\lambda$  будем полагать постоянными, поскольку основной вклад в эти величины вносят параметры скелета пористой среды.

В качестве закона фильтрации примем закон Дарси

$$m v_\ell = - \frac{k_\ell}{\mu_\ell} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Зависимость коэффициента проницаемости скелета  $k_\ell$  от «живой» пористости  $m S_\ell$  зададим, используя формулу Козени [11]. Тогда для зависимости проницаемости от водонасыщенности имеем

$$k_\ell = k_* \frac{(m S_\ell)^3}{(1 - m S_\ell)^2},$$

где  $k_*$  — эмпирический параметр.

Если  $m \ll 1$ , то  $m S_\ell \ll 1$ , поэтому можно полагать

$$k_\ell = k_* (m S_\ell)^3 \approx k_0 S_\ell^3 \quad (k_0 = k_* m^3),$$

где  $k_0$  — проницаемость «чистого» скелета.

Уравнение сохранения массы воды для промежуточной зоны, где поры заполнены льдом и водой, запишется в виде:

$$m(1 - S_{i0}) \frac{\partial \rho_\ell}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (m(1 - S_{i0}) v_\ell \rho_\ell) = 0, \quad (2)$$

$$S_\ell = 1 - S_{i0}.$$

Процесс фильтрации воды в данной области также описывается законом Дарси

$$m(1 - S_{i0}) v_\ell = - \frac{k_\ell}{\mu_\ell} \frac{\partial p}{\partial x},$$

где коэффициент проницаемости  $k_\ell$  согласно формуле Козени равен  $k_\ell \approx k_0 (1 - S_{i0})^3$ .

На границе между образовавшимися областями выполняются условия баланса массы и тепла  $x = x_{(n)}$ :

$$m \rho_\ell (v_{(n)}^- - \dot{x}_{(n)}) = m \rho_\ell (1 - S_{i0}) \times$$

$$\times (v_{(n)}^+ - \dot{x}_{(n)}) + m S_{i0} (0 - \dot{x}_{(n)}) \rho_i,$$

$$-\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^- = m S_{i0} \rho_i L_i \dot{x}_{(n)}; \quad (3)$$

$x = x_{(d)}$ :

$$m \rho_\ell (1 - S_{i0}) (v_{(d)}^- - \dot{x}_{(d)}) +$$

$$+ m S_{i0} (0 - \dot{x}_{(d)}) \rho_i = m S_{i0} (0 - \dot{x}_{(d)}) \rho_i.$$

Здесь  $L_i$  — удельная теплота плавления льда. Верхние знаки «+» и «-» соответствуют значению параметров, терпящих разрыв перед и за границей.

Сформулированная задача решается в автоматической постановке. Для этого вводится автоматическая переменная  $\xi = x / \sqrt{\aleph^{(T)} t}$  ( $\aleph^{(T)} = \lambda / \rho c$ ), где  $\aleph^{(T)}$  — температуропроводность пласта. Закон движения границы фазовых переходов будем искать в виде  $x_s = \xi_s \sqrt{\aleph^{(T)} t}$ , где  $s = n, d$ ;  $s = n$  — соответствует границе между ближней и промежуточной областями;  $s = d$  — относится к границе между промежуточной и дальней областями.

Интегрируя уравнения (1) и (2), с учетом начальных и граничных условий, для давления и температуры получим

$$\xi = \xi_{(n)} : \quad T_{(1)} = T_{(n)} + \frac{(T_e - T_{(n)}) \int_{\xi}^{\xi_{(n)}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \frac{P_{e(n)} \xi}{\xi_{(n)}}\right) d\xi}{\int_0^{\xi_{(n)}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \frac{P_{e(n)} \xi}{\xi_{(n)}}\right) d\xi}, \quad (4)$$

$$p_{(1)} = p_e + (p_{(n)} - p_e) \frac{\xi}{\xi_{(n)}};$$

$$\xi_{(n)} \leq \xi \leq \xi_{(d)} : \quad T_{(2)} = T_{(n)} = T_0, \quad p_{(2)} = p_{(n)} + (p_0 - p_{(n)}) \frac{\xi - \xi_{(n)}}{\xi_{(d)} - \xi_{(n)}}; \quad (5)$$

$$\xi = \xi_{(d)} : \quad T_{(2)} = T_{(n)} = T_0, \quad p_{(3)} = p_0. \quad (6)$$

Здесь  $P_{e(n)} = \frac{\rho_\ell c_\ell k_0 (p_{(n)} - p_e)}{\lambda \mu_\ell}$ ;  $\alpha = \frac{\rho_\ell c_\ell Q}{2\pi\lambda}$ .

После подстановки решений (4)–(6) в систему граничных условий (3) она принимает следующий вид

$$\xi = \xi_{(n)} : \quad \frac{(T_{(n)} - T_e) \exp\left(-\frac{\xi_{(n)}^2}{4} - \frac{P_{e(n)} \xi_{(n)}}{\xi_{(n)}}\right)}{\int_0^{\xi_{(n)}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \frac{P_{e(n)} \xi}{\xi_{(n)}}\right) d\xi} = \frac{m \rho_i L_i S_{i0} \xi_{(n)}}{2 \rho c}, \quad (7)$$

$$k_0 \frac{p_e - p_{(n)}}{\xi_{(n)}} - k_\ell \frac{p_{(n)} - p_0}{\xi_{(d)} - \xi_{(n)}} = m \mu_\ell \aleph^{(T)} \frac{\xi_{(n)}}{2} (1 - \bar{\rho}) S_{i0};$$

$$\xi = \xi_{(d)} : \quad k_\ell \frac{p_{(n)} - p_0}{\xi_{(d)} - \xi_{(n)}} = m \mu_\ell \aleph^{(T)} \frac{\xi_{(d)}^2}{2} (1 - S_{i0}). \quad (8)$$

Здесь  $\bar{\rho}_\ell = \rho_\ell / \rho$ ,  $\bar{\rho}_i = \rho_i / \rho$ ,  $\bar{\rho} = \rho_i / \rho_\ell$ .

### 3. Результаты расчетов

Теоретическое описание полей давления и температур свелось к поиску трех неизвестных параметров  $\xi_{(n)}$ ,  $\xi_{(d)}$  и  $p_{(n)}$  из системы (7)–(8). Такая система может быть решена численно, например, методом итераций. Для параметров, определяющих свойства пористого грунта (если специально не оговорено), воды и льда принимаем следующие значения:  $m = 0.1$ ,  $k_0 = 10^{-13} \text{ м}^2$ ,  $\rho c = 1.6 \cdot 10^6 \text{ Дж/(К·кг)}$ ,  $\lambda = 0.105 \text{ Вт/(м·К)}$ ,  $\rho_\ell = 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_i = 900 \text{ кг/м}^3$ ,  $\mu_\ell = 10^{-5} \text{ кг/(м·с)}$ ,  $L = 3.4 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$ ,  $c_\ell = 4200 \text{ м}^2/(\text{К·с}^2)$ ,  $T_0 = 273 \text{ К}$ ,  $T_e = 320 \text{ К}$ ,  $p_0 = 0.1 \text{ МПа}$ ,  $p_e = 0.15 \text{ МПа}$ ,  $S_{i0} = 0.5$ .

На рис. 2 представлены картины полей давления и температуры для различных значений температуры закачиваемой воды  $T_e = 300 \text{ К}$  (линия синего цвета),  $320 \text{ К}$  (линия красного цвета) и  $340 \text{ К}$  (линия черного цвета). Из данного рисунка видно, что увеличение температуры закачиваемой воды не приводит к существенному росту области разложения льда. Таким образом, экономически целесообразным является плавление мерзлых грунтов, насыщенных льдом и газом (воздухом), при достаточно низкой температуре инжестируемой воды (около 300).

На рис. 3 представлены картины полей давления и температуры для различных значений температуры закачиваемой воды  $T_e = 340 \text{ К}$  (линия красного цвета) и  $300 \text{ К}$  (линия синего цвета) для момента времени  $t = 1 \text{ час}$ . Из данного рисунка видно, что за 1 час область разложения льда распространяется в пространстве на расстояние порядка 5 метров.

На рис. 4 представлены картины полей давления и температуры для различных исходных давлений инжестируемой воды. Линии 1, 2 и 3 соответ-

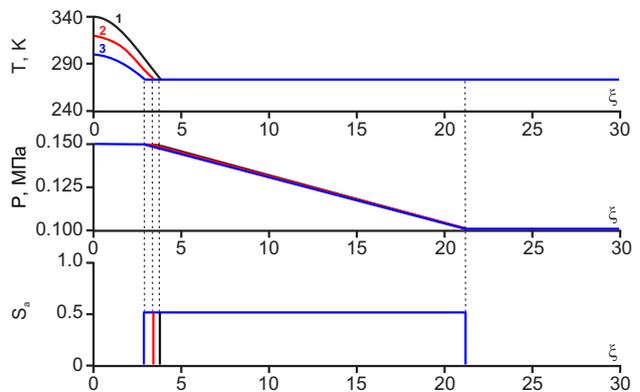


Рис. 2. Влияние температуры инжестируемой воды на распределение температуры и давления в пористой среде:  $T_e = 340 \text{ К}$  (1),  $320 \text{ К}$  (2),  $300 \text{ К}$  (3)

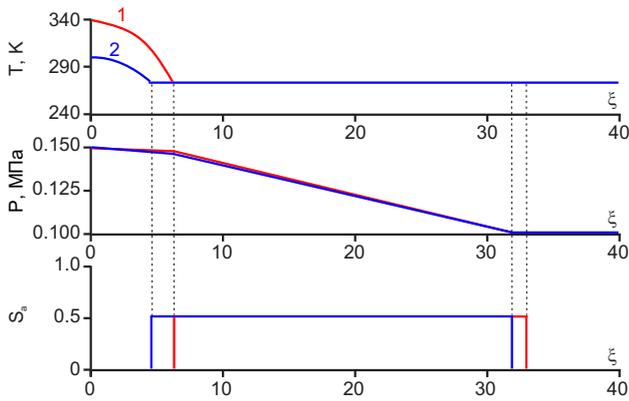


Рис. 3. Влияние температуры инжестируемой воды на распределение температуры и давления в пористой среде:  $T_e = 340$  К (1), 300 К (2) для момента времени  $t = 1$  час

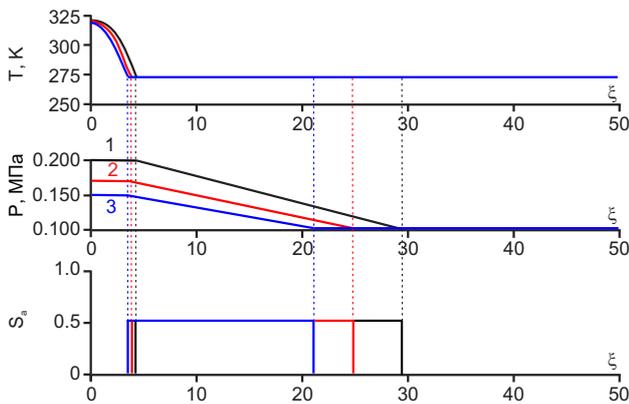


Рис. 4. Влияние давления инжестируемой воды на распределение температуры и давления в пористой среде:  $p_e = 0.2$  МПа (1), 0.17 МПа (2) и 0.15 МПа (3)

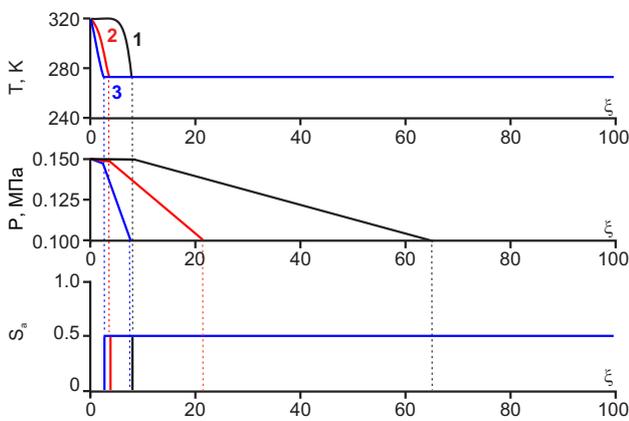


Рис. 5. Влияние исходной проницаемости скелета на распределение температуры и давления в пористой среде  $k_0 = 10^{-12}$  м<sup>2</sup> (1),  $10^{-13}$  м<sup>2</sup> (2) и  $10^{-14}$  м<sup>2</sup> (3)

ствуют значениям давлений инжестируемой воды  $p_e = 0.2$  МПа (линия черного цвета), 0.17 МПа (линия красного цвета) и 0.15 МПа (линия синего цвета). Из данного рисунка следует, что увеличение давления закачиваемой воды не приводит к существенному росту области разложения льда. Однако видно, что увеличение давления закачиваемой воды все же приводит к незначительному увеличению скорости движения границы плавления. Кроме этого из представленных результатов следует, что увеличение давления на  $p_e = 0.05$  МПа приводит к росту промежуточной области в 1.5 раза.

