



## Изучение течения жидкости через деформируемый пьезоэлементом канал<sup>1</sup>

Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Даринцев О.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В работе изучается течение жидкости через трубку, деформируемую пьезоэлементом по гармоническому закону. Сравниваются линейные деформации для граничных условий Дирихле и Неймана на поверхности контакта трубки и пьезоэлемента. Исследуется течение жидкости через деформированный канал для двух режимов течения: в трубке с одним закрытым концом за счет деформации трубки; для трубки с двумя открытыми концами за счет деформации трубки и приложенного к каналу перепада давления. Рассчитывается расход жидкости в зависимости от частоты деформаций, перепада давления и физических параметров жидкости.

**Ключевые слова:** гидродинамика, гидросопротивление, пьезоэлемент, линейная упругость, метод конечных элементов

### 1. Введение

В последнее время интенсивно развивается новое направление в гидродинамике — микрогидродинамика, описывающая поведение сверхмалых объёмов и потоков жидкостей в каналах, размеры которых не превышают сотни микрон. В качестве областей применения чаще всего рассматриваются молекулярная биология, *in vitro* системы диагностики, лаборатории-на-чипе (англ. *lab-on-the-chip*), устройства регулирования микропотоков, капельные системы. Применяемые при расчетах методики получены эмпирическим путем и достаточно грубы — в таких системах, в первую очередь, принято учитывать возросшее влияние свойств поверхности канала, требования к которым зависят от способа и области применения микрофлюидной техники. Кроме того, в данных методиках гипотетически предполагаются малая шероховатость и однородность микроканала на всем

протяжении, что гарантирует ламинарный характер течения жидкости, а, например, для интенсивного перемешивания растворов необходимо обеспечить турбулентное течение, т.е. внутренняя поверхность должна быть более «грубой».

В известных системах [1, 2] в основном рассматривается формирование потоков или капель в микроканалах с использованием шприцевых дозаторов с электроприводом, диффузных систем и других механизмов, имеющих нелинейную выходную характеристику, поэтому актуальным видится разработка теоретического обоснования возможности создания приводов, использующих прямые преобразователи рода энергии, например, пьезоприводы. Пьезопривод имеет линейную механическую характеристику, что позволяет получить необходимый вид микроперемещения (линейное или вращательное) без дополнительных устройств. Диапазон этих перемещений, от десятка мкм до долей нм, сравним с требуемыми объемами перемещаемой жидкости за цикл (пкл). Усилий, развиваемых пьезоприводом, достаточно для деформации толстостенных каналов, выполненных из упругих материалов.

Компьютерное моделирование течения жидкости в микроканалах, индуцированное внешним

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президиума РАН № 29 «Актуальные проблемы робототехнических систем».

воздействием (например, перепадом давления, поступательным движением границы или деформацией канала), в последнее время активно развивается. Например, авторами настоящей работы ранее были разработаны компьютерные модели, которые могут быть использованы в качестве элемента вычислительного стенда для одного элемента технического устройства (поршень и гидродинамическое сопротивление). Модель поршня для осциллирующего перепада давления была построена в работе [3] методами факторного вычислительного эксперимента второго порядка с учетом пяти параметров (амплитуда и частота перепада давления, трение поршня, жесткость пружины, отношение силы трения покоя и трения скольжения). В работе [4] построена модель стационарного течения жидкости через цилиндрическое гидросопротивление с учетом перепада давления и радиуса проходного отверстия гидросопротивления, но без учета зависимости жидкости от температуры. В [5] представлено расширение данной модели для описания работы элемента во всей рабочей области температур. В работе [6] изучалось течение жидкости через систему трех элементов. Во всех этих исследованиях геометрия канала была фиксированной.

В статье [7] изучалось течение жидкости в плоском канале с гидросопротивлением для двух случаев динамического изменения геометрии канала: поперечное сжатие проходного отверстия гидросопротивления (течение вызывается приложенным к слою перепадом давления) и продольное движение гидросопротивления вдоль канала (течение вызывается этим движением). Получено, что динамическое изменение геометрии канала позволяет регулировать расход жидкости.

В настоящей работе исследуется трехмерная компьютерная модель различных режимов течения жидкости через канал, деформируемый пьезоэлементом. Рассматривается влияние двух видов деформаций трубки на форму ее внутренней поверхности, определяющей, в свою очередь, геометрию канала, по которому течет жидкость. А, именно, деформаций, описываемых граничными условиями Дирихле и Неймана на поверхности контакта трубки и пьезоэлемента. Изучаются два режима течения жидкости в микроканале:

- один конец канала закрыт и течение происходит за счет деформации трубки. Данный режим позволяет провести тестирование компьютерной модели;
- оба конца канала открыты и течение происходит как за счет деформации трубки, так и за счет приложенного к слою перепада давления.

Целью работы является разработка трехмерной компьютерной модели течения жидкости в канале с гидросопротивлением, где форма гидросопротивления изменяется по периодическому закону и определяется деформациями трубки пьезоэлементом.

Данная компьютерная модель, описывающая поведение жидкости в микроканалах при использовании пьезоэлектрических приводов, является первым шагом в разработке теоретического базиса для создания микроприводов и исполнительных микромеханизмов. Микроустройства, базирующиеся на микрофлюидике, и обладающие хорошими расчетными характеристиками, будут востребованы при проектировании новых перспективных конструкций микророботов и исполнительных микроустройств.

