Том 13 (2018), № 3, с. 64–72

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2018.3.010
DOI: 10.21662/mfs2018.3.010
УДК 517.958:532.5

Получена: 10.10.2018
Принята: 15.10.2018

Автомодельный упругий режим фильтрации через подвижную границу[1]

Хабиров С.В., Хабиров С.С.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В статье рассматривается одномерная задача упругой фильтрации жидкости через подвижную границу. Для инвариантности задачи выводятся краевые условия. Задача сводится к переопределенной краевой задаче для уравнения Вебера. Найдены точные решения. Асимптотика решения в бесконечно удаленной точке определяет инвариантный закон фильтрации по данным краевым условиям. Для произвольного инвариантного закона фильтрации определена связь между переопределенными инвариантными краевыми условиями.

Ключевые слова: упругая фильтрация, подвижная граница, инвариантные решения, уравнение Вебера, краевая задача, асимптотики решений

1. Введение

Одним из действенных способов интенсификации работы нефтяных и газовых скважин, а также увеличения приемистости нагнетательных скважин, является гидроразрыв пласта (ГРП). В течение ГРП в скважину подается жидкость под давлением бóльшим, чем давление разрыва пласта, что приводит к образованию высокопроводимой трещины в породе. Во время роста трещины происходит частичная потеря жидкости гидроразрыва из-за ее фильтрации в пористую среду пласта. Фильтрация происходит за счет разности давлений пластовой жидкости и жидкости в трещине с добавлением упругого давления раздвинутого скелета породы. На границе трещины определены полуширина трещины, давление и расход жидкости. Задача определения движения трещины в полной постановке слишком сложна: движение вязкой жидкости в трещине, фильтрация жидкости в породу, деформация породы возле трещины. Поэтому используют различные приближенные методы [1] для вывода упрощенной математической модели. Во многих работах считается, что потеря жидкости на фильтрацию подчиняется эмпирическому закону Картера [2] или автомодельному закону фильтрации с неподвижной границей [3].

В настоящей работе рассматривается одномерный процесс упругой фильтрации жидкости в пласт через двигающуюся границу трещины в автомодельной постановке. Реализуются различные законы автомодельной фильтрации, для всех из них можно вывести связь между полушириной трещины, давлением и скоростью фильтрации на границе трещины и пласта. Задача сводится к краевой задаче для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка гипергеометрического типа (уравнению Вебера). Найдены точные решения уравнения. По переопределенным краевым условиям определяется закон автомодельной фильтрации.

2. Уравнения упругого режима фильтрации

Пористая среда характеризуется пористостью

$$m = \frac{V}{V},$$

где в выделенном объеме V величина объема пор равна V.

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10071-мк)

Фильтрующаяся жидкость определяется плотностью ρ, давлением p и скоростью фильтрации $\vec{u}$, которые связаны законом Дарси [3]:

$$\vec{u} = -\frac{k}{\mu}\Delta p, \tag{1}$$

где k — проницаемость среды; μ — динамическая вязкость жидкости.

Закон сохранения массы жидкости в поровом пространстве имеет дифференциальный вид [3]:

$$(m\rho)_t + \nabla \cdot (\rho\vec{u}) = 0. \tag{2}$$

Величины m, ρ, k, μ зависят от давления при постоянной температуре. Эти зависимости являются уравнениями состояния и определяются экспериментально. Упругий режим фильтрации определяется линейными уравнениями состояния в окрестности равновесного давления p_0:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0\left(1+\frac{p-p_0}{K_\rho}\right), \\ m &= m_0\left(1+\frac{p-p_0}{K_m}\right), \\ \frac{k}{\mu} &= \frac{k_0}{\mu_0}\left(1+\frac{p-p_0}{K}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

где $\frac{p-p_0}{K_\rho}$, $\frac{p-p_0}{K_m}$, $\frac{p-p_0}{K}$ — малые величины, т.к. модули упругости K_ρ, K_m, K значительно больше $p-p_0$ [4]. Подставляя (1) и (3) в (2), пренебрегая величинами меньшего порядка, получим нелинейное уравнение [3]

$$p_t = \varkappa\left[\Delta p + \sigma\left(\nabla p\right)^2\right], \tag{4}$$

