Том 13 (2018), № 3, с. 47–51

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2018.3.007
DOI: 10.21662/mfs2018.3.007
УДК 539

Получена: 12.03.2018
Принята: 14.09.2018

Вдавливание цилиндрической оболочки в упругопластическое полупространство

Филиппов А.А.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, г. Уфа

В статье рассматривается задача вдавливания стальной цилиндрической оболочки в упругопластическое полупространство, имеющее цилиндрическую вогнутость. Проведен расчет и анализ напряженно-деформированного состояния стальной оболочки и упругопластического полупространства. Приведены графики зависимостей смятия полупространства, коэффициента запаса и напряженного состояния в стальной оболочке от силы вдавливания оболочки в полупространство. Расчеты проводились для трех радиусов вогнутостей и двух типов материалов полупространства. Предполагалось, что упругопластическое полупространство подчиняется критерию разрушения Мора–Кулона.

Ключевые слова: упругопластическая деформация, критерий разрушения Мора–Кулона, ассоциированный закон пластического течения, контактная задача

1. Постановка задачи

Рассматривается задача вдавливания стальной цилиндрической оболочки в упругопластические полупространства, имеющие цилиндрические вогнутости различной кривизны. Диаметр цилиндрической оболочки равен $d = 1220$ мм, толщина стенки — $h = 20$ мм (рис. 1).

Задача рассматривалась в плоской постановке (плоская деформация). Расчетная область состоит из двух элементов: сечение цилиндрической оболочки и сечение ограниченного фрагмента полупространства, имеющего вид полудиска радиуса 5 м, на верхней грани которого располагается вогнутость постоянной кривизны. Рассматривались полупространства с вогнутостями, радиус кривизны которых $R_1 = 1220$ мм, $R_2 = 1600$ мм и $R_3 = \infty$.

Полупространство представляет собой однородный материал, имеющий свойства тугопластичной глины или известняка. Эти материалы относятся к классу горных пород, подчиняющихся закону разрушения Мора–Кулона. Материал оболочки — сталь 13Г1С-У. Упругопластические свойства материалов приведены в табл. 1.

Материал подчиняется закону разрушения Мора–Кулона, если предельные касательные напряжения линейным образом зависят от нормальных напряжений [1, 2].

Критерий разрушения Мора–Кулона удобно представить графически с помощью круговой диаграммы Мора. В этом случае напряженное состояние считается допустимым, если круги Мора рас-

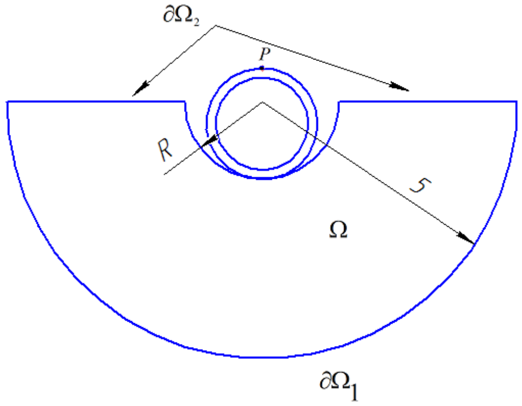

Рис. 1. Расчетная область

Таблица 1. Физико-механические свойства грунта и трубопровода

	Глина тугопластичная	Известняк	Сталь 13Г1С-У
Плотность ρ, кг/м^3	1880	2400	7450
Модуль упругости E, МПа	5.57	100	$206 \cdot 10^3$
Коэффициент Пуассона υ	0.4	0.3	0.33
Предел текучести σ, МПа	—	—	215
Угол внутреннего трения ϕ	15.38	31	—
Удельное сцепление c, МПа	0.047	7.3	—

положены ниже прямой $\tau + \sigma \cdot \mathrm{tg}\,\phi = c$, где τ и σ — касательные и нормальные напряжения; ϕ — угол внутреннего трения; c — удельное сцепление.