## 2. Основные уравнения

Рассматривается трехмерное течение жидкости через трубку с внутренним  $R_1$  и внешним  $R_2$  радиусами и длиной  $L$ , центральная часть которой расположена внутри пьезоэлемента длины  $\ell$ . На рис. 1 представлена геометрия задачи и введены следующие обозначения:  $\Gamma_1$  — внешняя поверхность трубки;  $\Gamma_2$  — внутренняя поверхность трубки;  $\Gamma_3$  — входное отверстие;  $\Gamma_4$  — выходное отверстие. В декартовой системе координат ось  $Ox$  является центральной осью трубки, а начало отсчета расположено в геометрическом центре трубки.

Упругие деформации твердого тела описываются уравнением движения (второй закон Ньютона), связывающим динамическое изменение вектора перемещений  $\mathbf{d}$  и действия внутренних, описываемых тензором напряжений  $\bar{\sigma}$ , и объемных сил  $\mathbf{f}_v$  [8]:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{d}}{\partial t^2} = \nabla \bar{\sigma} + \mathbf{f}_v,$$

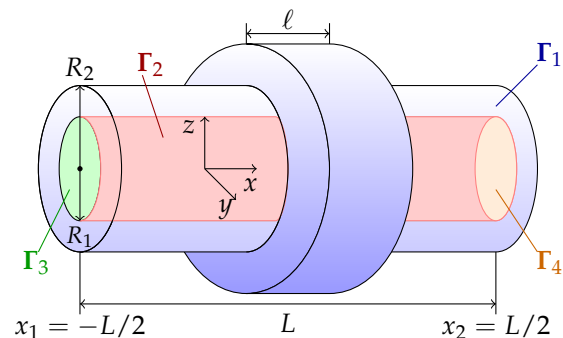


Рис. 1. Геометрия и основные обозначения модели сжатия трубки пьезоэлементом

где  $\rho$  — плотность жидкости;  $t$  — время;  $\nabla$  — оператор набла.

Предполагаем, что после приложения силы прошло достаточно времени для установления поля деформации. Тогда статическое условие равновесия в отсутствии объемных сил ( $\mathbf{f}_v = 0$ ) имеет вид:

$$\nabla \bar{\sigma} = 0. \quad (1)$$

В изотропном теле тензор напряжений  $\bar{\sigma}$  зависит от тензора деформаций  $\bar{\varepsilon}$  и вектора перемещений  $\mathbf{d} = (d_x, d_y, d_z)$  следующим образом:

$$\bar{\sigma} = 2\mu \bar{\varepsilon} + \lambda(\nabla \mathbf{d}) \bar{I}, \quad (2)$$

где  $\bar{I}$  — единичный тензор; а коэффициенты Ламе

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

зависят от модуля Юнга  $E$  и коэффициента Пуассона  $\nu$ .

Подставляя (2) в уравнение (1) и исключая тензор деформаций  $\bar{\varepsilon}$  согласно определению

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{d} + (\nabla \mathbf{d})^T),$$

получим уравнение равновесия, содержащее только вектор перемещений:

$$\nabla \left[ \mu (\nabla \mathbf{d} + (\nabla \mathbf{d})^T) + \lambda (\nabla \mathbf{d}) \bar{I} \right] = 0. \quad (3)$$

Деформации  $\mathbf{d}$  определялись решением уравнения (3) численно в вариационной формулировке (в пакете численного моделирования FreeFem++ [9]) методом конечных элементов:

$$\int_{\Omega} \frac{\mu}{2} (\nabla \mathbf{d} + \nabla \mathbf{d}^T) \cdot (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + \lambda (\nabla \mathbf{d}) (\nabla \mathbf{v}) d\Omega = 0, \quad (4)$$

где  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  — пробные функции; интегрирование производится по всему объему  $\Omega$  трубки.

Рассмотрим два вида граничных условий: граничное условие Неймана (ГУН), когда «мягкий» пьезоэлемент давит на трубку с давлением  $P_p$  и граничное условие Дирихле (ГУД), когда «жесткий» пьезоэлемент сдавливает трубку со смещением  $\Delta d$ . В случае ГУН в левой части уравнения (4) добавляется поверхностный интеграл

$$\int_S (-P_p) (\mathbf{N} \cdot \mathbf{v}) f_p(t) dS, \quad (5)$$

где  $\mathbf{N}$  — единичный вектор нормали в точке на поверхности контакта трубки и пьезоэлемента  $S$ ;

скалярное произведение можно записать в виде  $(\mathbf{N} \cdot \mathbf{v}) = (y \cdot v_y + z \cdot v_z) / R_2$ ,  $(y, z) \in S$ ;  $f_p(t)$  — нормированная форма сигнала на пьезоэлементе ( $0 \leq f_p(t) \leq 1$ ). В расчетах функция  $f_p(t)$  выбрана в виде:

$$f_p(t) = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi t}{T} \right), \quad (6)$$

где  $T$  — период колебаний.

ГУД определяет смещение на  $\mathbf{d}$ ,  $|\mathbf{d}| = f_p(t) \Delta d$  области контакта  $S$  с компонентами смещения:

$$d_y = f_p(t) \Delta d \cdot y / R_2, \quad d_z = f_p(t) \Delta d \cdot z / R_2, \quad (7)$$

для  $(y, z) \in S$ .

Дополнительное условие: концы трубки зафиксированы ( $\mathbf{d} = 0$ ).