где

$$\varkappa = \frac{k_0}{\mu_0 m_0}\left(\frac{1}{K_\rho}+\frac{1}{K_m}\right)^{-1}, \quad \sigma = \frac{1}{K_\rho}+\frac{1}{K}.$$

Уравнение (4) заменой

$$P = \ln|u| - f(\tau), \quad \tau = \varkappa t, \quad \sigma p = P$$

линеаризуется к уравнению упругого режима фильтрации, не содержащему эмпирических коэффициентов

$$u_\tau = \Delta u + f'(\tau)u. \tag{5}$$

В работе [3] уравнение (5) выведено как приближение уравнения (4).

3. Одномерная модель упругого режима фильтрации через подвижную границу

В одномерном случае уравнение (4)

$$p_t = \varkappa\left[p_{xx} + \sigma {p_x}^2\right]$$

справедливо в переменной области

$$0 < a(t) \leqslant x < \infty,$$

где $x = a(t)$ — подвижная граница полуширины трещины.

Начальное условие имеет вид:

$$p(0,x) = p_0(x), \quad 0 < a_0 \leqslant x < \infty, \quad a_0 = a(0).$$

Условие на бесконечности задает давление пластовой жидкости

$$p(t,\infty) = p_\infty.$$

Условия на подвижной границе $x = a(t)$:

$$\begin{aligned} p(t,a(t)) &= p_ж + E'a, \\ q_a(t) &= -\frac{k}{\mu}p_x(t,a(t)), \end{aligned}$$

где $E' = E(1-\nu^2)^{-1}$; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; $p_ж$ — давление жидкости в неподвижной трещине. Величина $E'a$ — давление упругой силы скелета по закону Гука [5]. Расход жидкости q_a вычисляется по закону Дарси.

Сделаем замену, убирающую эмпирические постоянные и линеаризующую уравнение

$$\sigma p = \ln u - f(\tau), \quad \varkappa t = \tau.$$

Основное уравнение примет вид:

$$u_\tau = u_{xx} + f'(u). \tag{6}$$

Начальное условие записывается в виде:

$$\begin{aligned} \ln u|_{\tau=0} &= f(0) + \sigma p_0(x) \quad \Rightarrow \\ u(0,x) &= \exp(f(0) - \sigma p_0(x)) = u_0(x). \end{aligned} \tag{7}$$

При $x \to \infty$ краевое условие имеет вид:

$$u(\tau,\infty) = 1, \tag{8}$$

если выбрать $f = -p_\infty\sigma$. При этом последнее слагаемое в (6) равно нулю.

Условия на подвижной границе

$$x = a\left(\frac{\tau}{\varkappa}\right) = \tilde{a}(\tau)$$

принимают вид:

$$u = e^{\sigma E'\tilde{a}} u_a(\tau), \quad u_a(\tau) = \exp(\sigma(p_{ж} - p_\infty)), \quad (9)$$

$$q_a\left(\frac{\tau}{x}\right) = -\frac{k}{\mu\sigma}\frac{u_x}{u} \quad \Rightarrow$$

$$u_x = -e_a^{\sigma E'\tilde{a}} q_a \frac{\mu\sigma}{k} = -e^{\sigma E'\tilde{a}} u_a \tilde{q}_a. \quad (10)$$

Граничные условия определяются функциями $\tilde{a}$, u_a, $\tilde{q}_a$. Следует отметить, что решение краевой задачи существует не для всяких граничных условий. Соотношения между граничными функциями, дающие решение краевой задачи (6)–(10), определяют приближенные модели основной сложной задачи движения трещины.

Далее рассмотрим возможные инвариантные решения краевой задачи [6].