На рис. 5 представлены картины полей давления и температуры для различных исходных проницаемостей пористой среды. Линии 1, 2 и 3 соответствуют значениям проницаемости среды  $k_0 = 10^{-12}$  м<sup>2</sup> (линия черного цвета);  $10^{-13}$  м<sup>2</sup> (линия красного цвета) и  $10^{-14}$  м<sup>2</sup> (линия синего цвета). Можно заметить, что с повышением проницаемости среды, вследствие роста скорости фильтрации воды, растет также и скорость движения границы плавления льда. Из рисунка также видно, что с ростом проницаемости среды повышается роль конвективного переноса тепла. Об этом свидетельствует наличие плато для профиля температуры при высокой проницаемости среды.

На рис. 6 представлены картины полей давления и температуры для различных исходных льдонасыщенностей пористой среды при пористости скелета  $m = 0.1$  и проницаемости  $k_0 = 10^{-13}$  м<sup>2</sup>. Линии 1, 2 и 3 соответствуют значениям льдонасыщенности среды  $S_{i0} = 0.9$  (линия черного цвета), 0.7 (линия красного цвета) и 0.5 (линия синего цвета). Видно, что более интенсивный рост области плавления в пласте наблюдается при низких

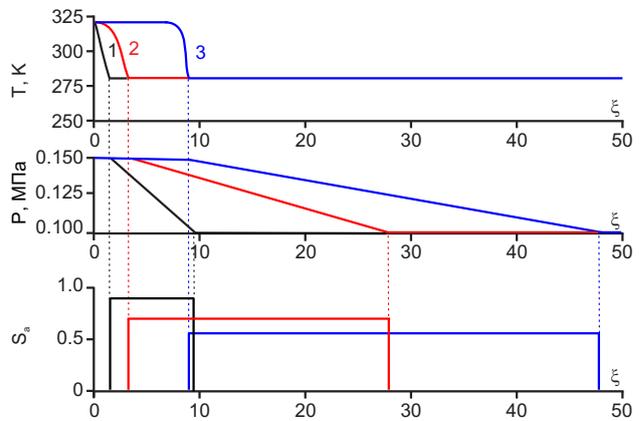


Рис. 6. Влияние исходной льдонасыщенности скелета на распределение температуры и давления в пористой среде:  $S_{i0} = 0.9$  (1),  $S_{i0} = 0.7$  (2) и  $S_{i0} = 0.5$  (3)

значениях исходной льдонасыщенности пласта. Из рисунка также видно, что при льдонасыщенности пласта  $S_{i0} \leq 0.5$  повышается роль конвективного переноса тела.

#### 4. Заключение

На основе построенных автомодельных решений проведен численный анализ, иллюстрирующий влияние исходных параметров пористой среды, а также температуры закачиваемой воды и интенсивности закачки на распределение температуры и давления в пористой среде при фазовых переходах вода–лед.

Показано, что при плавлении льда в высокопроницаемом пористом пласте при исходной льдонасыщенности  $S_{i0} \geq 0.5$  образуется температурное плато, свидетельствующее о превалирующей роли конвективного переноса тепла.

Установлено, что рост интенсивности закачки теплой воды и ее температура не приводят к существенному увеличению области разложения льда. Интенсивность разложения льда в пористой среде в первую очередь определяется ее исходными характеристиками: пористостью, проницаемостью и льдонасыщенностью.

Данная задача в более простой постановке была решена в [12] и является продолжением задач, рассмотренных в [13] и [14].

#### Список литературы

- [1] Цытович Н.А. Механика мерзлых грунтов. М.: Высшая школа, 1973. 448 с.
- [2] Шагапов В.Ш., Чиглинцева А.С., Сыртланов В.Р. О возможности вымывания газа из газогидратного массива посредством циркуляции теплой воды // Прикладная механика и техническая физика. 2009. Т. 50, № 4 (296). С. 100–111. (DOI: 10.1007/s10808-009-0084-0)
- [3] Шагапов В.Ш., Чиглинцева А.С., Белова С.В. Математическое моделирование нагнетания гидратообразующего газа в снежный массив, насыщенный тем же газом // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2016. Т. 11, № 2. С. 233–239. (DOI: 10.21662/uim2016.2.034)
- [4] Чиглинцева А.С., Шагапов В.Ш. О нагнетании гидратообразующего газа в пласт снега, насыщенный тем же газом // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2017. Т. 12, № 2. С. 219–226. (DOI: 10.21662/uim2017.2.033)
- [5] Шагапов В.Ш., Чиглинцева А.С., Белова С.В. Задача об образовании газогидрата в замкнутом объеме, насыщенном газом и снегом // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2017. № 46. С. 86–101. (DOI: 10.17223/19988621/46/11)
- [6] Шагапов В.Ш., Хасанов М.К., Рафикова Г.Р. Вытеснение метана из газогидратного пласта при закачке диоксида углерода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 44. С. 104–114. (DOI: 10.17223/19988621/44/9)
- [7] Шагапов В.Ш., Рафикова Г.Р., Хасанов М.К. К теории образования газогидрата в частично водонасыщенной пористой среде при нагнетании метана // Теплофизика высоких температур. 2016. Т. 54, № 6. С. 911–920. (DOI: 10.7868/S004036441606017X)
- [8] Шагапов В.Ш., Чиглинцева А.С., Рафикова Г.Р. О применимости квазистационарного решения уравнения диффузии в слое гидрата, образующегося на границе контакта газ–лед (вода) // Теоретические основы химической технологии. 2018. Т. 52, № 4. С. 458–465. (DOI: 10.1134/S0040357118040073)
- [9] Лейбензон А.С. Движения природных жидкостей и газов в пористой среде. М.: ОГИЗ, 1947. 244 с.
- [10] Гумеров Н.А. Автомодельный рост газового гидрата, разделяющего газ и жидкость // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 5. С. 78–85.
- [11] Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.
- [12] Шагапов В.Ш., Запихаева М.Н. Численное моделирование процесса разложения газогидратов при инъекции газа в пористую среду // Теоретические основы химических технологий. 2012. Т. 46, № 3. С. 293–302. (DOI: 10.1134/S0040579512030098)
- [13] Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Запихаева М.Н. Моделирование процесса образования льда при инъекции воды в пористую среду, насыщенную льдом и газом // Вестник Башкирского государственного университета. 2013. Т. 18, № 1. С. 22–26. (<http://bulletin-bsu.com/archive/2013/1/5/>)
- [14] Шагапов В.Ш., Галимзянов М.Н., Запихаева М.Н. Моделирование процесса образования льда при нагнетании воды в сухую пористую среду // Известия Уфимского научного центра РАН. 2016. № 4. С. 14–18. ([http://sciencerb.ru/vyp/4\\_2016/14-18.pdf](http://sciencerb.ru/vyp/4_2016/14-18.pdf))



## Melting of ice in a porous medium saturated with ice and gas while injecting warm water

Shagapov V.Sh. \*, Zapivakhina M.N.\*\*

\*Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Scientific Center of the RAS, Kazan

\*\*Bashkir State University, Ufa

The numerical models for the injection of warm water (in the temperature range from 300 to 340 K) into a cold porous formation are considered. Simplified models describing the processes of heat and mass transfer are proposed. The influence of the parameters determining the initial state of the porous medium, the boundary pressure, temperature and moisture content on the rate of propagation of hydrodynamic and temperature fields in the porous medium is investigated. It has been established that it is economically feasible to melt frozen soils saturated with ice and gas (air) at a sufficiently low temperature of the injected water (about 300 K).

**Keywords:** injection, filtration, porous medium, ice formation, ice melting



## Исследование эффекта динамического запираания эмульсий, содержащих твердые включения<sup>1</sup>

Рахимов А.А.\* , Ахметов А.Т.\*\* , Валиев А.А.\* , Асадуллин Р.Р.\*\*

\*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

\*\*Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа

\*\*\*ООО «Уфимский научно-технический центр», Уфа

В работе представлены результаты экспериментальных исследований течения стабилизированных водонефтяных эмульсий, приготовленных из нефти и пластовой воды скважин Западно-Кочевненского месторождения, а также с наличием хризотила и аэросила в цилиндрических и плоских капиллярах (модели трещины). Обнаружен эффект динамического запираания, состоящий в том, что на участках капилляров и в модели трещин, при постоянно действующем перепаде давления, течение обратных водонефтяных эмульсий со временем останавливается. Увеличение содержания изотропных и анизотропных частиц приводит к увеличению вязкости эмульсии и уменьшению времени наступления динамического запираания. При одинаковом процентном содержании частиц у эмульсий, содержащих хризотил, время наступления запираания и объем протекшей эмульсии до запираания на порядок меньше, чем у эмульсий с содержанием аэросила. Однако при этом вязкость эмульсии с аэросилом даже выше, чем у аналогичной эмульсии с хризотилом.

**Ключевые слова:** дисперсия, эмульсия, капилляр, ячейка Хеле–Шоу, динамическое запираание

### 1. Введение

Опыт разработки нефтяных месторождений свидетельствует о том, что в процессах первичного и вторичного вскрытия продуктивных пластов, при проведении ремонтных работ в скважинах, а также при их эксплуатации постепенно ухудшаются коллекторские свойства призабойной зоны пласта. Чаще всего это является следствием отрицательного воздействия технологических жидкостей на водной основе, наиболее широко используемых в отрасли. Альтернативными системами являются составы на углеводородной основе, в частности обратные эмульсии. Подтверждением высокой эф-

фективности применения растворов на углеводородной основе для глушения нефтяных скважин служит успешный опыт их применения в качестве промысловых жидкостей при бурении и вскрытии продуктивных пластов на многих месторождениях страны. Применение разработанных рецептур позволяет повысить технико-экономические показатели бурения и ремонтов скважин и сохранять естественные коллекторские свойства продуктивных пластов на уровне 96–100% [1].

Обратные водонефтяные эмульсии представляют собой микрокапли дисперсной фазы — воды, находящиеся в дисперсионной среде — нефти. Основным гидродинамическим свойством эмульсий является их высокая вязкость по сравнению с вязкостью несущей фазы. Повышение концентрации дисперсной фазы ведет к существенному возрастанию вязкости эмульсии. Изучение микрогидродинамики (microfluidics) позволяет установить особенности течения эмульсий в отдельных порах порового пространства. На основе ранее про-

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00360-мол. а) и средств государственного бюджета по госзаданию 0246-2018-0004.

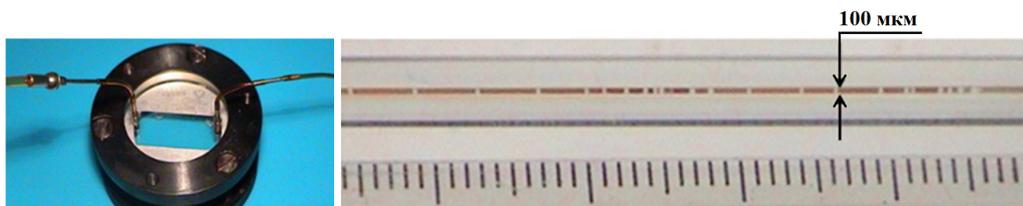


Рис. 1. Плоские капилляры (разборная ячейка Хеле–Шоу) с поступательным течением (слева) и цилиндрический капилляр с осесимметричным течением (справа)

веденных экспериментов [2–6] известно, что течение стабилизированной нефтенолом водонефтяной эмульсии в щелевидной модели (плоская ячейка Хеле–Шоу) и в капиллярах разного диаметра при постоянном перепаде давления приводит к тому, что массоперенос эмульсии по показаниям прецизионных электронных весов, измеряющих с точностью до 0,1 мг, со временем прекращается. Детальное изучение структуры потока под микроскопом показывает, что на самом деле течение прекращается не полностью, а уменьшается со временем более чем на 3 порядка, поэтому это явление было названо эффектом динамического запираания. Наличие данного эффекта объясняет успех применения водонефтяных эмульсий в потокоотклоняющих технологиях, в качестве жидкостей для глушения скважин и буровых растворов с кольматационными свойствами.