Течение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса и неразрывности, которые имеют следующий вид [10]:

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \nabla \bar{\sigma}^f = 0, \\ \nabla \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  — вектор скорости жидкости;  $\bar{\sigma}^f$  — тензор напряжений, имеющий вид

$$\bar{\sigma}_{ij}^f = -p \delta_{ij} + \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right), \quad (9)$$

где  $p$  — давление;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $\eta$  — динамическая вязкость жидкости;  $i$  и  $j$  могут принимать значения  $x, y, z$ . Подставляя (9) в (8) получим уравнение Навье–Стокса в переменных скорость–давление:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) + \nabla p - \eta \Delta \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \mathbf{u} = 0, \quad (10)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа.

Для численного моделирования уравнения (10) записывались в вариационной форме и решались методом конечных элементов.

Уравнение неразрывности в вариационной форме (с пробной функцией  $q$ ) запишем со стабилизационным слагаемым, имеющим смысл малой искусственной сжимаемости ( $\nabla \mathbf{u} + \varepsilon_p p = 0$ ,  $\varepsilon_p \sim 10^{-10}$ ):

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^{n+1} q d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_p p q d\Omega = 0. \quad (11)$$

Для численного решения уравнения Навье–Стокса проведем дискретизацию по времени по

схеме Эйлера. Поделив первое уравнение на  $\rho$ , получим

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} + (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu_l \Delta \mathbf{u}^{n+1} = 0,$$

где  $\nu_l = \eta/\rho$  — кинематическая вязкость жидкости;  $n+1$  и  $n$  обозначают текущий и предыдущий момент времени соответственно, а  $\tau = t^{n+1} - t^n$  — шаг по времени. Линеаризуем уравнение заменой нелинейного слагаемого по схеме Пикарда

$$(\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} \approx (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1}$$

и перепишем в вариационной форме (с пробными функциями  $\mathbf{w}$ ):

$$\int_{\Omega} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} \mathbf{w} \, d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} p \nabla \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Omega} \nu_l \nabla \mathbf{u}^{n+1} \nabla \mathbf{w} \, d\Omega = 0. \quad (12)$$

Рассмотрим граничные условия. На стенке канала  $\Gamma_2$  выполняется условие залипания — скорость жидкости равна скорости границы. За шаг по времени  $\tau$  стенка смещается на величину  $\mathbf{d}$  со скоростью  $\mathbf{d}/\tau$ . На входе  $\Gamma_3$  и выходе  $\Gamma_4$  добавим условие параллельности течения. Общие граничные условия примут вид:

$$\begin{cases} \Gamma_2: & \mathbf{u} = \mathbf{d}/\tau, \\ \Gamma_3, \Gamma_4: & u_y = 0, u_z = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Для различных режимов течения добавим задающие эти режимы условия. Первый режим (PI) — течение за счет деформации канала пьезоэлементом с закрытым входом  $\Gamma_3$ . Данный режим позволяет сравнить изменение объема канала с объемом прошедшей через выход  $\Gamma_4$  жидкости, что дает возможность проверить качество построенной компьютерной модели. Второй режим (PII) — оба конца открыты и к слою приложен перепад давления  $\Delta p = p_1 - p_2$ , где  $p_1$  и  $p_2$  — давления на границах  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$  соответственно. Режим PII позволяет регулировать течение жидкости путем изменения частоты сжатия пьезоэлемента и величины перепада давления. Запишем граничные условия для этих режимов:

$$\text{PI: } \mathbf{u} = 0 \text{ на } \Gamma_3; \quad (14)$$

$$\text{PII: } p(\Gamma_3) - p(\Gamma_4) = \Delta p. \quad (15)$$

Начальные условия для режима PI — жидкость покоится ( $\mathbf{u} = 0$ ) и вдоль канала давление постоянно ( $p = 0$ ); для режима PII компонента скорости

вдоль канала соответствует Пуазейлевскому течению:

$$u_x = \frac{\Delta p}{4\eta L} (R_1^2 - y^2 - z^2), \quad u_y = 0, \quad u_z = 0,$$

и распределение давления линейно:

$$p = \frac{\Delta p}{L} (x_2 - x),$$

где  $x_2 = L/2$  — координата правой границы  $\Gamma_4$ .

На каждом шаге итерации Пикарда решается система уравнений (11), (12) с граничными условиями (13) и соответствующему выбранному режиму течения условию из (14)–(15), пока норма поправки решений  $\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|$  не станет меньше  $\epsilon_u$  с обновлением решений  $\mathbf{u}^{n+1} \rightarrow \mathbf{u}^n$ ,  $p^{n+1} \rightarrow p^n$ .

### 3. Результаты

В расчетах деформаций использовалось два диапазона значений параметров для граничных условий: в случае ГУД — смещение  $\Delta d = 0 \div 7.5$  мкм и в случае ГУН — давление  $P_p = 0 \div 0.8$  МПа. Колебание пьезоэлемента гармонические с частотой  $f = 1/T = 0.75 \div 1.25$  кГц (форма сигнала рассчитывалась по формуле (6)). Геометрические параметры системы: длина пьезоэлемента вдоль оси  $Ox$  —  $\ell = 50$  мкм; внешний радиус трубки  $R_2 = 100$  мкм; внутренний радиус трубки  $R_1 = 50$  мкм; длина трубки  $L = 500$  мкм. В качестве материала трубки использовалась силиконовая резина с модулем Юнга  $E = 5 \cdot 10^6$  Па и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.49$ .