4. Инвариантное решение краевой задачи

Однородное уравнение теплопроводности (6) допускает бесконечномерную алгебру Ли операторов дифференцирования первого порядка с базисом, продолженным на производные u_x [6]:

$$\langle f\rangle = f\partial_u + f_x\partial_{u_x}, f_\tau = f_{xx};$$
$$X_1 = \partial_\tau, \quad X_2 = \partial_x,$$
$$X_3 = 2\tau\partial_\tau + x\partial_x - \frac{1}{2}u\partial_u - \frac{3}{2}u_x\partial_{u_x},$$
$$X_4 = 2\tau\partial_x - xu\partial_u - (u + xu_x)\partial_{u_x},$$
$$X_5 = 4\tau^2\partial_\tau + 4x\tau\partial_x - \left(x^2 + 2\tau\right)u\partial_u - \\ - \left(2xu + \left(x^2 + 6\tau\right)u_x\right)\partial_{u_x},$$
$$X_6 = u\partial_u + u_x\partial_{u_x}.$$

Произвольный оператор алгебры есть линейная комбинация базисных:

$$Y = \langle f\rangle + \sum_{i=1}^{6} x^i X_i.$$

Произвольные элементы f, x^i определим из условия инвариантности начальных и краевых условий:

$$YF|_{F=0} = 0.$$

Для начальных условий $\tau = 0$, $u = u_0(x)$ запишем условие инвариантности. Из первого уравнения следует $x^1 = 0$. Для второго уравнения из условия $Y(u - u_0(x)) = 0$, $u = u_0(x)$ следует

$$f = u_0(x)\left(\frac{1}{2}x^3 + (x)x^4 + \left((x)^2 + 2\tau\right)x^5 - x^6\right) + \\ + u_0{}'\left(x^2 + (x)x^3 + 2\tau\left(x^4 + 2(x)x^5\right)\right).$$

Функция f удовлетворяет уравнению (6), из которого следует равенство

$$u_0''\left(\frac{5}{2}x^3 + (x)x^4 + \left((x)^2 + 10\tau\right)x^5 - x^6\right) + \\ + u_0{}'''\left(x^2 + (x)x^3 + 2\tau\left(x^4 + 2(x)x^5\right)\right) = 0.$$

При $\tau = 0$ получим условие инвариантности начальных данных

$$x^1 = 0, \quad u_0''\left(\frac{5}{2}x^3 + (x)x^4 + (x)^2x^5 - x^6\right) + \\ + u_0{}'''\left(x^2 + (x)x^3\right) = 0. \quad (11)$$

Для краевого условия на бесконечности условие инвариантности принимает вид:

$$f = \frac{1}{2}x^3 + (x)x^4 + \left((x)^2 + 2\tau\right)x^5 - x^6,$$

f удовлетворяет уравнению (6) и должно быть конечным при $x \to \infty$, поэтому

$$x^4 = x^5 = 0, \quad f = \frac{1}{2}x^3 - x^6. \quad (12)$$

Условие инвариантности для краевого условия на подвижной границе запишем при $x^1 = x^4 = x^5 = 0$.

Для условия $x = \tilde{a}(\tau)$ получим

$$2\tilde{a}'\tau x^3 = x^2 + \tilde{a}x^3. \quad (13)$$

Для уравнения (9) в силу (12) определяем

$$f = \frac{1}{2}x^3 - x^6 = u_a\left(\frac{1}{2}x^3 - x^6\right)e^{\sigma E'\tilde{a}} + \\ + 2\tau x^3\left(u_a{}' + \sigma u_a E'\tilde{a}'\right)e^{\sigma E'\tilde{a}}. \quad (14)$$

Для уравнения (10) следует

$$\left(\frac{3}{2}x^3 - x^6\right)e^{\sigma E'\tilde{a}}\tilde{q}_a u_a + 2\tau x^3\left(e^{\sigma E'\tilde{a}}\tilde{q}_a u_a\right)' = 0. \quad (15)$$

Для инвариантности краевой задачи получены однородные относительно величин x^2, x^3, x^6 уравнения (11)–(15) для функций u_0, $\tilde{a}$, u_a, $\tilde{q}_a$.

Положим $x^2 = \alpha x^3$, $x^6 = \beta x^3$ и проинтегрируем уравнения.

