Том 13 (2018), № 3, с. 59–63

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2018.3.009
DOI: 10.21662/mfs2018.3.009
УДК 517.958:533.7

Получена: 10.10.2018
Принята: 15.10.2018

Редукция частично инвариантных подмоделей ранга 3 дефекта 1 к инвариантным подмоделям[1]

Сираева Д.Т.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Рассматриваются уравнения гидродинамического типа с уравнением состояния в виде давления, разделенного в сумму функций плотности и энтропии. Такая система уравнений допускает двенадцатимерную алгебру Ли. В случае уравнения состояния произвольного вида уравнения газовой динамики допускают одиннадцатимерную алгебру Ли. Для обеих алгебр Ли оптимальные системы неподобных подалгебр построены. В настоящей работе по двум двумерным подалгебрам двенадцатимерной алгебры Ли построены две частично инвариантные подмодели ранга 3 дефекта 1. Доказана редукция построенных подмоделей к инвариантным подмоделям одиннадцатимерной и двенадцатимерной алгебр Ли.

Ключевые слова: подалгебра, инвариант, частично инвариантная подмодель, гидродинамика

1. Введение

Для уравнений гидродинамического типа:

$$\begin{aligned} &\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0,\\ &\rho_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\rho + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{u} = 0, \\ &p_t + (\vec{u}\cdot\nabla)p + \rho a^2(\rho,p)\mathrm{div}\,\vec{u} = 0,\ a^2 = f_\rho, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\vec{u} = (u, v, w)$ — вектор скорости; ρ — плотность; p — давление; $p = f(\rho, S)$ — уравнение состояния; S — энтропия, была поставлена задача нахождения точных решений с помощью методов группового анализа [1]. Решение данной задачи связано с вычислением допускаемой алгебры Ли, групповой классификацией по произвольному элементу $f(\rho, S)$, вычислением оптимальной системы неподобных подалгебр, построением подмоделей. Задача групповой классификации решена в [1]. В работе [2] приведены все неизоморфные алгебры Ли групповой классификации, для каждой из которых способ перечисления неподобных подалгебр окончательно сформулирован в [3]. В настоящей работе рассматриваются уравнения (1) с уравнением состояния в виде давления, разделенного в сумму функций плотности и энтропии [1]:

$$p = f(\rho) + h(S),\ a^2 = f'. \tag{2}$$

Из (2) определяется энтропия S.

Уравнения (1) с учетом (2) инвариантны при действии группы G_{11} (группы Галилея, расширенной равномерным растяжением) и при действии переноса по p:

$$\begin{aligned} &1.\ \vec{x}\,' = \vec{x} + \vec{a},\\ &2.\ t' = t + a_0,\\ &3.\ \vec{x}\,' = O\vec{x},\ \ \vec{u}\,' = O\vec{u},\ \ OO^T = 1,\ \ \det O = 1,\\ &4.\ \vec{x}\,' = \vec{x} + t\vec{b},\ \ \vec{u}\,' = \vec{u} + \vec{b},\\ &5.\ t' = tc,\ \ \vec{x}\,' = c\vec{x},\\ &6.\ p' = p + c_0. \end{aligned} \tag{3}$$

Преобразованиям (3) соответствует двенадцатимерная алгебра Ли L_{12}, базис которой в декартовой системе координат записывается следующим образом:

$$X_1 = \partial_x,\ \ X_2 = \partial_y,\ \ X_3 = \partial_z,$$
$$X_4 = t\partial_x + \partial_u,\ \ X_5 = t\partial_y + \partial_v,$$
$$X_6 = t\partial_z + \partial_w,$$

[1]Работа поддержана грантом РФФИ (№ 18-29-10071) и средствами государственного бюджета по госзаданию (№ 0246-2018-0005)

$$X_7 = y\partial_z - z\partial_y + \nu\partial_w - w\partial_\nu,$$
$$X_8 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w,$$
$$X_9 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_\nu - \nu\partial_u,\ \ X_{10} = \partial_t,$$
$$X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z,\ \ Y_1 = \partial_p.$$

В оптимальную систему неподобных подалгебр алгебры Ли L_{12} из работы [4] входят подалгебры размерности два и более. Одномерные подалгебры получаются прибавлением оператора Y_1 к оператору одномерной подалгебры из оптимальной системы подалгебр алгебры Ли L_{11} [5].