Размерность сетки составляла 180 узлов вдоль трубки и 120 узлов по окружности трубки (всего 63578 узлов, 244153 объемных элементов, 92940 граничных элементов, погрешность объема не более 0.1%).

Рассматриваемые уравнения на упругие деформации являются линейными и отклик системы должен быть пропорционален внешнему воздействию. Сравнивая результаты расчетов, получим обобщенную формулу перехода от ГУД к ГУН для рассматриваемой геометрии и материала: ГУД с заданным значением  $\Delta d$  приводит к тому же внутреннему радиусу проходного отверстия  $R_1^*$  гидросопротивления, что и ГУН с давлением, определяемым по формуле

$$P_p = \alpha \Delta d,$$

где  $\alpha$  — размерный коэффициент подобия (для  $R_1 = 50$  мкм и  $R_2 = 100$  мкм  $\alpha = 1.067 \cdot 10^{11}$  Па/м). Отметим, что коэффициент  $\alpha$  зависит нелинейно как от  $R_1$ , так и от  $R_2$ . При фиксированном значении  $R_1$  с ростом  $R_2$  значение коэффициента увеличивается (например, при  $R_1 = 50$  мкм, для

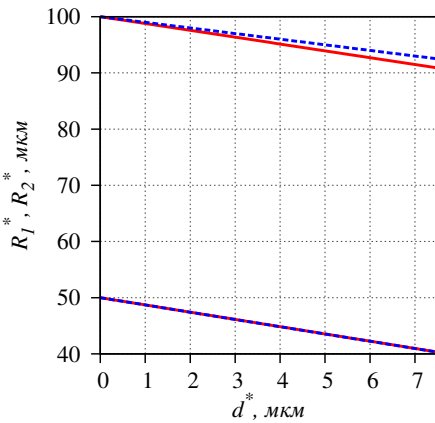


Рис. 2. Зависимость внешнего  $R_2^*$  и внутреннего  $R_1^*$  радиусов в центральном поперечном сечении трубки ( $x = 0$ ) от эквивалентной деформации  $d^*$  для ГУН (сплошная красная линия) и ГУД (пунктирная синяя линия)

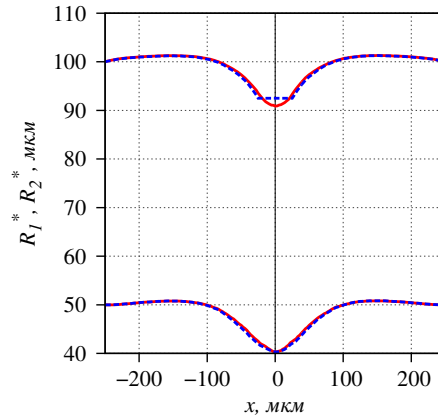


Рис. 3. Профили внешней и внутренней поверхности трубки вдоль оси  $Ox$  для ГУН с  $P_p = 0.8$  МПа (красная сплошная линия) и ГУД с  $\Delta d = 7.5$  мкм (синяя штриховая линия)

$R_2 = 75$  мкм  $\alpha = 5.87 \cdot 10^{10}$  Па/м; для  $R_2 = 125$  мкм  $\alpha = 1.39 \cdot 10^{11}$  Па/м), а при фиксированном значении  $R_2$  с ростом  $R_1$  — уменьшается (например, при  $R_2 = 125$  мкм, для  $R_1 = 75$  мкм  $\alpha = 6.9 \cdot 10^{10}$  Па/м).

Для сравнения результатов расчетов с разными граничными условиями введем эквивалентную деформацию  $d^*$ : для ГУД  $d^* = \Delta d$ , а для ГУН  $d^* = P_p / \alpha$ . На рис. 2 показана зависимость внешнего и внутреннего радиусов в центральном поперечном сечении трубки от эквивалентной деформации  $d^*$  для двух граничных условий. Как и предполагалось, зависимость является линейной.

В работе [4] было показано, что расход жидкости при течении через гидросопротивление зависит как от радиуса проходного отверстия, так и от формы самого гидросопротивления. Проверим как граничные условия на внешней поверхности повлияют на форму внутреннего канала. На рис. 3 показаны профили внешней и внутренней поверхностей трубки вдоль оси  $Ox$  для ГУН с  $P_p = 0.8$  МПа и ГУД с  $\Delta d = 7.5$  мкм. Параметры подобраны таким образом, чтобы внутренние радиусы проходного отверстия при ГУН и ГУД совпадали (см. рис. 2). Видно, что несмотря на сильные различия профилей на внешней поверхности, на внутренней поверхности профили практически совпадают (максимальная относительная погрешность равна 0.9%), следовательно, и течение жидкости будет одинаковым. Таким образом, подбором параметров на внешней границе моделирование с помощью ГУД можно заменить на моделирование с помощью ГУН так, чтобы деформации внутренней границы совпали в обоих случаях. Данная замена

может потребоваться при моделировании системы пьезоэлементов, когда согласование ГУД на соседних пьезоэлементах является сложным, в то время, как для ГУН проблем в согласовании не возникает.