## 2. Экспериментальная установка

Эксперименты проводились в цилиндрическом стеклянном капилляре с осесимметричным течением и в плоском капиллярном канале (ячейке Хеле–Шоу) с поступательным течением (рис. 1).

Оба типа капиллярных структур изготовлены из прозрачных (стеклянных) элементов. Течение организовано путем подачи жидкостей при перепаде давления в 200 кПа на вход капиллярных структур, на выходе давление соответствовало атмосферному, расходные характеристики потока измерялись при помощи электронных весов НМ-200, связанных с компьютером. Картина течения записывалась на цифровую видеокамеру в масштабе модели и микромасштабе через микроскоп Stemi–2000С (рис. 2).

Цилиндрические стеклянные капилляры имеют длину 2 см и диаметр 100 мкм. Жидкость подводилась по полиэтиленовым трубкам с внутренним диаметром 1,5 мм.

Для изучения процессов в плоском капиллярном канале была разработана ячейка Хеле–Шоу размером 4 × 2 см с величиной зазора между пластинами 50 мкм. Ячейка Хеле–Шоу широко ис-

пользуется для изучения неустойчивости Релея–Тейлора при вытеснении вязких сред маловязкими, при исследовании движения многофазных систем [2]. Ячейка образовывалась между двумя толстыми цилиндрическими пластинами из оптического стекла, помещенными в стальную обойму, зазор определялся толщиной подбираемой фольги, а размеры в плане — окошком, которое в ней вырезалось. В верхнем стекле были просверлены два отверстия, в одно из которых жидкость подавалась под давлением, а из другого поступала на электронные весы, расстояние между входным и выходным отверстиями 4 см. Движение происходит в образованном пластинами и фольгой объеме.

Реологические характеристики эмульсий определялись с помощью современного высокоточного реометра HAAKE MARS III системой измерения двойного конуса–пластины.

Эмульсия является неньютоновской жидкостью, зависимость напряжения сдвига от скорости деформации сдвига с большой степенью достоверности аппроксимируется формулой Оствальда-де Ваала  $\tau = k\dot{\gamma}^n$ .

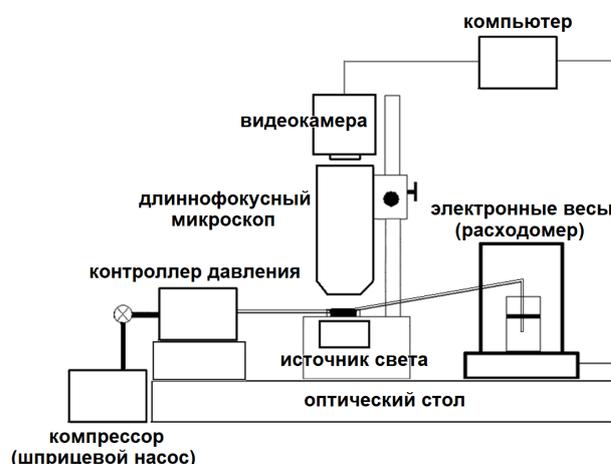


Рис. 2. Схема экспериментальной установки

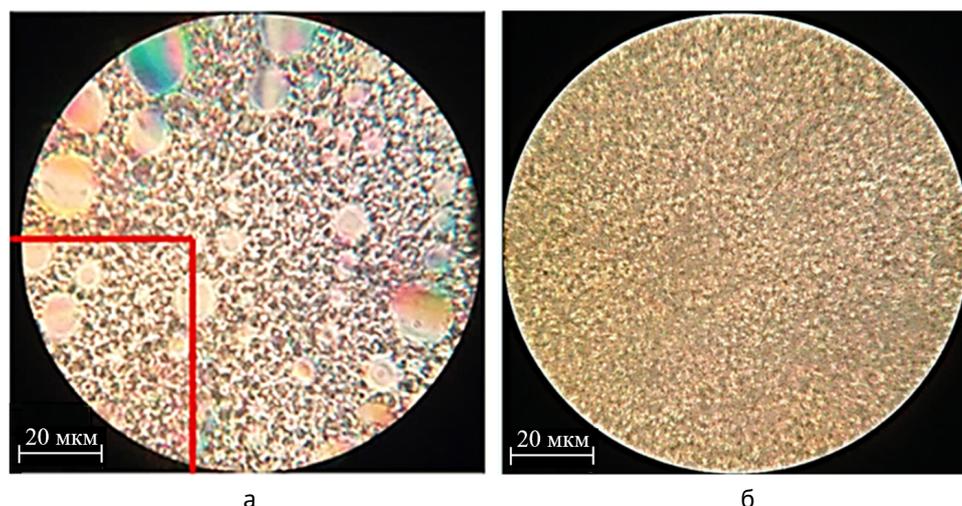


Рис. 3. Фотоизображения эмульсии с 1% эмульгатора (а) и 4% эмульгатора (б), диаметр видимой части составляет 114 мкм. Прямоугольником выделена область для подсчета размера капель

### 2.1. Обратные водонефтяные эмульсии

Используется эмульсия — 29% нефти, 70% воды, 1% эмульгатор (нефть Западно-Кочевненского месторождения) светло-коричневого цвета, вязкая. Спустя сутки после приготовления наблюдается выделение несущей фазы. Состав эмульсии: 70 мл пластовой воды с минерализацией 150 гр/л, 29 мл нефти, 1 мл эмульгатора Девон 4в марка А (концентрация эмульгатора в углеводородной фазе составляет 3,3%). Для эмульсии с содержанием 4% эмульгатора количество нефти составило 26 мл, 4 мл эмульгатора (в углеводородной фазе — 13,3%).

Приготовление: в емкость наливалась нефть и необходимое количество эмульгатора. Далее производилось перемешивание с частотой 500 об/мин. Спустя несколько минут частоту оборотов повышали до 3600 об/мин и добавляли с помощью дозатора воду по каплям. После этого перемешивание продолжалось в течение 30 минут.

После приготовления сделаны микрофотографии эмульсии. На рис. 3 представлены фотографии эмульсии с содержанием 1% и 4% эмульгатора, полученные с помощью микроскопа PZO.

Для контроля полученного увеличения снят объект-микрометр. С помощью программы Axio Vision изучены структуры эмульсий и распределение капель по размерам, для эмульсии с 1% эмульгатора построена гистограмма (рис. 4). Для построения использовалась часть приведенного изображения (прямоугольник на рис. 3(а)).

На этой площади отмечались размеры диаметров капель, которые заносились автоматически в таблицу. Далее, в программе Excel, проводилась

сортировка по размерам. Подсчитывалось количество капель с диаметром от 1 до 2 мкм — первый столбец и подобным образом с шагом 1 мкм до максимального диаметра, затем по полученным значениям построена гистограмма распределения числа капель в зависимости от диаметра. Изученная эмульсия преимущественно содержит капли размером от 2 до 8 мкм.

С помощью реометра HAAKE MARS III сняты реологические кривые на прямом и обратном ходе (рис. 5). Прямой ход осуществлен увеличением вращения скорости деформации сдвига с малых значений (0,05 1/с) до больших (500 1/с) постепенно, обратный ход — с больших значений уменьшение скорости деформации сдвига до малых значений.

Реометр измеряет напряжение сдвига по силе тока в обмотке, кажущаяся вязкость вычисляется путем деления полученного значения  $\tau$  на  $\dot{\gamma}$ , при малых скоростях деформации сдвига получа-

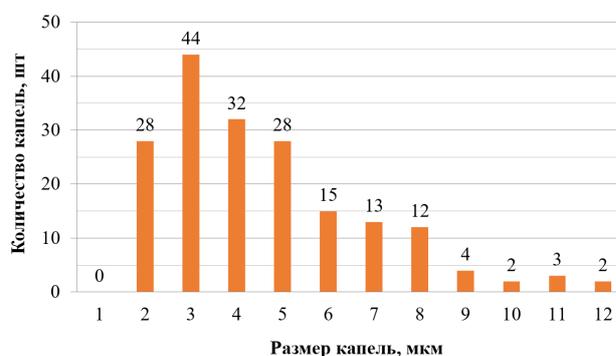


Рис. 4. Распределение капель по размерам

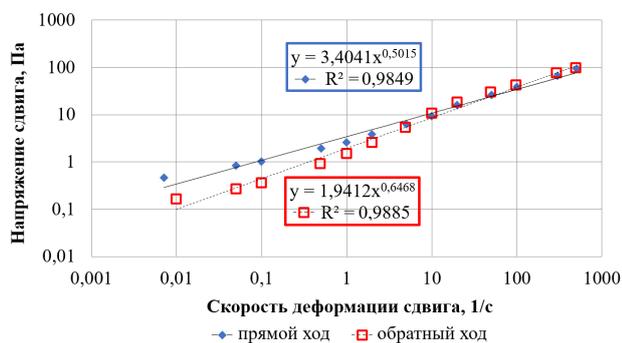


Рис. 5. Зависимость напряжения сдвига от скорости деформации сдвига, прямой и обратный ход (двойной логарифмический масштаб)

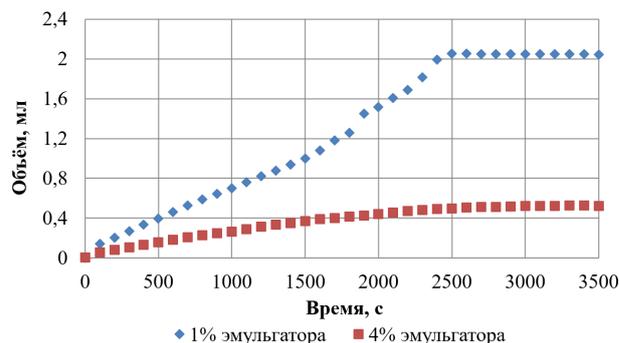


Рис. 6. Сравнение времени записания эмульсии с использованием Западно-Кочевненской нефти с разной концентрацией эмульгатора

ется деление типа «ноль на ноль», что вносит существенные ошибки в аппроксимационные кривые эффективной вязкости. Поэтому, при достаточно хорошей аппроксимации степенной функцией реологических кривых, эффективную вязкость нужно вычислять исходя из аналитического выражения  $\tau = k\dot{\gamma}^n$ . Таким образом, эффективную вязкость вычисляем по формуле  $\mu = k\dot{\gamma}^{n-1}$ , получаем значения  $\mu = 3,4041\dot{\gamma}^{-0,4985}$  для прямого хода и  $\mu = 1,9412\dot{\gamma}^{-0,3532}$  для обратного хода.

Эмульсия с содержанием 4% эмульгатора (рис. 3(б)) имеет размеры капель порядка 1 мкм, в то время как средний размер эмульсии с 1% эмульгатора составлял 3 мкм. Построив аналогичным образом (рис. 5) реологические кривые для эмульсии с содержанием эмульгатора 4% получили  $\mu = 11,296\dot{\gamma}^{-0,5397}$  для прямого хода и  $\mu = 10,189\dot{\gamma}^{-0,5033}$  для обратного хода.

Для сравнения эмульсий с эмульгатором концентрации 1% и 4% приводим отношения их вязкостей, используя показатели консистентности  $k$  и неньютоновского поведения  $n$  (из формулы  $\tau = k\dot{\gamma}^n$ ), получаем выражение  $\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{k_2}{k_1}\dot{\gamma}^{n_2-n_1}$ , откуда, подставив полученные значения для прямого хода, имеем  $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 3,32\dot{\gamma}^{-0,0412}$ . Для  $\dot{\gamma} = 1$  отношение вязкостей составит 3,32, для  $\dot{\gamma} = 10$  — 3,02, для  $\dot{\gamma} = 100$  — 2,74. Таким образом, сравнение эмульсий с концентрацией 1% и 4% эмульгатора показало, что вязкость эмульсии с 4% эмульгатора в 3 раза выше для прямого хода, для обратного хода отношение вязкостей будет около 5.