2. Инвариантные подмодели ранга 3 алгебр Ли L_{11} и L_{12}

Оператор подалгебры 1.12 из оптимальной системы неподобных подалгебр алгебры Ли L_{11} [5] имеет вид:

$$X_4 = t\partial_x + \partial_u,$$

а инварианты таковы:

$$t,\ y,\ z,\ u - \frac{x}{t},\ v,\ w,\ \rho,\ p.$$

Представление инвариантного решения следующее:

$$u = w_1 + \frac{x}{t},\ \ v = u_1,\ \ w = v_1,\ \ \rho,\ \ p,$$

где u_1, v_1, w_1, ρ, p зависят от инвариантов t, y, z. Инвариантная подмодель ранга 3 эволюционного типа, соответствующая подалгебре 1.12 (L_{11}), такова:

$$\begin{aligned} &Du_1 + \rho^{-1}p_y = 0,\\ &Dv_1 + \rho^{-1}p_z = 0,\\ &Dw_1 = -\frac{w_1}{t},\\ &D\rho + \rho(u_{1y} + v_{1z}) = -\frac{\rho}{t},\\ &Dp + \rho f_\rho(u_{1y} + v_{1z}) = -\frac{\rho}{t}f_\rho,\ \ p = f(\rho, S), \end{aligned} \tag{4}$$

где $D = \partial_t + u_1\partial_y + v_1\partial_z$.

Оператор одномерной подалгебры 1.12 из оптимальной системы неподобных подалгебр алгебры Ли L_{12} [4] имеет вид:

$$X_4 + Y_1 = t\partial_x + \partial_u + \partial_p, \tag{5}$$

а инварианты подалгебры (5) таковы:

$$t,\ y,\ z,\ u - \frac{x}{t},\ v,\ w,\ \rho,\ p - \frac{x}{t}.$$

Представление инвариантного решения следующее:

$$u = w_1 + \frac{x}{t},\ v = u_1,\ w = v_1,\ \rho,\ p = p_1 + \frac{x}{t},$$

где функции u_1, v_1, w_1, ρ, p_1 зависят от инвариантов t, y, z. Инвариантная подмодель ранга 3 эволюционного типа, соответствующая подалгебре 1.12 (L_{12}), такова:

$$\begin{aligned} &Du_1 + \rho^{-1}p_{1y} = 0,\\ &Dv_1 + \rho^{-1}p_{1z} = 0,\\ &Dw_1 = -\frac{1}{t}(w_1 + \rho^{-1}),\\ &D\rho + \rho(u_{1y} + v_{1z}) = -\frac{\rho}{t},\\ &Dp_1 + \rho f_\rho(u_{1y} + v_{1z}) = -\frac{1}{t}(w_1 + \rho f_\rho), \end{aligned} \tag{6}$$

где $D = \partial_t + u_1\partial_y + v_1\partial_z$.

Кроме инвариантных подмоделей можно построить частично инвариантные подмодели [6] для подалгебр, в представлении решения которых нельзя выразить все гидродинамические функции через инварианты. Такие «лишние» функции назначаются функциями от всех независимых переменных, входящих в систему (1). Подстановка представления решения в исходные уравнения гидродинамического типа (1) приводит к частично инвариантной подмодели. Решения частично инвариантных подмоделей могут полностью вкладываться в решения инвариантных подмоделей. Покажем, что частично инвариантные подмодели 2.38, 2.39 алгебры Ли L_{12} редуцируются в инвариантные подмодели ранга 3 одиннадцатимерной и двенадцатимерной алгебр Ли соответственно.

3. Редукция частично инвариантной подмодели 2.38 к инвариантной подмодели 1.12 (L_{11})

Подалгебра 2.38 имеет вид:

$$X_4 = t\partial_x + \partial_u,\quad X_1 + Y_1 = \partial_x + \partial_p.$$

Инварианты подалгебры таковы:

$$t,\ y,\ z,\ v,\ w,\ \rho,\ p + tu - x.$$

В представлении частично инвариантного решения

$$u = u(t,x,y,z),\ v,\ w,\ \rho,\ p = p_1 + x - tu$$

функции v, w, ρ, p_1 зависят от инвариантов t, y, z; функция $u = u(t,x,y,z)$ — общего вида.

Энтропия выражается следующим образом: $S = S_1 + x - tu$, $S_1 = S_1(t,y,z)$.