Аналитически этот критерий можно записать с помощью функции $F(\sigma)$, называемой функцией текучести материала, в пространстве главных напряжений [1]:

$$F(\sigma) = \max \begin{pmatrix} \dfrac{|\sigma_1-\sigma_2|}{2} + \dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\sin\phi - c\cdot\cos\phi \\ \dfrac{|\sigma_2-\sigma_3|}{2} + \dfrac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\sin\phi - c\cdot\cos\phi \\ \dfrac{|\sigma_1-\sigma_3|}{2} + \dfrac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\sin\phi - c\cdot\cos\phi \end{pmatrix} \quad (1)$$

Разрушение происходит в случае, когда значение функции $F(\sigma)$ больше или равно нулю.

Идеальная упругопластическая модель Мора–Кулона наиболее точно описывает механику деформации горных пород, удовлетворяющих критерию разрушения Мора–Кулона [3]. В этой модели выражение $F(\sigma) = 0$ задает поверхность текучести материала, а область допустимых значений напряжений определяется условием $F(\sigma) \leqslant 0$.

Согласно теории пластического течения приращение пластической деформации пропорционально градиенту функции текучести $\dot{\varepsilon} = \dot{\lambda}\dfrac{\partial F}{\partial \sigma}$. При этом необходимо, чтобы выполнялось одно из условий [2]:

$$\begin{cases} F(\sigma) < 0, & \dot{\lambda} = 0, \\ F(\sigma) = 0, & \dot{\lambda} > 0. \end{cases}$$

Первый вариант соответствует ситуации, когда напряжения не достигли предела текучести, в этом случае приращение получает только упругая компонента деформации. Второй вариант реализуется, когда напряжения σ достигли предела текучести, в результате происходит приращение пластической деформации.

Основные уравнения механики упругопластической деформации с ассоциированным законом пластического течения можно записать в виде следующей системы [2]:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j}^{(1,2)} + f_i^{(1,2)} = 0, \\ \sigma_{ij}^{(1,2)} = \lambda^{(1,2)}\varepsilon_{kk}^{(1,2)}\delta_{ij} + 2\mu^{(1,2)}\varepsilon_{ij}^{(1,2)}, \\ \varepsilon_{kl} = \dfrac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right), \\ \dot{\varepsilon}^{(1,2)} = \dot{\varepsilon}^{(1,2)} + \dot{\varepsilon}^{(1,2)}, \\ \dot{\varepsilon}^{(1,2)} = \dot{\lambda}^{(1,2)}\dfrac{\partial F^{(1,2)}}{\partial \sigma}, \\ F^{(1,2)}(\sigma) \leqslant 0, \\ \dot{F}^{(1,2)}(\sigma) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $\sigma_{ij}^{(1,2)}$ — тензор напряжений; $f_i^{(1,2)}$ — компоненты вектора объемных сил; $\lambda^{(1,2)}$, $\mu^{(1,2)}$ — коэффициенты Лямэ; $\varepsilon^{(1,2)}$ — тензор полной деформации; $\varepsilon^{(1,2)}$ — тензор упругой деформации; $\varepsilon^{(1,2)}$ — тензор пластической деформации λ — множитель Лагранжа; $F^{(1,2)}(\sigma)$ — функция текучести.

Верхний индекс $(1,2)$ определяет компоненту рассматриваемой области (полупространство или оболочка соответственно). Функция текучести материала полупространства $F^{(1)}$ определяется по закону пластического течения Мора–Кулона (1).

$$F^{(2)}(\sigma) = \\ = \sqrt{\frac{1}{2}\left((\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2\right)} - \sigma_{\text{т}}, \quad (3)$$

определяется как функция текучести Мизеса, где $\sigma_{\text{т}}$ — предел текучести материала. Закон пластического течения с функцией текучести (3) достаточно точно описывает механику деформации большинства конструкционных материалов, таких как сталь.

2. Схема решения

Для оболочки, находящейся в положении начального контакта с нижней точкой вогнутости полупространства, задавались несколько вариантов вертикальных смещений. В результате численного

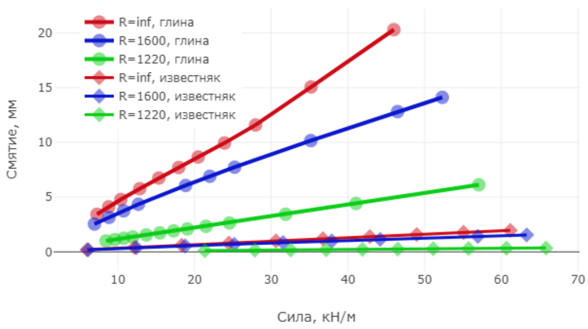

Рис. 2. Максимальное смятие грунта в зоне контакта

решения определялись контактные силы, действующие на полупространство со стороны оболочки.