Далее геометрия канала строилась на основе расчетов деформации трубки пьезоэлементом с ГУН при  $P_p = 0.8$  МПа. Поскольку внутренняя поверхность трубки является стенкой канала, по которому течет жидкость, то сначала строилась трубка радиусом  $R_1$ , затем она деформировалась по полю деформации  $d$  на поверхности  $\Gamma_2$ . Такой способ позволяет независимо моделировать упругую и гидродинамическую задачи, сохраняя при этом согласованность двух расчетных сеток. Размерность сетки составляла 80 узлов вдоль канала и 30 узлов по окружности канала (всего 3204 узлов, 11216 объемных элементов, 5100 граничных элементов, погрешность объема не более 0.6%). Изучалось течение для трех технических жидкостей при температуре  $20^\circ\text{C}$ , физические параметры которых представлены в табл. 1.

Таблица 1. Физические свойства технических жидкостей при  $20^\circ\text{C}$

Жидкость	Динамическая вязкость $\eta, 10^{-3}$ Па·с	объемная плотность $\rho, \text{кг/м}^3$
вода	1	998.2
толуол	0.586	867
уайт-спирит	0.529	790



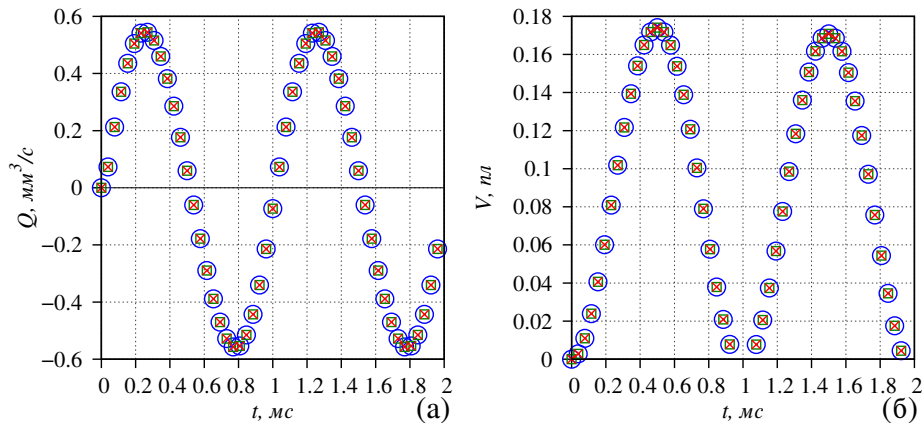


Рис. 4. Расход (а) и суммарный объем (б) жидкости, протекающей через правую границу  $\Gamma_4$ , для режима течения PI и различных технических жидкостей: вода (○), толуол (□), уайт-спирит (×).

На рис. 4 показаны расход и суммарный объем жидкости, протекающей через правую границу  $\Gamma_4$ , для режима течения PI. Течение полностью обусловлено деформацией стенки канала (объем жидкости, проходящий через границу  $\Gamma_4$ , равен изменению объема канала за счет деформации) и поэтому не зависит от типа используемой жидкости (расход течения для всех трех жидкостей совпадает). Данный режим позволяет провести тестовые расчеты для проверки корректности численной схемы — изменения объема канала и объема, прошедшей через границу  $\Gamma_4$  жидкости, должны совпадать в пределах погрешности расчета. Максимальная погрешность составила 0.17% на каждой половине периода, а на полном периоде погрешность уменьшилась до значения 0.002%. Это объясняется тем, что при периодическом течении ошибки округления компенсируются за каждый период. Течение

за второй период полностью повторяет течение за первый период, следовательно, в выбранной численной схеме (итерации Пикарда) шаг по времени  $\tau$  достаточен для установления периодического течения (характерное время релаксации скорости  $\tau_u = \rho R_1^2 / \eta \approx 2.5 \cdot 10^{-3}$  с; в расчетах для частоты пьезоэлемента  $f = 1$  кГц выбран шаг по времени  $\tau = 4 \cdot 10^{-5}$  с). Течение остается ламинарным с числом Рейнольдса  $Re < 150$ , максимальный модуль скорости жидкости  $\max(|\mathbf{u}|) \approx 0.18$  м/с.

Рассмотрим второй режим течения PII, когда оба конца открыты и к слою приложен перепад давления  $\Delta p$ . При отсутствии перепада давления ( $\Delta p = 0$ ) при сжатии пьезоэлемента жидкость течет в обоих направлениях симметрично относительно центра канала (рис. 5). Расход жидкости в два раза ниже, чем при режиме PI, поскольку при деформации канала выдавливается тот же объем жидкости,

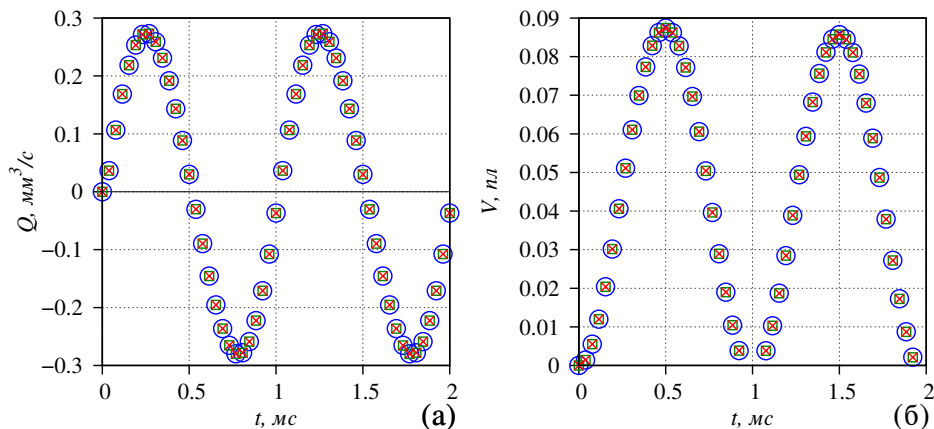


Рис. 5. Расход (а) и суммарный объем (б) жидкости, протекающей через правую границу  $\Gamma_4$ , для режима течения PII при  $\Delta p = 0$  Па для различных видов технических жидкостей: вода (○), толуол (□), уайт-спирит (×)