Из (13) следует

$$2\tau\tilde{a}' = \tilde{a} + \alpha \quad \Rightarrow \quad \tilde{a} = -\alpha + A\tau^{\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

Из (15) следует

$$e^{\sigma E'\tilde{a}}\tilde{q}_a u_a = Q\tau^{\frac{1}{2}\left(\beta - \frac{3}{2}\right)} = Q\left(\frac{\tilde{a} + \alpha}{A}\right)^{\beta - \frac{3}{2}}. \quad (17)$$

Из (14) следует

$$u_a e^{\sigma E'\tilde{a}} = 1 + U\tau^{\frac{1}{2}\left(\beta-\frac{1}{2}\right)} = 1 + U\left(\frac{\tilde{a}+\alpha}{A}\right)^{\beta-\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

Из (11) следует:

при $\beta \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

$$u_0 = \frac{C}{\left(\beta-\frac{3}{2}\right)\left(\beta-\frac{1}{2}\right)}|x+\alpha|^{\beta-\frac{1}{2}} + C_1 x + C_0, \quad (19)$$

при $\beta = \frac{1}{2}$

$$u_0 = -C\ln|x+\alpha| + C_1 x + C_0, \quad (20)$$

при $\beta = \frac{3}{2}$

$$u_0 = C(x+\alpha)\ln|x+\alpha| + C_1 x + C_0. \quad (21)$$

Постоянная β задает автомодельный закон фильтрации. Постоянная α задает начальное раскрытие трещины.

Из (17) и (18) следует соотношение, не содержащее β:

$$\tilde{q}_a u_a(\tilde{a}+\alpha) = \frac{AQ}{U}\left(u_a - e^{-\sigma E'\tilde{a}}\right),$$

которое задает связь между раскрытием трещины, давлением и расходом на границе трещины.

Искомый оператор, относительно которого краевая задача инвариантна, имеет вид:

$$Y = \left(\beta - \frac{1}{2}\right)(u-1)\partial_u + 2\tau\partial_\tau + (x+\alpha)\partial_x.$$

Представление инвариантного решения записывается через инварианты оператора Y, которые удовлетворяют уравнению

$$YF = 0.$$

Функционально независимые инварианты удобно выбрать в виде:

$$I = (x+\alpha)\tau^{-\frac{1}{2}}, \quad u_1 = (u-1)\tau^{-\frac{1}{2}\left(\beta-\frac{1}{2}\right)}. \quad (22)$$

Представление инвариантного решения однородного уравнения (6) задается зависимостью $u_1(I)$:

$$u = 1 + u_1(I)\,\tau^{\frac{1}{2}\left(\beta-\frac{1}{2}\right)}, \quad (23)$$

которая в литературе называется автомодельным решением [3].

Из (6) следует обыкновенное дифференциальное уравнение гипергеометрического типа:

$$u_1'' + \frac{1}{2}Iu_1' - \frac{1}{2}\left(\beta-\frac{1}{2}\right)u_1 = 0. \quad (24)$$

Запишем инвариантные краевые условия через инварианты.

При $x \to \infty$ из (22), (8) и (23) следует

$$I \to \infty, \quad u_1 = 0. \quad (25)$$

На подвижной границе

$$x + \alpha = A\tau^{\frac{1}{2}} = A(x+\alpha)I^{-1} \quad \Rightarrow \quad I = A$$

выполняются условия (9) и (10), которые в силу (17), (18), (23) принимают вид:

$$u_1 = U, \quad u_1' = -Q, \quad I = A. \quad (26)$$

Начальные условия при $\tau = 0$ или $I \to \infty$ при $\beta \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ имеют вид:

$$\frac{C}{\left(\beta-\frac{3}{2}\right)\left(\beta-\frac{1}{2}\right)}|x+\alpha|^{\beta-\frac{1}{2}} + C_1 x + C_0 = 1 + u_1\tau^{\frac{1}{2}\left(\beta-\frac{1}{2}\right)}$$
$$\Rightarrow \quad C_1 = 0, \quad C_0 = 1, \quad u_1 = \frac{C}{\left(\beta-\frac{3}{2}\right)\left(\beta-\frac{1}{2}\right)}I^{\beta-\frac{1}{2}}.$$

Условия (25) выполняются при $\beta < \frac{1}{2}$. В противном случае $= 0$.