На рис. 6 представлено сравнение кривых записания эмульсии с использованием Западно-Кочевненской нефти с разной концентрацией эмульгатора, эксперимент проводился по схеме рис. 2.

Увеличение концентрации эмульгатора привело к уменьшению объема протекшей эмульсии до

записания, однако время наступления записания осталось примерно тем же.

При переходе в состояние «записания» движение в капилляре можно изучать с помощью микроскопа по последовательности видеок кадров. На рис. 7 приведены кадры до и после наступления записания для эмульсии с 4% эмульгатора. Структура течения со временем существенно преобразовалась: в стационарном гидродинамическом потоке картина однородна (кадр 1), в состоянии «записания» наблюдалась перемежающаяся структура, на кадре 4 можно различить 3 составляющих: углеводородная — прозрачная, эмульсия — белая (за счет рассеивания света) и выделившаяся водная фаза — прозрачная, ограниченная менисками.

Из рис. 6 видно, что с ростом концентрации эмульгатора происходит уменьшение объема протекшей эмульсии. Одной из причин этого является более высокая вязкость эмульсии с 4% эмульгатора по сравнению с эмульсией с добавлением 1% эмульгатора.

Для изучения влияния частиц на характер записания были проведены эксперименты с эмульсиями содержащими частицы нитевидной формы (хризотил) и сферической формы (аэросил).

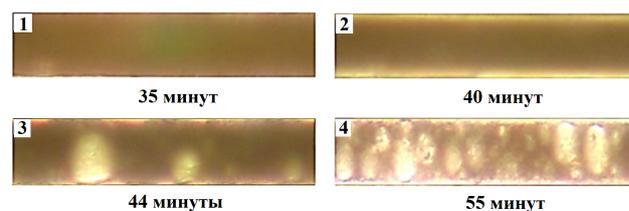


Рис. 7. Микровидеоизображения структуры течения эмульсии в цилиндрическом микроканале (диаметр 100 мкм) при перепаде давления 200 кПа

## 2.2. Эмульсии с хризотилом

Рассмотрим структуру асбеста. Плоскостные молекулы хризотилового асбеста имеют слоистую несимметричную структуру, вследствие чего они сворачиваются в очень тонкую трубочку. Диаметр такого «элементарного» игольчатого кристалла у хризотил-асбеста 10–30 нм, у крокидолита — 50–99 нм. Микроструктура асбеста — игольчатые кристаллы и их сростки. Товарный асбест представляет собой комплексы из сотен и тысяч соединенных вместе элементарных игольчатых кристаллов, имеющих поперечник около 0,1–0,5 мкм [7].

В ходе работ установлено, что при низкой концентрации эмульгатора (менее 1%) эмульсии с примесью хризотила являются нестойкими и разрушаются практически сразу после приготовления. В связи с этим эксперименты проводились на эмульсиях с высоким содержанием эмульгатора Девон 4в марка А (4%). Эмульсии с содержанием 4% эмульгатора и различной концентрацией хризотила (0,1%, 1%, 3%, 5%) изготавливались аналогично эмульсии с 4% эмульгатора; внешний вид полученных эмульсий в связи с низким процентным содержанием хризотила не отличался от внешнего вида аналогичной эмульсии с 4% эмульгатора.

С помощью реометра HAAKE MARS III получены реологическая кривая и кривая зависимости кажущейся вязкости от скорости сдвига на обратном ходе (рис. 8). Обратный ход вязкости значительно ниже прямого для всех измерений.

Вязкость эмульсии с 0,1% хризотила, согласно полученной зависимости (рис. 8), аналогична вязкости эмульсии без добавления хризотила. По сравнению с эмульсией с содержанием 0,1% хризотила, у эмульсии с 3% хризотила вязкость выше более чем в 2,5 раза и в полтора раза выше, чем у

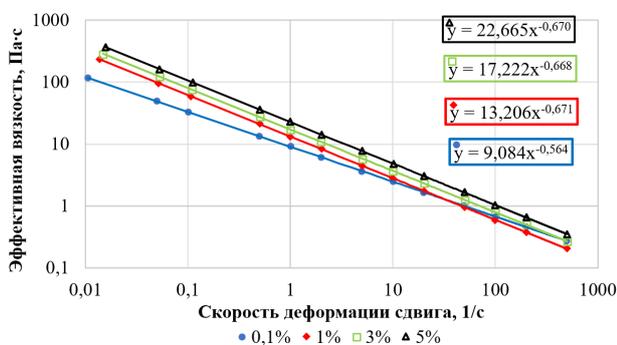


Рис. 8. Зависимость эффективной вязкости от скорости деформации сдвига для эмульсий с содержанием хризотила 0,1%, 1%, 3% и 5%, обратный ход (ось ординат — логарифмический масштаб)

эмульсии с содержанием 1% хризотила. Вязкость эмульсии с 5% хризотила оказалась более чем в 1,5 раза выше вязкости эмульсии с 3% хризотила на прямом ходе измерения и в 1,3 раза выше для обратного хода.

Гидродинамические эксперименты по течению в капиллярах проводились аналогично подразделу 2.1 на той же установке (рис. 2). На рис. 9 приведена расходная кривая — сравнение графиков записания эмульсий с различным содержанием хризотила. Для эмульсии с содержанием 4% эмульгатора и 1% хризотила замедление потока наступило за время около 15 секунд, далее шло уплотнение структуры. Поскольку масса протекшей эмульсии незначительна (2 мкг), то на графике видны неровности — колебания, связанные со сверхчувствительностью весов к малейшему изменению потоков воздуха. По сравнению с записанием эмульсии без добавления хризотила (рис. 6), где записание наступило лишь по истечении 3000 секунд, в данном случае (рис. 9) записание наступило уже за время менее 50 секунд, т.е. в 60 раз быстрее. Поскольку записание произошло достаточно быстро, микроструктура течения за это время изменилась несущественно, что отражено для эмульсии с содержанием 3% хризотила на рис. 10 (для эмульсий с другим содержанием хризотила картины аналогичные). Только спустя 10 минут начинает образовываться структура из деформированных микрокапель воды.

Из рис. 9 видно, что изменения концентрации хризотила уже до 1% достаточно для ускорения наступления записания. Дальнейшее увеличение концентрации до 3% не привело к существенному изменению объема и времени до наступления записания.

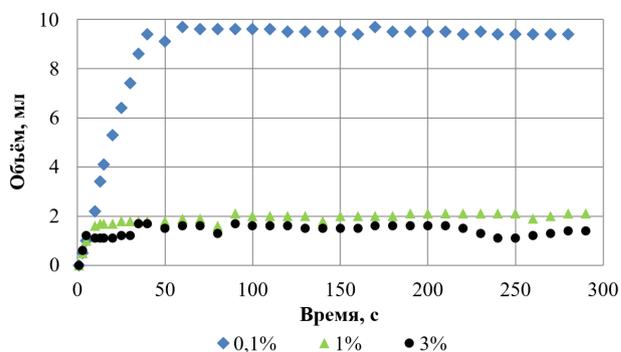


Рис. 9. Зависимость объема протекшей эмульсии (26% нефти и 70% воды) с использованием Западно-Кочевненской нефти с добавлением 4% эмульгатора от времени с различной концентрацией хризотила (0,1%, 1% и 3%)

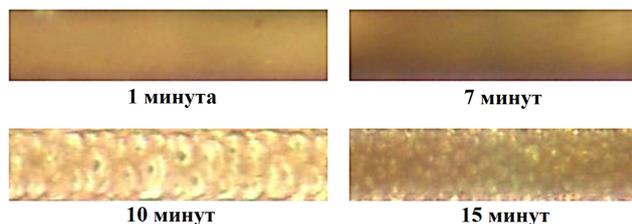


Рис. 10. Микровидеоизображения структуры течения эмульсии с 3% хризотила в цилиндрическом микроканале (диаметр 100 мкм) при перепаде давления 200 кПа

### 2.3. Течение эмульсии с хризотилом в модели трещины – ячейке Хеле–Шоу

Гидродинамические эксперименты в плоской модели проведены аналогично подразделу 2.1 на той же установке (рис. 2), только вместо капилляра использовалась ячейка Хеле–Шоу. При течении эмульсии без хризотила в ячейке Хеле–Шоу получили линейный график с расходом  $Q = 5$  мкл/с. На рис. 11 приведены расходные кривые для эмульсий с 4% эмульгатора и с 0,1% и 5% хризотила.

Как и при течении в капилляре, для эмульсии с содержанием 5% хризотила время и объем протекшей эмульсии до запираания значительно меньше, чем у эмульсии с содержанием 0,1% хризотила. Объем протекшей эмульсии незначителен, запираание произошло уже вблизи входа в ячейку.

### 2.4. Эмульсии с аэросилом

«Аэросил» — одно из торговых наименований пирогенного коллоидного диоксида кремния, применяемого в различных областях техники. Аэросил представляет собой порошок из изотропных мелких частиц, с формой близкой к сферической. В настоящей работе использовался Aerosil R 202 — гидрофобный аэросил, обработанный силосаном, который используется при производстве силиконовых герметиков, клеев, покрытий на основе эпоксицидов и винилэфиров. Плотность  $SiO_2 = 2,65$  г/см<sup>3</sup>, удельная площадь поверхности  $S = 100 \pm 20$  м<sup>2</sup>/г. Для сферической формы частиц, используя площадь сферы, получаем:  $d = 6m/\rho S$ . Подставляя имеющиеся значения, получаем диаметр частиц аэросила  $d = 23$  нм.

Эмульсия и способ ее приготовления использовался тот же (эмульгатор 4%), однако вместо хризотила добавили аэросил.

Сравнение полученных реологических зависимостей напряжений сдвига от скорости сдвига при различных концентрациях аэросила для прямого хода приведены на рис. 12, а на рис. 13 — сравнение

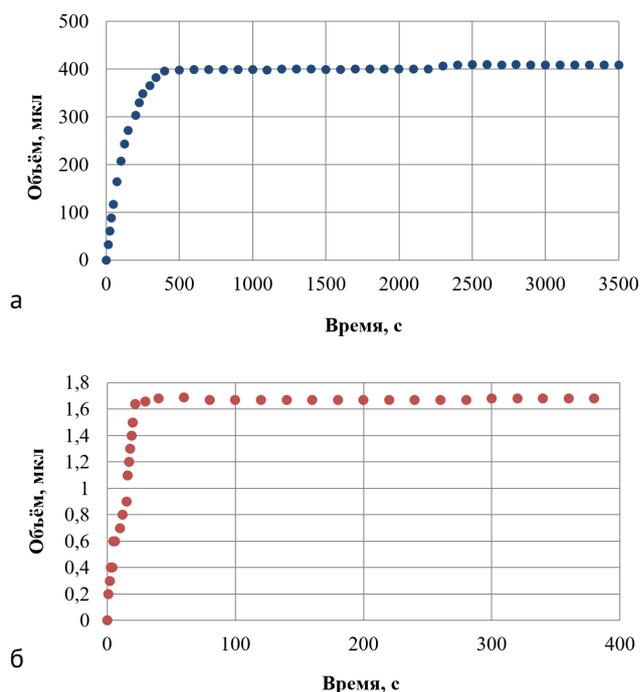


Рис. 11. Зависимость объема протекшей эмульсии (26% нефти, 70% воды) с использованием Западно-Кочевненской нефти с добавлением 4% эмульгатора от времени при концентрации 0,1% хризотила (а) и 5% хризотила (б)

зависимостей эффективной вязкости от скорости деформации сдвига для обратного хода.