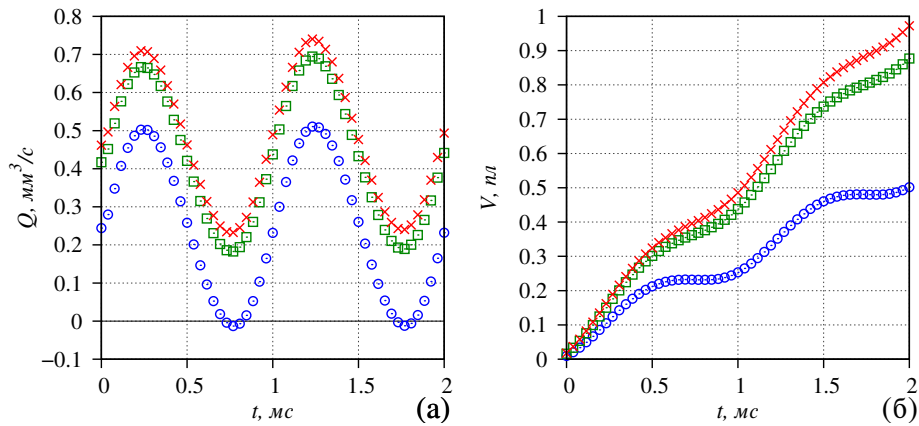


Рис. 6. Расход (а) и суммарный объем (б) жидкости, протекающей через правую границу  $\Gamma_4$ , для режима течения PII при  $\Delta p = 50$  Па для различных видов технических жидкостей: вода ( $\circ$ ), толуол ( $\square$ ), уайт-спирит ( $\times$ )

но с двух сторон, а не с одной. Так как течение полностью обусловлено изменением объема канала, зависимость от физических параметров жидкости в данном случае также отсутствует.

Под действием перепада давления  $\Delta p \neq 0$  расход жидкости обратно пропорционально зависит от ее вязкости (на рис. 6 для примера представлен случай  $\Delta p = 50$  Па), постольку течение индуцируется перепадом давления, и скорость течения будет выше для жидкости с меньшей вязкостью.

Определим способ контроля расхода жидкости. Зависимость общего объема жидкости  $V$ , прошедшей через границу  $\Gamma_4$ , от времени определяется вязкостью жидкости  $\eta$ , перепадом давления  $\Delta p$  и частотой пьезоэлемента  $f$ . Если жидкость с вязко-

стью  $\eta_1$  имеет расход  $Q_1$  при перепаде давления  $\Delta p_1$ , то жидкость с вязкостью  $\eta_2$  при перепаде давления  $\Delta p_2$  и той же частоте будет иметь расход  $Q_2$ :

$$Q_2 = \frac{\eta_1 \Delta p_2}{\eta_2 \Delta p_1} Q_1,$$

как при течении в трубе, так и при течении через гидродинамическое сопротивление (см. [7]).

С ростом частоты пьезоэлемента скорость жидкости в области деформации канала растет, следовательно, растет и давление  $p_c$  в области центрального поперечного сечения канала. Направление течения жидкости на входе и выходе канала зависит от знака разностей давлений  $p_1 - p_c$  и  $p_c - p_2$  соответственно.

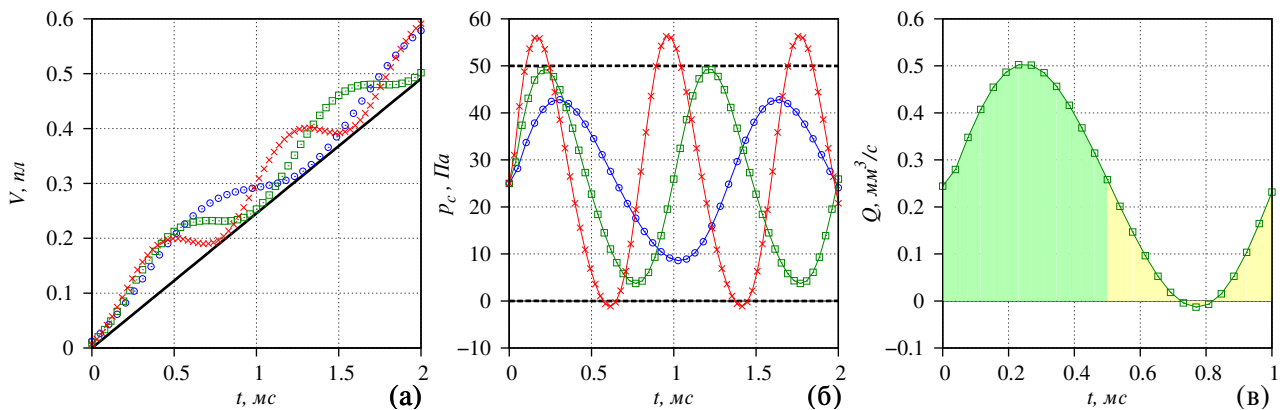


Рис. 7. Суммарный объем воды, протекающий через правую границу  $\Gamma_4$  (а), давление в центре канала (б) и расход жидкости (в) при режиме течения PII для  $\Delta p = 50$  Па и различных значений частоты  $f$ : 0.75 кГц ( $\circ$ ); 1 кГц ( $\square$ ); 1.25 ( $\times$ ). На левом графике черная линия обозначает данные для пуазейлевского течения в трубе. На среднем графике верхняя пунктирная линия обозначает давление  $p_1 = 50$  Па на входе, а нижняя — давление  $p_2 = 0$  Па на выходе канала