Условие отсутствия перемещений в точках полупространства, лежащих на бесконечном удалении от зоны контакта с цилиндрической оболочкой, для рассматриваемой модели исследуемой области соответствует отсутствию перемещений на границе $\partial\Omega_1$:

$$u^{(1)}|_{\partial\Omega_1} = 0. \tag{4}$$

Система уравнений (2) для верхнего индекса 1 и граничные условия (4) определяют математическую постановку задачи механики упругопластической деформации полупространства по пластическому закону течения Мора–Кулона.

Система уравнений (2) для верхнего индекса 2 и граничные условия (5) определяют математическую постановку задачи механики упругопластической деформации оболочки по условию текучести Мизеса:

$$\begin{aligned} u_1^{(2)}|_{x_P} &= 0, \\ u_2^{(2)}|_{x_P} &= u_2^0, \end{aligned} \tag{5}$$

где $u_i^{(2)}|_{x_P}$ — компоненты перемещения точки P; u_2^0 — заданное вертикальное смещение.

3. Результаты

Получены результаты численных расчетов контактной задачи вдавливания цилиндрической оболочки в упругопластичное полупространство для трех типов вогнутостей и двух типов материала полупространства.

На рис. 2 приведены графики смятия полупространства в зависимости от величины силы вдавливания оболочки.

Сжимающие напряжения в полупространстве достигают наибольших значений на некотором углублении порядка размера зоны контакта. Что согласуется с теоретическим решением задачи вдавливания жесткого прямоугольного индентера в полубесконечное упругое пространство [4].

Для оценки напряженно-деформированного состояния полупространства был рассчитан относительный коэффициент запаса прочности $\eta = -F^{(1)}(\sigma)/(c \cdot \cos(\phi))$, где c — удельное сцепление, а ϕ — угол внутреннего трения. Область допустимых напряженний определяется значениями $\eta \geqslant 0$. Состоянию пластической текучести соответствует $\eta = 0$. На рис. 3 и 4 представлены диаграммы распределения η в окрестности зоны контакта. Красные зоны соответствуют наименьшему (наиболее опасному) значению коэффициента запаса прочности η.

На рис. 5 приведен график относительного коэффициента запаса. Из графика видно, что толь-

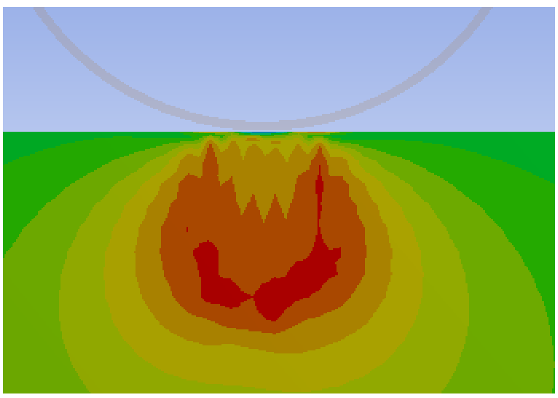

Рис. 3. Диаграмма распределения коэффициента запаса прочности η (материал полупространства — глина, радиус вогнутости $R = \infty$)

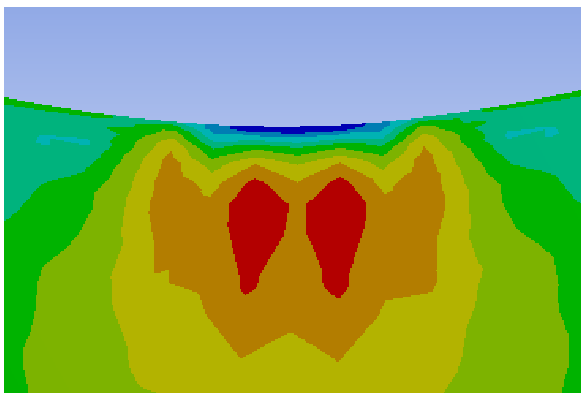

Рис. 4. Диаграмма распределения коэффициента запаса прочностиη (материал полупространства — глина, радиус вогнутости $R = 1600$ мм)