По сравнению с эмульсией с содержанием аэросила 0,1%, вязкость эмульсии с 1% аэросила выше более чем в полтора раза, а у эмульсии с 3% аэросила вязкость еще в полтора раза выше. Из графиков (рис. 13) следует, что увеличение концентрации аэросила приводит к увеличению вязкости эмульсии. Сравнение прямого и обратного хода по-

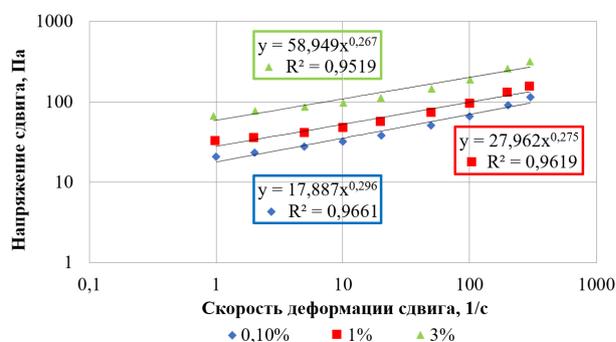


Рис. 12. Зависимость напряжения сдвига от скорости деформации сдвига для эмульсий с концентрацией аэросила 0,1%, 1% и 3%, прямой ход (двойной логарифмический масштаб)

казывает, что с увеличением концентрации аэросила разница обратного хода с прямым ходом становится все больше, при этом сам обратный ход ниже прямого.

## 2.5. Течение эмульсий с аэросилом в капилляре и ячейке Хеле–Шоу

Гидродинамические эксперименты по течению эмульсии в капилляре и ячейке Хеле–Шоу с различным содержанием аэросила проведены аналогично подразделу 2.1 на той же установке (рис. 2). Для удобства сравнения течения в капилляре при перепаде давления 200 кПа все графики эмульсий с концентраций аэросила 0,1%, 1% и 3%, а также эмульсии без аэросила представлены на одном рисунке (рис. 14).

Согласно полученным графикам (рис. 14) увеличение концентрации аэросила приводит к уменьшению объема протекшей эмульсии до запираания и уменьшению времени наступления запираания. Объем протекшей эмульсии до запираания и время наступления запираания на порядок больше, чем у эмульсии с добавлением хризотила (рис. 9).

Гидродинамические эксперименты по течению эмульсии в ячейке Хеле–Шоу с концентрациями 0,1% и 1% аэросила приведены на рис. 15. Согласно рис. 15 запираание эмульсии с 0,1% аэросила в щели по истечении рассматриваемого времени так и не наступило, наклон кривой ( $y = 2,1x$ ) не уменьшился. Поэтому принято решение провести эксперимент с более вязкой эмульсией с содержанием 1% хризотила. Начальный участок на рис. 15 связан с заполнением ячейки — движением воды, что видно на первых кадрах рис. 16, далее идет нефть и угол наклона расходной кривой уменьшается.

До наступления запираания структура течения, согласно кадрам рис. 16, меняется незначительно. В отличие от эмульсии с содержанием 0,1% хризотила у эмульсии с 1% хризотила (рис. 15) угол наклона кривой меняется уже по прошествии 250 секунд, что свидетельствует о замедлении скорости течения и начале процессов, приводящих к запираанию.

## 3. Заключение

Изучены реологические свойства обратных водонефтяных эмульсий, приготовленных из нефти, минерализованной воды Западно-Кочевненского месторождения и эмульгатора Девон 4в марка А; проведено сравнительное изучение при добавлении хризотила и аэросила различной весовой концентрации. Изучено течение в капиллярах и в модели трещины (ячейка Хеле–Шоу), а также проявление эффекта динамического запираания для трех

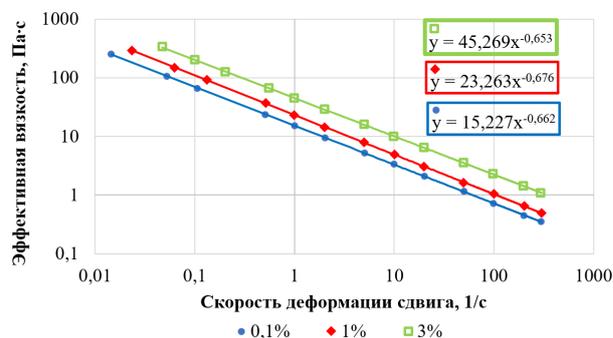


Рис. 13. Зависимость эффективной вязкости от скорости деформации сдвига для эмульсий с содержанием аэросила 0,1%, 1% и 3%, обратный ход (двойной логарифмический масштаб)

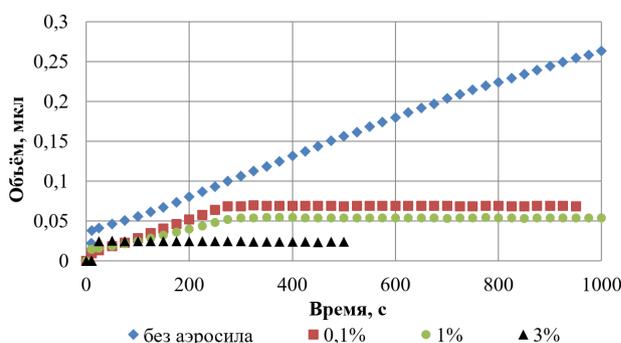


Рис. 14. Зависимость объема протекшей эмульсии (26% нефти и 70% воды) с использованием Западно-Кочевненской нефти с добавлением 4% эмульгатора от времени с различной концентрацией аэросила

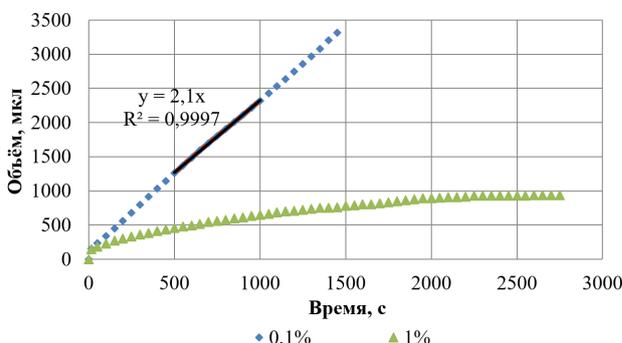


Рис. 15. Зависимость объема протекшей эмульсии (26% нефти 70% воды) с использованием Западно-Кочевненской нефти с добавлением 4% эмульгатора от времени при концентрации 0,1% и 1% аэросила

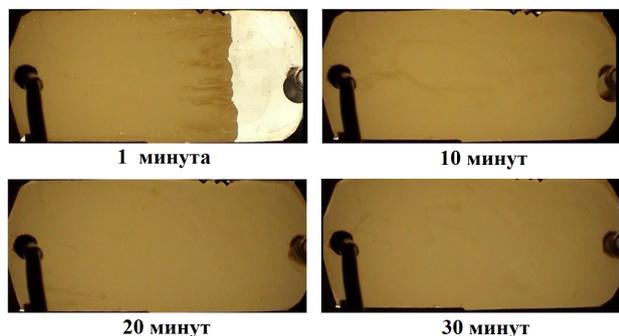


Рис. 16. Микровидеоизображения структуры течения эмульсии с содержанием 1% аэросила в ячейке Хеле–Шоу при перепаде давления 200 кПа

типов эмульсий: инвертной эмульсии, эмульсии с аэросилом и эмульсии с анизотропным включением — хризотилом.

При измерении реологических параметров системой конус–пластина установлено:

1. Реологические кривые с хорошей степенью достоверности описываются степенной функцией, что соответствует модели жидкости Оствальда–де Ваале. Прохождение кривой обратного хода ниже кривой прямого хода, что объясняется меньшей устойчивостью эмульсии с крупными каплями, часть из которых в сдвиговом потоке коалесцирует, эмульсия становится крупнодисперсной и менее вязкой, что характерно для малых концентраций эмульгатора. При больших концентрациях микрокапли практически не коалесцируют и эмульсия более устойчива.
2. Увеличение концентрации эмульгатора от 1% до 4% приводит к уменьшению размеров микрокапель от 5 мкм до 1 мкм и увеличению эффективной вязкости (например, в диапазоне скорости деформации сдвига 0,1–100 они отличаются в 3 раза).
3. Добавление нанопорошков приводит к возрастанию вязкости эмульсии. Изменение концентрации хризотила от 0,1% до 5% увеличивает вязкость более чем в 3 раза, а концентрации аэросила от 0,1% до 3% — в 3 раза.
4. С изотропными наночастицами аэросила эмульсия устойчива, прямой и обратный ход мало отличаются. С хризотилом частицы анизотропные, прямой и обратный ход отличаются существенно, это связано с тем, что по мере вращения конуса в сдвиговом течении частицы хризотила выстраиваются вдоль линий тока, что приводит к снижению реологической кривой.

Изучение эффекта динамического запирания показало:

1. Увеличение содержания изотропных и анизотропных частиц привело, помимо увеличения вязкости, к уменьшению времени наступления динамического запирания.
2. При одинаковом процентном содержании частиц у эмульсий, содержащих хризотил, время наступления запирания и объем протекшей эмульсии до запирания на порядок меньше, чем у эмульсий с содержанием аэросила. Однако при этом вязкость эмульсии с аэросилом даже выше, чем у аналогичной эмульсии с хризотилом. Это можно объяснить тем, что хризотил — анизотропный порошок со специфическим строением.

Полученные в ходе экспериментальных исследований результаты позволяют сделать вывод, что использование обратных водонефтяных эмульсий, содержащих твердые включения, эффективно для глушения скважин в трещиноватых породах. Компоненты, используемые в приготовлении эмульсий, зачастую доступны на месторождениях (реагенты на основе нефти, вода, эмульгаторы), что помогает снизить себестоимость ремонтных работ.

## Список литературы

- [1] Петров Н.А., Соловьев А.Я., Султанов В.Г., Кротов С.А., Давыдова И.Н. Эмульсионные растворы в нефтегазовых процессах. М.: Химия, 2008. 440 с.
- [2] Ахметов А.Т., Телин А.Г., Мавлетов М.В., Здольник С.Е. Новые принципы применения обратных водонефтяных эмульсий в потокоотклоняющих технологиях и глушении скважин // Нефтегазовое дело. 2005. № 3. С. 19–26. (DOI: 10.17122/ngdelo-2005-0-119-126)
- [3] Ахметов А.Т., Саметов С.П., Рахимов А.А., Латыпова Д.Р., Ханова М.Д., Докичев В.А. Эффект динамического запирания инвертно эмульсионных растворов на основе эмульгатора-стабилизатора обратных эмульсий СЭТ-1 // Нефтегазовое дело. 2013. Т. 11, № 2. С. 64–70. (DOI: 10.17122/ngdelo-2013-2-64-70)
- [4] Akhmetov A.T., Mavletov M.V., Rakhimov A.A., Sametov S.P., Akhatov I.Sh. Water-hydrocarbon emulsion flow in microchannels // ASME 2011 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. American Society of Mechanical Engineers. 2011. С. 181–188. (DOI: 10.1115/IMECE2011-62927)
- [5] Alfir T., Akhmetov, Marat V., Mavletov, Sergey P., Sametov, Artur A., Rakhimov, Azat A., Valiev, Iskander S., Akhatov. Dispersion Flow In Microchannels // Proceedings of ASME 2012 International Mechanical Engineering Congress & Exposition. IMECE2012. 2012. Houston. 8 p. (DOI: 10.1115/IMECE2012-86618)
- [6] Рахимов А.А. Проявление неустойчивости при течении инвертных эмульсий в микроканалах // Вестник Башкирского университета. 2013. Т. 18. № 3. С. 668–673. (<http://bulletin-bsu.com/archive/2013/3/7/>)
- [7] Интернет-источник по описанию хризотила: <http://biofile.ru/geo/23503.html> (дата обращения 7 ноября 2018 г.)