При $\beta = \frac{1}{2}$ по формуле (20) имеем

$$-C\ln|x+\alpha| + C_1 x + C_0 = 1 + u_1 \quad \Rightarrow$$
$$C_1 = C = 0, \quad C_0 = 1.$$

При $\beta = \frac{3}{2}$ по формуле (21) получим точно такой же результат, как и при $\beta = \frac{1}{2}$.

5. Исследование автомодельной краевой задачи

Сделаем замену переменных

$$\frac{1}{2}I = z, \quad \frac{u_1}{U} = w.$$

Краевая задача (24), (25), (26) сводится к гипергеометрическому уравнению Вебера [7]

$$w_{zz} + 2zw_z + \lambda w = 0, \quad \lambda = 1 - 2\beta; \quad (27)$$

при $z \to \infty$, $w = 0$;
при $z = \dfrac{1}{2}A = z_0$, $w = 1$, $w' = -\dfrac{2Q}{U} = -Q_0$.

Уравнение Вебера сводится к уравнению Шреденгера

$$\tilde{w}'' - q(z)\tilde{w} = 0, \quad q(z) = z^2 + 1 - \lambda = z^2 + 2\beta \quad (28)$$

заменой

$$w = \tilde{w}e^{-\frac{1}{2}z^2}.$$

Самосопряженный вид уравнения Вебера следующий:

$$\left(e^{z^2}w'\right)' = -\lambda e^{z^2}w. \quad (29)$$

В [7] доказано утверждение для уравнения Шреденгера:
если

$$q(z) > 0, \int^{\infty} q^{\frac{1}{2}}(t)dt = \infty, \int^{\infty} \left| \frac{5q'^2}{16q^3} - \frac{q''}{4q^2} \right| q^{\frac{1}{2}}(t)dt < \infty,$$

то пара решений уравнения (28) имеет при $z \to \infty$ следующую асимптотику

$$q^{\frac{1}{4}}w \sim \exp\left[\pm \int^{z} q^{\frac{1}{2}}(s)ds\right],$$

которую можно дифференцировать.

Проверим условия утверждения

$$\int^{\infty} q^{1/2}dt \sim \int^{\infty} t\,dt = \infty,$$

$$\int^{\infty} \left| \frac{5q'^2}{16q^3} - \frac{q''}{4q^2} \right| q^{\frac{1}{2}}dt \sim \frac{3}{4}\int^{\infty} t^{-4}dt < \infty.$$

В нашем случае

$$\int_{z_0}^{z} \left(t^2 + 2\beta\right)^{\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{2}t\left(t^2 + 2\beta\right)^{\frac{1}{2}} + \beta \ln\left|t + \left(t^2 + 2\beta\right)^{\frac{1}{2}}\right|\Bigg|_{z_0}^{z}.$$

Следовательно, убывающее решение имеет асимптотику

$$z^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{\beta}{2z^2}\right)\tilde{w} \sim$$

$$\sim C\left|z + \left(z^2 + 2\beta\right)^{\frac{1}{2}}\right|^{-\beta} \exp\left[-\frac{1}{2}z^2\left(1 + \frac{\beta}{z^2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{w} \sim \tilde{C}z^{-\beta-\frac{1}{2}}e^{-\frac{z^2}{2}} \quad \Rightarrow \quad w \sim Cz^{-\beta-\frac{1}{2}}e^{-z^2},$$

$$w' \sim C\left(\beta + \frac{1}{2} + 2z^2\right)z^{-\beta-\frac{3}{2}}e^{-z^2}.$$

Если предположить, что асимптотическое поведение имеет место всюду в области фильтрации, то из краевых условий (27) следует:

$$Cz_0^{-\beta-\frac{1}{2}}e^{-z_0^2} = 1, \; Q_0 = C\left(\beta + \frac{1}{2} + 2z_0^2\right)z_0^{-\beta-\frac{3}{2}}e^{-z_0^2}$$

$$\Rightarrow \quad Q_0 = z_0^{-1}\left(\beta + \frac{1}{2} + 2z_0^2\right). \quad (30)$$

Формула (30) определяет закон автомодельной фильтрации β в зависимости от постоянных z_0, Q_0 из автомодельных краевых условий.