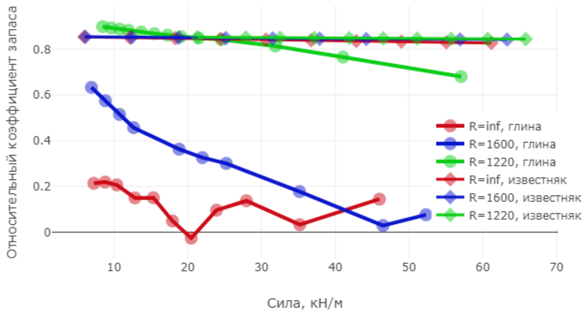

Рис. 5. Относительный коэффициент запаса

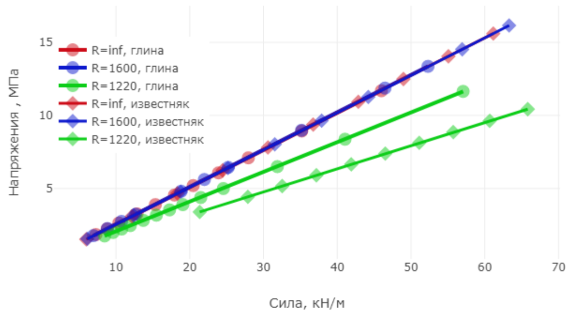

Рис. 6. Максимальные напряжения в трубопроводе

ко для глинистого полупространства напряженное состояние приближается к пределу текучести. В случае, когда вогнутость имеет радиус $R = \infty$, при значении вдавливающей силы примерно равной 20 кН/м в окрестности контактной зоны происходит локальное пластическое течение материала полупространства. При дальнейшем увеличении вдавливающей силы напряжения переходят в упругую зону.

На рис. 6 приведены графики зависимостей максимальных эквивалентных напряжений в оболочке от величины вдавливающей силы. Все точки лежат на одной прямой, за исключением случая, когда радиус вогнутости совпадает с радиусом оболочки ($R = 1220$ мм), и за счет большей области контакта напряжения в оболочке снижаются. Во всех случаях напряжения остаются в упругой зоне.

4. Выводы

Силы вдавливания, не превышающие 60 кН/м, могут привести к локальной пластической деформации глинистого полупространства в зоне контакта (для радиуса вогнутости $R = \infty$). Во всех остальных случаях деформации происходят в упругой зоне, при этом коэффициент запаса прочности для известнякового полупространства не снижается ниже 0.9.

При максимальной силе вдавливания эквивалентные напряжения в оболочке принимают значение меньше 20 МПа, что не превышает 10% от предела текучести стали 13Г1С-У.

Список литературы

[1] Lubliner J. Plasticity Theory. Dover Publication Inc, 2008. 528 p.

[2] Ronaldo I.B. Plasticity Modeling and Computation. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2013. 255 p. (DOI: 10.1007/978-3-642-38547-6).

[3] Coombs W.M., Crouch R.S., Heaney C.E. Observations on Mohr-Coulomb plasticity under plane strain // Journal of engineering mechanics. 2013. V. 139, No. 9. Pp. 1218–1228. (DOI: 10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000568).

[4] Sadd M.H. Elasticity: Theory, Applications, and Numerics. Elsevier. 2014. 600 p. (DOI: 10.1016/C2012-0-06981-5).

13 (2018), **3**, 47–51

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2018.3.007
DOI: 10.21662/mfs2018.3.007

Received: 12.03.2018
Accepted: 14.09.2018

Indentation of the cylindrical shell in the elastoplastic half-space

Filippov A.A.

Mavlutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa

The article deals with the problem of pressing the steel cylindrical shell into the elastoplastic half-space having a cylindrical concavity. The calculation and analysis of the stress-strain state of the steel shell and elastoplastic half-space. Given the dependence of the shear half-space, the safety factor and stress state in steel shell from the force pushing the shell in the half-space. The calculations were carried out for three radii of concavities and two types of half-space materials. It was assumed that the elastoplastic half-space obeys the Mohr-Coulomb fracture criterion.

Keywords: elastoplastic deformation, Mohr–Coulomb failure criterion, associative plastic flow rule, contact problem