Частично инвариантная подмодель 2.38 ранга 3 дефекта 1 такова:

$$\begin{gathered}u_t = (t\rho^{-1} - u)u_x - vu_y - wu_z - \rho^{-1},\\ u_y = \frac{1}{t}(\rho Dv + p_{1y}),\\ u_z = \frac{1}{t}(\rho Dw + p_{1z}),\\ u_x = -(D\ln\rho + v_y + w_z),\\ Dp_1 + \rho f_\rho(v_y + w_z) + t\rho^{-1} =\\ = u_x(t^2\rho^{-1} - \rho f_\rho),\end{gathered}\qquad (7)$$

где $D = \partial_t + v\partial_y + w\partial_z$.

Пятое уравнение системы (7) представлено с учетом выражения $u_t + vu_y + wu_z$ из первого уравнения той же системы. Из четвертого уравнения системы (7) следует

$$u = ax + \tilde{u},\ a = a(t,y,z),\ \tilde{u} = \tilde{u}(t,y,z). \qquad (8)$$

Подстановка (8) во второе и третье уравнения системы (7) уточняет вид функции $a = a(t)$. Подстановка (8) в первое уравнение системы (7) приводит к уравнению $a_t + a^2 = 0$, из которого следует $a = \dfrac{1}{t}$ (константа убирается переносом $t' = t + a_0$ из (3)). Таким образом, $u = \dfrac{x}{t} + \tilde{u}(t,y,z)$.

Полученные инварианты

$$t,\ y,\ z,\ u - \frac{x}{t},\ v,\ w,\ \rho,\ p + tu - x$$

совпадают с инвариантами подалгебры $X_4 = t\partial_x + \partial_u$ (подалгебра под номером 1.12 из оптимальной системы неподобных подалгебр алгебры Ли L_{11} [5]). Значит, частично инвариантная подмодель (7), построенная по подалгебре 2.38, редуцируется к инвариантной подмодели (4), соответствующей подалгебре 1.12 из оптимальной системы неподобных подалгебр алгебры Ли L_{11}.

4. Редукция частично инвариантной подмодели 2.39 к инвариантной подмодели 1.12 (L_{12})

Операторы подалгебры 2.39 таковы:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_4 + Y_1 = t\partial_x + \partial_u + \partial_p,$$

а инварианты следующие:

$$t,\ y,\ z,\ u - p,\ v,\ w,\ \rho.$$

Представление решения имеет вид:

$$u = \tilde{u}_1 + p,\ v = \tilde{v}_1,\ w = \tilde{w}_1,\ \rho, \qquad (9)$$

где $\tilde{u}_1$, $\tilde{v}_1$, $\tilde{w}_1$, ρ зависят от инвариантов t, y, z, а функция $p = p(t,x,y,z)$ — от всех независимых переменных системы (1).

Подстановка (9) в систему (1) с учетом (2) приводит к частично инвариантной подмодели ранга 3 дефекта 1:

$$\begin{gathered}-D\tilde{u}_1 = p_t + (\rho^{-1} + \tilde{u}_1 + p)p_x +\\ +\tilde{v}_1 p_y + \tilde{w}_1 p_z,\\ -D\tilde{v}_1 = \rho^{-1}p_y, \quad -D\tilde{w}_1 = \rho^{-1}p_z,\\ -D\rho - \rho(\tilde{v}_{1y} + \tilde{w}_{1z}) = \rho p_x,\\ -(\tilde{v}_{1y} + \tilde{w}_{1z})\rho f_\rho =\\ = p_t + (\tilde{u}_1 + p)p_x + \tilde{v}_1 p_y + \tilde{w}_1 p_z + \rho f_\rho p_x,\end{gathered}\qquad (10)$$

где $D = \partial_t + \tilde{v}_1\partial_y + \tilde{w}_1\partial_z$.

Ведем обозначение $\alpha = D\ln\rho + \tilde{v}_{1y} + \tilde{w}_{1z}$, тогда четвертое уравнение системы (10) примет вид:

$$p_x = -\alpha. \qquad (11)$$

Подстановка второго, третьего и четвертого уравнений системы (10) в первое уравнение системы (10) приводит к соотношению

$$\begin{gathered}p_t = -D\tilde{u}_1 + \alpha(\rho^{-1} + \tilde{u}_1 + p) +\\ +\rho(\tilde{v}_1 D\tilde{v}_1 + \tilde{w}_1 D\tilde{w}_1).\end{gathered}\qquad (12)$$

Следующее равенство получается подстановкой уравнения (12), второго, третьего и четвертого уравнений системы (10) в пятое уравнение системы (10)

$$D\tilde{u}_1 - \alpha(\rho^{-1} - \rho f_\rho) - (\tilde{v}_{1y} + \tilde{w}_{1z})\rho f_\rho = 0. \qquad (13)$$