На рис. 7(а) показан суммарный объем жидкости  $V$ , протекающей через правую границу  $\Gamma_4$ , от времени для трех различных значений частоты  $f$ . Видно, что для частоты  $f = 1$  кГц при сжатии пьезоэлемента объем вытекшей жидкости растет, поскольку разность давлений в центре и на правой границе канала  $p_c - p_2 > 0$  (см. рис. 7(б)), а при сокращении — расход малый ( $p_c - p_2 \sim 0$ ) и на графике образуется «плато» — суммарный объем жидкости остается практически постоянным ( $V \equiv \text{const}$ ) в течении некоторого промежутка времени. Более наглядно это показано на рис. 7(в). Объем жидкости соответствует площади под кривой расхода жидкости. Во время сжатия пьезоэлемента (первая половина периода, зеленая заливка) протекает больше жидкости, чем при расширении (вторая половина периода, желтая заливка). Отношение площадей соответствует соотношению объемов протекающей жидкости (в рассматриваемом случае отношение примерно равно 5.2), что и приводит к появлению «плато». Если частота уменьшается (например, на рис. 7 приведены данные для величины  $f = 0.75$  кГц), то значение  $p_c > p_2$  весь период, т.е. расход жидкости всегда положителен и «плато» отсутствует. С ростом частоты ( $f = 1.25$  кГц на рис. 7) при сжатии пьезоэлемента объем растет, т.к.  $p_c - p_2 > 0$ , а при сокращении расход отрицательный ( $p_c - p_2 < 0$ ), в этом случае направление течения жидкости меняется, а суммарный расход жидкости падает.

При моделировании дозатора жидкости одной из актуальных является задача определения частоты для заданного перепада давления, при которой во время сжатия пьезоэлемента расход жидкости будет практически отсутствовать («плато» на графике при  $f = 1$  кГц, рис. 7). Сам же перепад давления должен выбираться таким образом, чтобы за заданный интервал времени через правую границу протекал объем жидкости, необходимый для образования капли. Например, для  $\Delta p = 50$  Па,  $f = 1$  кГц за период колебаний выдавливается капля объемом 0.25 пл (характерные размеры капель создаваемые в микрофлюидных устройствах составляют от 0.05 пл до 1 нл [11]). Объем формируемой капли находится в обратной зависимости от частоты колебаний пьезоэлемента.

Для сравнения на рис. 7(а) приведен объем жидкости от времени для пуазейлевского течения в трубе (черная линия). Видно, что объемы в среднем за весь период течения в трубе и осциллирующем гидросопротивлении практически совпадают. Во время сжатия пьезоэлемента объем выше, чем в трубе, за счет выдавливания дополнительного объема при деформации пьезоэлемента, а при сжатии

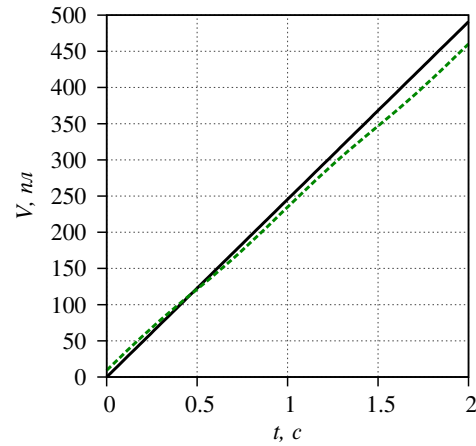


Рис. 8. Суммарный объем воды, протекающий через правую границу  $\Gamma_4$ , при режиме течения ПИ для  $\Delta p = 50$  Па и  $f = 1$  Гц (зеленая пунктирная линия) для пуазейлевского течения в трубе (черная сплошная линия).

пьезоэлемента расход жидкости низкий и объем жидкости приближается к объему пуазейлевского течения.

Для объяснения того, что объем жидкости при тчении через канал с действующим пьезоэлементом выше, чем при тчении в трубе, заметим следующее: колебание пьезоэлемента добавляет энергию в систему и скорость течения при сжатии увеличивается, а при расширении заполнение объема происходит в основном за счет всасывания жидкости через левый конец трубки. На рис. 7(б) видно, что в моменты времени, когда  $p_c - p_2 \approx 0$  (течение жидкости в правой половине трубки практически отсутствует), имеет место  $p_1 - p_c > 0$  (в левой половине жидкость течет в положительном направлении). Уменьшение скорости движения жидкости в правой половине трубки происходит благодаря инерции жидкости, это и приводит к тому, что справа в канал попадает значительно меньший объем жидкости, чем слева. Асимметрия объясняется тем, что жидкость течет в положительном направлении и характерное время релаксации скорости  $\tau_u$  сравнима с обратной частотой сжатия пьезоэлемента ( $\tau_u \sim 1/f = 1/(1 \text{ кГц})$ ).