## Study of the effect of dynamic blocking of emulsions containing solid inclusions

Rakhimov A.A. \*, Akhmetov A.T.\*\*, Valiev A.A. \*, Asadullin R.R.\*\*\*

\*Mavlutov Institute of Mechanics, UFRS RAS, Ufa

\*\*Ufa State Petroleum Technological University, Ufa

\*\*\*LLC "Ufa Scientific and Technical Center", Ufa

The paper presents the results of experimental studies of the flow of stabilized water-oil emulsions prepared from oil and formation water from the wells of the West Kochevne field, as well as with the presence of chrysotile and aerosil in cylindrical and flat capillaries (in the crack patterns). The effect of dynamic blocking has been discovered, which consists in the fact that in sections of capillaries and in a model of cracks, with a constant pressure drop, the flow of reverse oil-water emulsions stops with time. An increase in the content of isotropic and anisotropic particles led to an increase in the viscosity of the emulsion and a decrease in the time of onset of dynamic blocking. With the same percentage of particles in emulsions containing chrysotile, the time of onset of blocking and the volume of leaked emulsion before blocking is an order of magnitude less than that of emulsions containing aerosil. However, in this case, the viscosity of the emulsion with aerosil is even higher than that of a similar emulsion with chrysotile.

**Keywords:** dispersion, emulsion, capillary, Hele–Show cell, dynamic blocking



## Численное моделирование динамики одиночного парового пузырька в жидкости в интенсивном акустическом поле<sup>1</sup>

Давлетшин А.И., Халитова Т.Ф.

Институт механики и машиностроения – обособленное структурное подразделение ФИЦ КазНЦ РАН, Казань

Изучается возможность повышения экономичности расчетов путем совместного применения двух моделей динамики одиночного слабонесферического парового пузырька при его сильном сжатии в жидкости. В обеих моделях движение жидкости и пара расщепляется на сферическую составляющую и ее малое несферическое возмущение. Модели различаются описанием сферической составляющей. В первой (упрощенной) модели она описывается системой ОДУ совместно с уравнениями в частных производных для температуры, полученными в предположении слабой сжимаемости жидкости и гомобаричности пузырька. Во второй (полной) модели применяются одномерные уравнения газовой динамики. Преимущество упрощенной модели состоит в определении численного решения с более низкими затратами компьютерного времени по сравнению с численным интегрированием уравнений газовой динамики. Используемые в упрощенной модели допущения в финале сжатия становятся несправедливыми, в результате чего погрешности численного решения возрастают. В силу этого упрощенную модель предлагается применять в начале сжатия пузырька, а в конце сжатия – уравнения газовой динамики. При таком подходе численное решение в финале сжатия оказывается зависящим от момента перехода к уравнениям газовой динамики. Показано, что удовлетворительное описание эволюции искажения сферичности пузырька достигается тогда, когда переход осуществляется при значении числа Маха газа  $M$  в окрестности поверхности пузырька, не превышающем 0.4, а динамики ударной волны в пузырьке в финале его сжатия – в случае перехода при  $M < 0.2$ .

**Ключевые слова:** кавитационный пузырек, ударные волны, деформация пузырька, модель Рэлея–Плессета, уравнения газовой динамики

### 1. Введение

С динамикой пузырьков в жидкости в интенсивном акустическом поле связаны такие активно изучаемые явления, как свечение одиночного и многих пузырьков, нейтронная эмиссия, акустические стримеры, кавитационное разрушение [1, 2]. Исследование сильного сжатия одиночных пузырьков в акустическом поле фактически началось после открытия в 1990 г. явления сонолюминесцен-

ции — длительного периодического свечения одиночного воздушного пузырька в воде в пучности стоячей волны давления [3]. К настоящему времени считается, что причиной свечения пузырьков является сильное сжатие их содержимого [4]. При этом сжатие пузырька может осуществляться как с образованием, так и без образования ударных волн в его полости в финале сжатия [5]. Близкая к сферической фокусировка сходящихся ударных волн в пузырьке будет приводить к значительно более сильному сжатию среды в его полости [6]. Так, в работе [7] показано, что в ацетоне и в тетрадекане в полости сферического пузырька при его сильном сжатии могут достигаться температуры более  $10^5$  К, и давления более  $10^6$  бар.

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-31-00214).

В общем случае для изучения сильного сжатия пузырьков необходимо применение прямого численного моделирования. Однако даже при рассмотрении одиночного пузырька оно может потребовать больших затрат компьютерного времени. Поэтому, как правило, исследования проводят с использованием различных упрощающих предположений, соответствующих рассматриваемой задаче [8]. Так, при описании динамики слабонесферического пузырька довольно часто применяют квазиодномерный подход, в котором движение жидкости и газа (пара) расщепляют на сферическую составляющую и ее малое несферическое возмущение [7, 9].

В настоящее время наиболее реалистичной моделью динамики сферической составляющей является модель академика Р.И. Нигматулина [10]. В ней движение как пара в пузырьке, так и окружающей жидкости описывается уравнениями газовой динамики. Учитываются нестационарная теплопроводность, эффекты неравновесных испарения и конденсации на межфазной поверхности, используются широкодиапазонные уравнения состояния.

Для описания малого несферического возмущения обычно применяют обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка [9]. Достоверность и экономичность такого квазиодномерного подхода в случае одиночного пузырька были показаны сравнением с результатами применения полной двумерной модели [11].

Наряду с уравнениями газовой динамики сферическая составляющая зачастую описывается также и обыкновенным дифференциальным уравнением Рэлея–Плессета [1, 12]. При его получении применяются допущения о слабой сжимаемости жидкости и однородности распределения параметров пара внутри пузырьков. Уточнением данного подхода является описание сферической составляющей системой ОДУ (включающей уравнение Рэлея–Плессета для радиуса пузырька) совместно с двумя уравнениями в частных производных для определения неоднородных полей температуры в газе и жидкости [13]. При этом учитывается также и испарение–конденсация на поверхности пузырька, а сам пузырек предполагается гомобарическим. При таких упрощениях расчет сферической составляющей становится многократно экономичнее по сравнению с численным интегрированием уравнений газовой динамики в частных производных.

Допущения о слабой сжимаемости жидкости и однородности распределения параметров пара внутри пузырька являются достаточно обоснованным в начале его сжатия, тогда как в финале сильного сжатия они могут оказаться неприемлемыми.

Так, распределение газодинамических параметров может стать сильно неоднородным вплоть до образования ударных волн в полости пузырька, может существенно проявиться сжимаемость жидкости. В результате численное решение может значительно расходиться с действительностью.

В настоящей работе изучается возможность повышения экономичности расчетов сильного сжатия слабонесферического парового пузырька путем совместного применения описанных выше моделей, когда сферическая составляющая динамики пузырька в начале его сжатия описывается системой ОДУ совместно с двумя уравнениями теплопроводности, а в конце сжатия используются уравнения газовой динамики. Учитываются вязкость, поверхностное натяжение, испарение–конденсация на межфазной поверхности. Исследования проводятся в условиях экспериментов по акустической кавитации дейтерированного ацетона [10]. Изменение малого несферического возмущения поверхности пузырька описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. Отметим, что эффективность указанного сочетания моделей сферической составляющей динамики пара и жидкости в случае сжатия одиночного чисто сферического воздушного пузырька в воде в умеренном акустическом поле была продемонстрирована в [13, 14]. Такое сочетание применялось также в [10] при изучении сжатия сферического парового пузырька в жидкости в интенсивном акустическом поле.

## 2. Постановка задачи и математическая модель

Исследуется возможность повышения экономичности расчетов однократного сильного сжатия одиночного слабонесферического парового (кавитационного) пузырька в жидком ацетоне в интенсивном акустическом поле. В начале сжатия радиус пузырька  $R$  равен  $R^0 = 0.5$  мм, давление жидкости  $p_L = 15$  бар, ее температура  $T_L = 273$  К, плотность  $\rho_L = 929$  кг/м<sup>3</sup>, скорость звука в жидкости  $c_L = 1131.7$  м/с, давление пара в пузырьке равно давлению насыщенных паров  $p_S(T)$  при температуре  $T = T_L$ . В финальной стадии сжатия внутри пузырька образуется сходящаяся к его центру ударная волна, фокусировка которой вызывает экстремальный рост температуры, плотности и давления в центральной области пузырька.

Уравнение поверхности пузырька в сферической системе координат с началом отсчета в центре

пузырька можно записать следующим образом

$$r_s(\theta, t) = R(t) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(t) P_n(\cos \theta).$$

Здесь  $t$  — время;  $r, \theta$  — радиальная и угловая координаты сферической системы отсчета;  $a_n$  — амплитуда отклонения формы пузырька от сферической в виде сферической гармоники  $P_n(\cos \theta)$ , где  $P_n$  — полином Лежандра степени  $n$ . Величина искажения сферичности характеризуется параметром  $\varepsilon_n = a_n/R$ . Искажения сферичности пузырька малы, так что при всех  $n$  имеем  $|\varepsilon_n| \ll 1$ .

С учетом малости несферичности пузырька эволюция  $a_n$  изучается для разных номеров  $n$  отдельно. В таком случае уравнение поверхности записывается в более простом виде:

$$r_s(\theta, t) = R(t) + a_n(t) P_n(\cos \theta).$$

Полагается, что в начале сжатия  $\varepsilon_n = 10^{-5}$ ,  $\dot{\varepsilon}_n = 0$ .

Повышение экономичности расчетов сильного сжатия слабонесферического пузырька достигается путем совместного применения двух моделей. В обеих моделях движение жидкости и пара расщепляется на сферическую составляющую и ее малое несферическое возмущение. Модели различаются описанием сферической составляющей, тогда как изменение ее малого несферического возмущения описывается в них обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. В первой модели сферическая составляющая описывается системой ОДУ и двумя уравнениями теплопроводности в частных производных. Во второй модели применяется система уравнений газовой динамики, выражающая законы сохранения массы импульса и полной энергии. Численное решение системы уравнений первой модели требует многократно меньших затрат компьютерного времени по сравнению с затратами на интегрирование уравнений газовой динамики. Однако уравнения первой модели в финале сильного сжатия становятся неадекватными. Поэтому они применяются лишь в начале сжатия, тогда как в конце сжатия используются уравнения газовой динамики. В настоящей работе изучается зависимость погрешностей численного решения от момента перехода первой системы уравнений ко второй с целью выявления возможностей повышения экономичности расчетов.

## 2.1. Уравнения сферической составляющей динамики жидкости и газа в начале сжатия

Система уравнений сферической составляющей динамики газа и жидкости в начале сжа-

тия аналогична используемой в [13] и включает в себя ОДУ для скорости жидкости на поверхности пузырька:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{u^+}{c_L}\right) R \dot{u}^+ + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{u^+}{3c_L}\right) (u^+)^2 + \\ & + 2 \left(1 - \frac{u^+}{4c_L}\right) u^+ (\dot{R} - u^+) = \\ & = \left(1 + \frac{\dot{R}}{c_L}\right) \frac{p^+ - p_L}{\rho_L} + \frac{R}{c_L} \frac{\dot{p}^+ - \dot{p}_L}{\rho_L}, \end{aligned} \quad (1)$$

для радиуса пузырька:

$$\dot{R} = u^+ + \frac{j}{\rho_L} \quad (2)$$

и для давления внутри пузырька:

$$\dot{p}^- = \frac{3}{R} \left[ (\gamma - 1) \kappa^- \frac{\partial T^-}{\partial r} - \gamma p^- u^- \right]. \quad (3)$$

В этих уравнениях

$$\begin{aligned} p^+ &= p^- - \frac{4\mu_L u^+}{R} - \frac{2\sigma}{R}; \\ u^+ + j/\rho^+ &= u^- + j/\rho^-; \end{aligned} \quad (4)$$

$\rho$  — плотность;  $u$  — радиальная скорость;  $p$  — давление;  $T$  — температура;  $c_L$  — скорость звука в жидкости;  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности;  $j$  — интенсивность фазовых преобразований;  $\gamma$  — показатель адиабаты для пара;  $\mu_L$  — коэффициент вязкости жидкости;  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения. Значения параметров на межфазной границе обозначены знаком «+» со стороны жидкости, знаком «-» со стороны пара.