Приравнивание смешанных производных p_{tx} из (12) и p_{xt} из (11) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению $-\alpha^2 + \alpha_t = 0$, решение которого $\alpha = -\dfrac{1}{t}$ не содержит постоянной, так как допускается перенос по времени $t' = t + a_0$ (см. (3)). Тогда p из (11) имеет вид:

$$p = \frac{x}{t} + \tilde{p}_1(t,y,z). \qquad (14)$$

Найденный вид p (14) подставляется в уравнения (13), второе, третье и четвертое уравнения системы (10):

$$D\tilde{u}_1 - (\tilde{v}_{1y} + \tilde{w}_{1z})\rho f_\rho = -\frac{1}{t}(\rho^{-1} - \rho f_\rho), \qquad (15)$$

$$D\tilde{v}_1 + \rho^{-1}\tilde{p}_{1y} = 0, \qquad (16)$$

$$D\tilde{w}_1 + \rho^{-1}\tilde{p}_{1z} = 0, \qquad (17)$$

$$D\rho + \rho(\tilde{v}_{1y} + \tilde{w}_{1z}) = -\frac{\rho}{t}. \qquad (18)$$

В (12) сначала подставляется вид p (14), затем (15), (16), (17):

$$D\widetilde{p}_1 + (\widetilde{v}_{1y} + \widetilde{w}_{1z})\rho f_\rho = -\frac{1}{t}(\rho f_\rho + \widetilde{u}_1 + \widetilde{p}_1). \qquad (19)$$

Система уравнений (15)–(19) содержит функции $\widetilde{u}_1$, $\widetilde{v}_1$, $\widetilde{w}_1$, ρ, $\widetilde{p}_1$, зависящие только от инвариантов t, y, z. Переобозначение $\widetilde{v}_1 \to u_1$, $\widetilde{w}_1 \to v_1$, $\widetilde{u}_1 \to w_1 - p_1$, $\widetilde{p}_1 \to p_1$ приводит систему (15)–(19) к системе (6).

5. Заключение

Таким образом, для уравнений гидродинамического типа с уравнением состояния в виде давления, разделенного в сумму функций плотности и энтропии, построены две частично инвариантные подмодели ранга 3 дефекта 1 по двум двумерным подалгебрам 2.38, 2.39 алгебры Ли L_{12}. Доказана редукция построенных частично инвариантных подмоделей к инвариантным подмоделям ранга 3 одиннадцатимерной и двенадцатимерной алгебр Ли соответственно.

Список литературы

[1] Овсянников Л.В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикладная математика и механика. Москва: РАН. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.

[2] Хабиров С.В. Неизоморфные алгебры Ли, допускаемые моделями газовой динамики // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3, вып. 2. С. 87–90. (http://mi.mathnet.ru/rus/ufa/v3/i2/p87)

[3] Khabirov S.V. Optimal system for sum of two ideals admitted by hydrodynamic type equations // Ufa Mathematical Journal. 2014. Vol. 6, i. 2. Pp. 97–101. (DOI: 10.13108/2014-6-2-97).

[4] Siraeva D.T. Optimal system of non-similar subalgebras of sum of two ideals // Ufa Mathematical Journal. 2014. Vol. 6, i. 1. Pp. 90—103. (DOI: 10.13108/2014-6-1-90).

[5] Хабиров С.В. Аналитические методы в газовой динамике. Уфа. Гилем. 2003. 192 с.

[6] Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В. Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды: монография. Новосибирск: Издательство НГТУ, 2012. 659 с.

13 (2018), **3**, 59–63

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2018.3.009
DOI: 10.21662/mfs2018.3.009

Received: 10.10.2018
Accepted: 15.10.2018

Reduction of partially invariant submodels of rank 3 defect 1 to invariant submodels

Siraeva D.T.

Mavlutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa

Equations of hydrodynamic type with the equation of state in the form of pressure separated into a sum of density and entropy functions are considered. Such a system of equations admits a twelve-dimensional Lie algebra. In the case of the equation of state of the general form, the equations of gas dynamics admit an eleven-dimensional Lie algebra. For both Lie algebras the optimal systems of non-similar subalgebras are constructed. In this paper two partially invariant submodels of rank 3 defect 1 are constructed for two-dimensional subalgebras of the twelve-dimensional Lie algebra. The reduction of the constructed submodels to invariant submodels of eleven-dimensional and twelve-dimensional Lie algebras is proved.

Keywords: subalgebra, invariant, partially invariant submodel, hydrodynamics