В подтверждение этого факта рассмотрим случай, когда  $1/f \gg \tau_u$ . На рис. 8 показана зависимость, аналогичная представленной на рис. 7, но при частоте  $f = 1$  Гц. Видно, что в среднем за период через трубку с пьезоэлементом протекает меньший объем жидкости, чем через обычную трубу того же радиуса.



#### 4. Заключение

В работе исследованы различные режимы течения жидкости через трубку круглого сечения, сжимаемую пьезоэлементом по периодическому закону. Деформация трубки под воздействием пьезоэлемента рассчитывалась уравнениями линейной теории упругости для граничных условий Дирихле и Неймана. Показано, что подбором давления  $P_p$  пьезоэлемента на внешнюю часть трубки можно получить такую же деформацию внутренней части трубки, как и при задании перемещения поверхности контакта внутрь на определенную величину  $\Delta d$  (зависимость является линейной), что означает взаимозаменяемость рассматриваемых граничных условий.

Было изучено два режима течения жидкости в деформированной трубке: вход трубки закрыт, течение индуцируется деформацией трубки; оба конца открыты, течение индуцируется как деформацией трубки, так и приложенным к слою перепадом давления. Первый режим позволяет провести тестирование компьютерной модели, а второй — предложить механизм дозирования жидкости управляемый двумя параметрами: частотой сжатия пьезоэлемента и величиной перепада давления.

Получены следующие результаты:

- расход жидкости зависит от частоты сжатия пьезоэлемента и, если перепад давления отсутствует, не зависит от физических параметров жидкости. Это теоретически дает возможность реализации гидравлического микропривода с линейной «механической» (расходной) характеристикой;
- под действием перепада давления к периодической составляющей расхода жидкости добавляется постоянная составляющая обратно пропорциональная вязкости жидкости;
- показано, что подбором параметров (частота, перепад давления) можно получить режим

течения, соответствующий выдавливанию капль. С ростом частоты объем выдавливаемой за период капли уменьшается.

#### Список литературы

- [1] Bruus H. Theoretical microfluidics. Lecture notes third edition. MIC Department of Micro and Nanotechnology Technical University of Denmark. 2006. URL: [http://homes.nano.aau.dk/lg/Lab-on-Chip2008\\_files/HenrikBruus\\_Microfluidics%20lectures.pdf](http://homes.nano.aau.dk/lg/Lab-on-Chip2008_files/HenrikBruus_Microfluidics%20lectures.pdf) (дата обращения: 10.04.2018).
- [2] Stroock A.D., Dertinger S.K.W., Ajdari A. et al. Chaotic Mixer for Microchannels // *Science*. 2002; Vol. 295(5555). Pp. 647–651. (DOI: [10.1126/science.1066238](https://doi.org/10.1126/science.1066238))
- [3] Насибуллаев И.Ш. Разработка компьютерной модели основного элемента агрегата дозирования топлива // *Вычислительные технологии*. 2016. Т. 21, № 2. С. 26–41. (<http://www.ict.nsc.ru/jct/annotation/1724>)
- [4] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Денисова Е.В. Динамика течения жидкости в технических системах с жиклерами // *Известия Уфимского научного центра РАН*. № 4. 2015. С. 20–25. ([http://sciencerb.ru/vyp/4\\_2015/20-25.pdf](http://sciencerb.ru/vyp/4_2015/20-25.pdf))
- [5] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Влияние температуры на динамику течения жидкости в технических системах с жиклерами // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН*. 2016. Т. 11, № 1. С. 1–9. (DOI: [10.21662/uim2016.1.001](https://doi.org/10.21662/uim2016.1.001))
- [6] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Течение жидкости через систему связанных элементов технического устройства типа труба–гидросопротивление–труба // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН*. 2016. Т. 11, № 2. С. 141–149. (DOI: [10.21662/uim2016.2.021](https://doi.org/10.21662/uim2016.2.021))
- [7] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Течение жидкости через гидросопротивление с динамически изменяемой геометрией // *Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН*. 2017. Т. 12, № 1. С. 59–66. (DOI: [10.21662/uim2017.1.009](https://doi.org/10.21662/uim2017.1.009))
- [8] Ландау Л., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
- [9] Hecht, F. New development in FreeFem++ // *J. Numer. Math.* 20 (2012), no. 3–4, 251–265. 65Y15. (DOI: [10.1515/jnum-2012-0013](https://doi.org/10.1515/jnum-2012-0013))
- [10] Ландау Л., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
- [11] Белоусов К.И., Евстапов А.А., Кухтевич И.В., Посмитная Я.С. Основы нанотехнологий. Часть 1. Микро- и нанотехнологии для биологических и медицинских исследований. Часть 2. Капельная микрофлюидика: Учеб. пособие. СПб: Университет ИТМО, 2015. 56 с. (<http://books.ifmo.ru/file/pdf/1839.pdf>)



## Study of fluid flow through a channel deformed by piezoelement

Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V.

Mavlutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa

The flow of a liquid through a tube deformed by a piezoelectric cell under a harmonic law is studied in this paper. Linear deformations are compared for the Dirichlet and Neumann boundary conditions on the contact surface of the tube and piezoelectric element. The flow of fluid through a deformed channel for two flow regimes is investigated: in a tube with one closed end due to deformation of the tube; for a tube with two open ends due to deformation of the tube and the differential pressure applied to the channel. The flow rate of the liquid is calculated as a function of the frequency of the deformations, the pressure drop and the physical parameters of the liquid.

**Keywords:** hydrodynamics, hydrodynamic resistance, piezoelement, linear elasticity, finite element method