Интенсивность фазовых преобразований  $j$  описывается формулой Герца-Кнудсена-Ленгмюра [10]:

$$j = \frac{\alpha_{ac}}{\sqrt{2\pi R_v}} \left( \frac{p_S(T^+)}{\sqrt{T^+}} - \frac{\chi p^-}{\sqrt{T^-}} \right),$$

где

$$\chi = \exp(-\Omega^2) - \Omega \sqrt{\pi} \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\Omega} \exp(-x^2) dx \right),$$

$$\Omega = \frac{j}{\sqrt{2} p^-} \sqrt{R_v T^-}.$$

Здесь  $p_S$  — давление насыщения;  $\alpha_{ac}$  — коэффициент аккомодации;  $R_v$  — газовая постоянная для пара. Посредством параметра  $\chi$  учитывается подвижность поверхности пузырька. Используемые зависимости  $\mu_L(T)$ ,  $\sigma(T)$ ,  $p_S(T)$ ,  $\kappa^+(T)$ ,  $\kappa^-(T)$  построены с учетом известных экспериментальных данных [15].

Кроме ОДУ система уравнений сферической составляющей динамики газа и жидкости в начале сжатия включает уравнения в частных производных для температуры в паре

$$\begin{aligned} \frac{\gamma p^-}{(\gamma - 1)T} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \\ = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{p}^-, \end{aligned} \quad (5)$$

и жидкости

$$C_{\rho L} \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (6)$$

где  $C$  — удельная теплоемкость жидкости. Граничными условиями для этих уравнений являются условия в центре пузырька  $r = 0$ :

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad (7)$$

на межфазной поверхности  $r = R(t)$ :

$$T^+ = T^-, \quad \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right)^+ - \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right)^- = jl, \quad (8)$$

где  $l$  — теплота парообразования, и на большом удалении от поверхности пузырька  $r = \infty$ :

$$T = T_L.$$

Поле скорости в паре определяется следующим выражением:

$$u = \frac{\gamma - 1}{\gamma p^-} \kappa \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{r}{3\gamma p^-} \dot{p}^-,$$

а в жидкости:

$$u = \frac{u^+ R^2}{r^2}.$$

На каждом шаге по времени система ОДУ (1)–(3) рассчитывается методом Рунге–Кутты. При этом входящие в нее характеристики полей температуры берутся с предыдущего временного шага. Аналогично, по неявной схеме с использованием метода прогонки, рассчитываются уравнения в частных производных (5), (6) на каждом шаге по времени. При этом входящие в них характеристики, не относящиеся к полю температуры, берутся с предыдущего временного шага.

При переходе к расчету уравнений газовой динамики радиальное распределение давления жидкости определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} p = p^+ - \rho_L \left( R \dot{u}^+ + 2R \dot{u}^+ - \frac{(u^+)^2}{2} \right) + \\ + \frac{\rho_L}{r} \frac{d}{dt} \left( R^2 u^+ \right) - \frac{\rho_L R^4}{2r^4} (u^+)^2. \end{aligned}$$

Плотность  $\rho$  и удельная полная энергия  $E$  как пара, так и жидкости пересчитываются по давлению, температуре и скорости с применением уравнений состояния [15].

## 2.2. Уравнения сферической составляющей динамики жидкости и газа в конце сжатия

Уравнения сферической составляющей динамики газа и жидкости в конце сжатия имеют вид [10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho r^2) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho u r^2) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho u r^2) + \frac{\partial}{\partial r} (p r^2 + \rho u^2 r^2) = 2pr, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho E r^2) + \frac{\partial}{\partial r} \left[ u r^2 (p + \rho E) - \kappa \frac{\partial T}{\partial r} r^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Для их замыкания используются уравнения состояния жидкого и парообразного ацетона в форме Ми–Грюнайзена [15].

Граничными условиями в центре пузырька  $r = 0$  и на межфазной поверхности  $r = R(t)$  являются условия (7), (4) и (8) соответственно. Граничные условия на большом удалении от поверхности пузырька  $r = \infty$  имеют следующий вид:

$$p = p_L, \quad T = T_L. \quad (10)$$

Система уравнений (9) с граничными условиями (4), (7), (8), (10) решается численно с помощью эффективной модификации метода С.К. Годунова, имеющей второй порядок точности [16].

## 2.3. Уравнения несферической составляющей динамики пузырька

Несферическая составляющая динамики пузырька описывается уравнением для амплитуды отклонения формы пузырька от сферической  $a_n$  [11]:

$$\begin{aligned} (1 + q_n) \ddot{a}_n + \\ + \left[ \frac{3\dot{R}}{R} + 2(n+1)(n+2) \frac{v_L}{R^2} \right] \dot{a}_n + \\ + \left[ \omega_n^2 + \frac{4v_L(n^2-1)\dot{R}}{R^3} - \right. \\ \left. - \frac{(n-1)(1-q_n)\dot{R}}{R} \right] a_n = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$q_n = \frac{(n+1)p^-}{n\rho_L}, \quad \omega_n^2 = \frac{(n^2-1)(n+2)}{\rho_L R^3}.$$

Здесь  $\rho^-$  — плотность пара на межфазной поверхности;  $\nu_L = \mu_L/\rho_L$  — кинематический коэффициент вязкости.

Обыкновенное дифференциальное уравнение (11) решается методом Рунге–Кутты.

### 3. Результаты

В настоящей работе начальная стадия сжатия пузырька (начальный промежуток сжатия, в котором радиальная составляющая динамики жидкости и газа описывается упрощенно уравнениями (1)–(3), (5), (6)) отделяется от финальной стадии (следующий за начальным промежуток сжатия, в котором радиальная составляющая описывается уравнениями газовой динамики (9)) по некоторому заданному значению числа Маха  $M = |u^-|/c^-$ , где  $c^-$  — скорость звука пара на межфазной поверхности. Для оценки погрешностей расчетов с помощью упрощенного описания применяется «эталонное решение», в котором упрощенное описание вообще не используется. При численном интегрировании уравнений газовой динамики (9) в качестве внешней границы области жидкости принимается сфера  $r = 9R$ . Используется неравномерная (сгущающаяся к поверхности пузырька) расчетная сетка из 300 ячеек в паре и 700 ячеек в жидкости. Более подробное описание ее структуры можно найти в работе [17].

#### 3.1. Радиальное движение

Рис. 1 иллюстрирует временную зависимость радиуса пузырька  $R(t)$  при его сжатии в эталонном решении  $M = 0$  и решениях, рассчитанных с переходом от упрощенного описания сферической составляющей динамики жидкости и газа в начальной стадии сжатия уравнениями (1)–(3), (5), (6) к ее более адекватному описанию уравнениями (9) при  $M = 0.2, 0.3$  и  $0.4$ . Полученные результаты графически совпадают (погрешность вычисления минимального радиуса составляет менее 1%), так что на изменение радиуса пузырька выбор момента перехода влияет мало.

Рис. 2 характеризует влияние определяемого значением числа  $M$  момента перехода от упрощенной модели радиальной составляющей динамики жидкости и газа к полной газодинамической модели на погрешности рассчитываемых радиальных распределений давления и скорости в паре и окружающем пузырек слое жидкости. Видно, что с увеличением значения  $M$  погрешность возрастает. Так, если при  $M = 0.2$  распределения давления в жидкости, рассчитанные в соответствующий момент времени с применением упрощенного моделирования, визуально близки к эталонному реше-

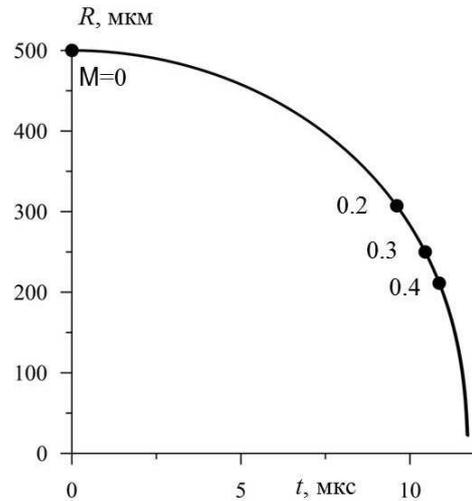


Рис. 1. Графически совпадающее изменение радиуса пузырька при его сжатии в эталонном решении ( $M = 0$ ), рассчитанном без применения упрощенного моделирования, и трех вариантах, рассчитанных с упрощенным моделированием начального участка (до  $M = 0.2, 0.3$  и  $0.4$ )

нию, то при  $M = 0.3$  и  $0.4$  увеличение расстояния до поверхности пузырька приводит к удалению от эталонного решения. Вместе с тем, в жидкости в окрестности межфазной границы радиуса 100 мкм расхождение с эталонным решением во всех случаях оказывается вполне приемлемым (максимальная погрешность менее 2%).

Со временем погрешности численного решения, обусловленные применением упрощенного описания начальной стадии сжатия, все более возрастают. Рис. 3 демонстрирует их увеличение к моменту времени, когда фронт образовавшейся внутри пузырька радиально сходящейся ударной волны достиг положения  $r = 2.5$  мкм (в этот момент радиус пузырька  $R = 24$  мкм). Видно, что при упрощенном моделировании сжатия до  $M = 0.2$  максимум погрешности составляет 1–2% процентов, до  $M = 0.3$  — около 10%, а до  $M = 0.4$  — около 20%. Отсюда следует, что упрощенное моделирование до  $M = 0.2$  позволяет получить удовлетворительное описание газодинамических процессов в пузырьке вплоть до конца его сжатия. При этом затраты компьютерного времени (на персональном компьютере Intel Core i7-4770 CPU 3.4 ГГц с оперативной памятью 8 Гб) по сравнению с затратами на эталонное решение сокращаются примерно в 3 раза.

#### 3.2. Возмущение сферичности пузырька

Рис. 4 характеризует погрешности в описании эволюции возмущения сферичности пузырька

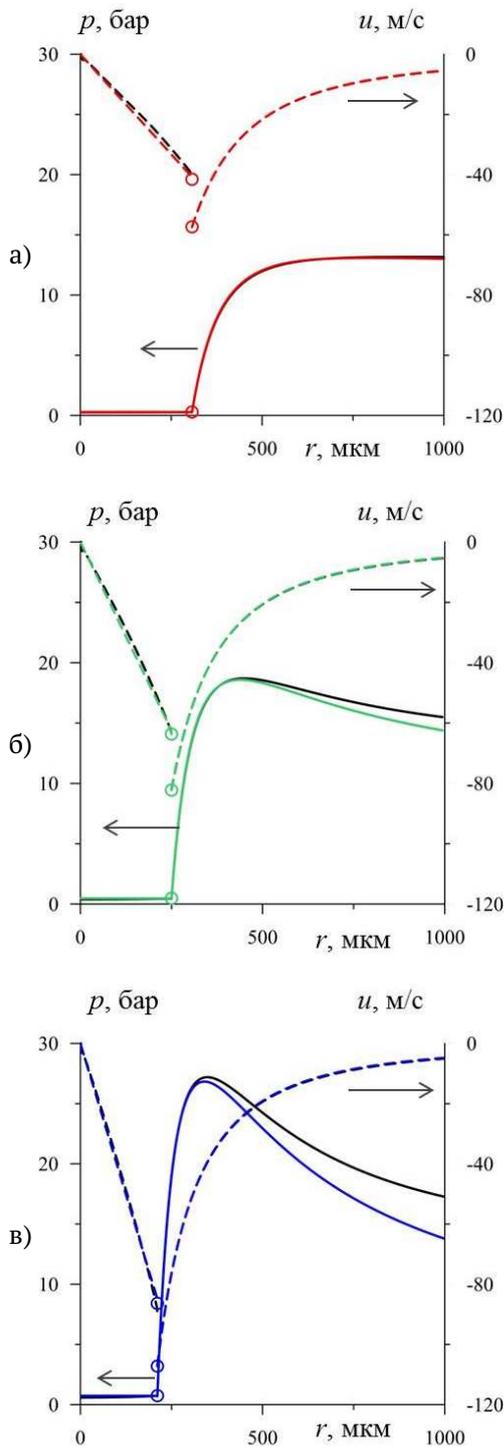


Рис. 2. Радиальные распределения давления и скорости в три момента времени, соответствующие  $M = 0.2$  (а),  $M = 0.3$  (б) и  $M = 0.4$  (в). Цветные линии представляют численные решения с упрощенным моделированием начала сжатия до соответствующего момента, черные линии – эталонное решение без упрощенного моделирования. Кружками обозначены значения на межфазной границе

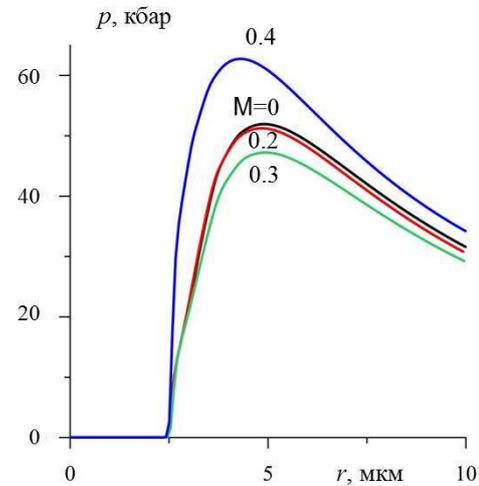


Рис. 3. Радиальные распределения давления в пузырьке в момент достижения фронтом ударной волны положения  $r = 2.5$  мкм по результатам расчетов с упрощенным моделированием сферической составляющей динамики жидкости и газа до  $M = 0.2, 0.3$  и  $0.4$  и в эталонном решении ( $M = 0$ ) без упрощенного моделирования

при сжатии в результате упрощенного моделирования его начальной стадии. Видно, что при всех рассматриваемых значениях  $M$  расхождение с эталонным решением не превышает 5%, что свидетельствует о меньшей чувствительности формы пузырька к упрощенному моделированию начальной стадии сферической составляющей динамики жидкости и газа. По-видимому это обусловлено тем, что малочувствительной к упрощенному моделированию начальной стадии является радиальная составляющая движения поверхности пузырька (рис. 1). Из рис. 4 следует, что удовлетворительного описания несферической составляющей можно достичь при применении упрощенного моделирования до  $M = 0.4$ . При этом время счета сокращается в 5 раз по сравнению со временем получения эталонного решения.

#### 4. Заключение

Проведено численное исследование повышения экономичности расчетов сильного сжатия слабонесферического пузырька за счет совместного применения двух моделей, движение жидкости и пара в которых расщепляется на сферическую составляющую и ее малое несферическое возмущение. Модели различаются лишь описанием сферической составляющей, тогда как изменение ее малое несферическое возмущение описывается в них одним и тем же обыкновенным диффе-

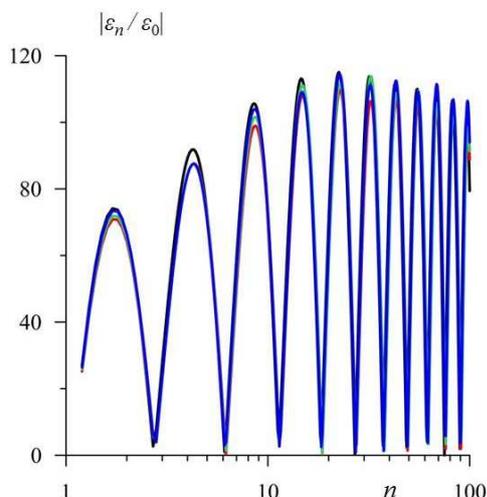


Рис. 4. Относительная амплитуда малых искажений сферичности пузыря в конце его сжатия в зависимости от номера гармоники  $n$  по результатам расчетов с упрощенным моделированием сферической составляющей динамики жидкости и газа до  $M = 0.2$  (красная линия),  $0.3$  (зеленая линия) и  $0.4$  (синяя линия) и в эталонном решении ( $M=0$ ) без упрощенного моделирования (черная линия)

ренциальным уравнением второго порядка. В первой модели сферическая составляющая описывается системой ОДУ и двумя уравнениями теплопроводности в частных производных. Во второй модели применяется система уравнений газовой динамики, выражающая законы сохранения массы импульса и полной энергии. Численное решение системы уравнений первой модели требует многократно меньших затрат компьютерного времени по сравнению с затратами на интегрирование уравнений газовой динамики. Однако уравнения первой модели в финале сильного сжатия становятся неадекватными, поэтому они применяются лишь в начале сжатия, тогда как в конце используются уравнения газовой динамики.

Изучена зависимость погрешностей численного решения от момента перехода первой упрощенной модели ко второй с целью выявления возможностей повышения экономичности расчетов. Показано, что при исследовании радиального схождения ударных волн упрощенное моделирование можно с удовлетворительной погрешностью применять до тех пор, пока значение числа Маха движения газа на поверхности пузыря меньше  $0.2$ . В результате применения упрощенного моделирования затраты компьютерного времени по сравнению с расчетами без его использования сокращаются примерно в 3 раза. Установлена, что малая

несферичность пузыря оказывается к применению упрощенной модели менее чувствительной, так что для оценки роста амплитуды малых искажений сферичности пузыря ее можно применять еще дальше: до тех пор, пока указанное число Маха меньше  $0.4$ . При этом затраты компьютерного времени сокращаются в 5 раз.

Следует отметить, что еще большего эффекта от применения упрощенного моделирования можно ожидать при рассмотрении динамики группы взаимодействующих пузырьков. Этот вопрос предполагается изучить в дальнейшем в рамках отдельного исследования.

## Список литературы

- [1] Lauterborn W., Kurz T. Physics of bubble oscillations // Rep. Prog. Phys. 2010. V. 73. 106501. (DOI: 10.1088/0034-4885/73/10/106501)
- [2] Ohl S.-W., Klaseboer E., Khoo B.C. Bubbles with shock waves and ultrasound: a review // Interface Focus. 2015. V. 5, № 5. 20150019. (DOI: 10.1098/rsfs.2015.0019)
- [3] Gaitan D.F., Crum L.A. Observation of sonoluminescence from a single, stable cavitation bubble in a water/glycerine mixture // 12th Intern. Symp. On Nonl. Acoustics. New York: Elsevier. 1990. P. 459–463.
- [4] Storey B.D., Szeri A.J. Water vapour, sonoluminescence and sonochemistry // Proc. R. Soc. Lond. A. 2000. V. 456. P. 1685–1709. (DOI: 10.1098/rspa.2000.0582)
- [5] Аганин А.А., Ильгамов М.А., Топорков Д.Ю. Зависимость сжатия пара в кавитационных пузырьках в воде и ацетоне от давления жидкости // Вестник Башкирского университета. 2015. Т. 20, № 3. С. 807–812. ([http://bulletin-bsu.com/arch/files/2015/3/05\\_4892\\_Aganin\\_2v\\_807-812.pdf](http://bulletin-bsu.com/arch/files/2015/3/05_4892_Aganin_2v_807-812.pdf))
- [6] Аганин А.А., Халитова Т.Ф. Сильное сжатие среды в сфероидальном кавитационном пузырьке // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2015. Т. 157, № 1. С. 91–100. (<http://mi.mathnet.ru/uzku1296>)
- [7] Топорков Д.Ю. Коллапс слабонесферического кавитационного пузырька в ацетоне и тетрадекане // Многофазные системы. 2018. Т. 13, № 3. С. 23–28. (DOI: 10.21662/mfs2018.3.003)
- [8] Brenner M.P. Single-bubble sonoluminescence // Rev. Mod. Phys. 2002. V. 74. P. 425–484. (DOI: 10.1103/RevModPhys.74.425)
- [9] Нигматулин Р.И., Аганин А.А., Ильгамов М.А., Топорков Д.Ю. Эволюция возмущений сферичности парового пузырька при его сверхсжатии // ПМТФ 2014. Т. 55, № 3. С. 82–102. (DOI: 10.1134/S0021894414030080)
- [10] Nigmatulin R.I., Akhatov I.Sh., Topolnikov A.S. et al. The theory of supercompression of vapor bubbles and nano-scale thermonuclear fusion // Phys. Fluids. 2005. V. 17, № 10. P. 1–31. (DOI: 10.1063/1.2104556)
- [11] Аганин А. А., Халитова Т. Ф., Хисматуллина Н. А. Численное моделирование радиально сходящихся ударных волн в полости пузырька // Матем. моделирование. 2014. Т. 26, № 4. С. 3–20. (DOI: 10.1134/S2070048214060027)
- [12] Plesset M.S. The dynamics of cavitation bubbles // J. Appl. Mech. 1949. P. 277–282.

- [13] Akhatov I., Lindau O. et. al. Collapse and rebound of a laser-induced cavitation bubble // *Phys. Fluids*. 2001. Т. 13, № 10. С. 2805–2819.  
(DOI: [10.1063/1.1401810](https://doi.org/10.1063/1.1401810))
- [14] Аганин А.А., Ильгамов М.А. и др. Динамика пузырька газа в центре сферического объема жидкости // Математическое моделирование. 2001. Т. 13, № 1. С. 26–40.  
(<http://mi.mathnet.ru/mm664>)
- [15] Нигматулин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния органических жидкостей на примере ацетона // *ДАН*. 2007. Т. 415, № 5. С. 617–621.  
(<https://elibrary.ru/item.asp?id=9533722>)
- [16] Аганин А.А., Халитова Т.Ф., Хисматуллина Н.А. Расчет сильного сжатия сферического парового пузырька в жидкости // *Вычислительные технологии*. 2008. Т. 13, № 6. С. 17–27.  
(<http://www.ict.nsc.ru/jct/content/t13n6/aganin.pdf>)
- [17] Аганин А.А., Халитова Т.Ф. Зависимость образования ударной волны в кавитационном пузырьке от температуры жидкости // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН*. 2017. Т. 12, № 1. С. 89–94.  
(DOI: [10.21662/uim2017.1.013](https://doi.org/10.21662/uim2017.1.013))



## Numerical simulation of single vapor bubble dynamics in a liquid in an intense acoustic field

Davletshin A.I., Khalitova T.F.

Institute of Mechanics and Engineering, Kazan Scientific Center of the RAS, Kazan

The possibility of increasing the calculation efficiency by the joint use of two models of the dynamics of a single weakly-nonspherical vapor bubble under its strong collapse in liquid is studied. In both models the motion of liquid and vapor is split into a spherical component and its small nonspherical perturbation. The models differ in the description of the spherical component. In the first (simplified) model, it is described by a system of ODE together with partial differential equations in temperature, derived under the assumption of weak compressibility of liquid and bubble homobaricity. In the second model, one-dimensional gas dynamics equations are applied. The advantage of the simplified model consists in determining a numerical solution with much-less computer time costs in comparison with what is required for the numerical integration of gas dynamics equations. The assumptions used in the simplified model in the final stage of collapse become incorrect, and, as a result, the numerical solution errors increase. Therefore, the simplified model is applied at the beginning of bubble collapse, whereas the gas dynamics equations are used at its end. Within this approach, the numerical solution in the final stage of collapse is dependent on the moment of transition to the gas dynamics equations. It is shown that satisfactory description of evolution of bubble sphericity distortion is achieved when the transition is made under the condition that the Mach number  $M$  of vapor in the vicinity of the bubble surface is less than 0.4. Satisfactory resolution of the shock wave in the bubble is attained when the transition is performed at  $M < 0.2$ .

**Keywords:** vapor bubble collapse, shock waves, small nonsphericity of bubble

# Содержание

<b>Болотнова Р.Х.</b> Исследование динамики формирования полой струи при истечении пара из сверхкритического состояния .....	73–78
<b>Насибуллаева Э.Ш.</b> Исследование акустического рассеяния от одиночной звукопроницаемой сферы .....	79–91
<b>Чиглинцева А.С., Шагапов В.Ш.</b> К теории нагнетания гидратообразующего газа в снежный массив, насыщенный тем же газом .....	92–98
<b>Утяшев И.М., Ахтямов А.М.</b> Определение локальной неоднородности среды по собственным частотам колебаний струны .....	99–106
<b>Денисова Е.В., Черникова М.А.</b> Модель сервопоршня агрегата дозирования топлива с использованием матричного подхода и нейронной сети .....	107–111
<b>Шагапов В.Ш., Запихаина М.Н.</b> Плавление льда в пористой среде, насыщенной льдом и газом, при нагнетании теплой воды .....	112–117
<b>Рахимов А.А., Ахметов А.Т., Валиев А.А., Асадуллин Р.Р.</b> Исследование эффекта динамического запираания эмульсий, содержащих твердые включения .....	118–126
<b>Давлетшин А.И., Халитова Т.Ф.</b> Численное моделирование динамики одиночного парового пузырька в жидкости в интенсивном акустическом поле .....	127–135