Дифференцирование $D = \dfrac{d}{dz}$ уравнения Вебера (27) лишь изменяет постоянную λ

$$(D^n w)'' + 2z(D^n w)' = -(\lambda + 2n)D^n w.$$

Если $\lambda = -2n$, то $D^n w = \int_z^{\infty} e^{-t^2}dt \to 0$ при $z \to \infty$. В этом случае решение исходного уравнения с условием на бесконечности имеет вид:

$$w_n = D^{-n}\int_z^{\infty} e^{-t^2}dt, \quad D^{-1}w = -\int_z^{\infty} w(t)dt.$$

С помощью самосопряженного уравнения Вебера (29) найдены решения при $\lambda = -2n$ [7]:

$$w_n = e^{-z^2}(e^{z^2}D^n w)^{(n)}, \quad (31)$$

$$(D^n w)'' + 2z(D^n w)' = 0.$$

Если $D^n w$ — постоянная, то получаются полиномы Вебера:

$$v_n = e^{-z^2}(e^{z^2})^{(n)}, \quad (32)$$

$$v_0 = 1, v_1 = 2z, v_2 = 2 + (2z)^2, v_3 = 2z(6 + (2z)^2), \ldots$$

Предположим, что

$$s = (2z)^2, \quad v_{2k+1} = 2zS_k(s), \quad v_{2k} = Q_k(s),$$

где S_k, Q_k — полиномы степени k,

$$Q_0 = 1, \quad S_0 = 1, \quad Q_1 = s + 2, \quad S_1 = s + 6, \ldots$$

Из формул (32) следуют рекуррентные соотношения:

$$v_{2k+1} = 2z(Q_k + 4Q_k') \quad \Rightarrow \quad S_k = Q_k + 4Q_k',$$

$$v_{2(k+1)} = (s+2)S_k + 4sS_k' \quad \Rightarrow$$

$$Q_{k+1} = (s+2)S_k + 4sS_k',$$

которые показывают справедливость индуктивного предположения. Можно вывести рекуррентные соотношения для каждой серии полиномов:

$$S_{k+1} = (s+6)S_k + 8(s+3)S_k' + 16sS_k'',$$
$$Q_{k+1} = (s+2)Q_k + 8(s+1)Q_k' + 16sQ_k''.$$

Все коэффициенты полиномов S_k, Q_k положительны, значит, они не имеют действительных корней при $s > 0$. Полиномы v_{2k+1} имееют корень равный нулю. При $z \to \infty$ полиномы Вебера (32) неограниченно растут.

Не являющиеся постоянными решения уравнений (31) с краевыми условиями на бесконечности имеют при $z \to 0$ вид:

$$D^n w = \int_z^\infty e^{-t^2} dt \;\Rightarrow\; w_n = D^{-n} \int_z^\infty e^{-t^2} dt \to 0.$$

Отсюда следует, что w_n не имеет нулей при $z > 0$:

$$w_0 = \int_z^\infty e^{-t^2} dt, \quad w_1 = \int_z^\infty ds \int_s^\infty e^{-t^2} dt =$$
$$= \frac{1}{2}\left(w_1'' + 2w_1'\right) = \frac{1}{2}\left(-e^{-z^2} + 2zw_0\right),$$

$$w_2 = \frac{1}{4}\left(w_2'' + 2zw_2'\right) = \frac{1}{4}(w_0 + 2zw_1) =$$
$$= \frac{1}{4}\frac{1}{2}\left(-2ze^{-t^2} + (s+2)w_0\right),$$

$$w_3 = \frac{1}{6}\left(w_3'' + 2zw_3'\right) = \frac{1}{6}(w_1 + 2zw_2) =$$
$$= \frac{1}{6}\frac{1}{4}\frac{1}{2}\left(-(s+4)e^{-t^2} + 2z(s+6)w_0\right),$$

$$w_4 = \frac{1}{8}\frac{1}{6}\frac{1}{4}\frac{1}{2}\left(-2z(s+10)e^{-z^2} + (s^2+12s+12)w_0\right), \ldots$$

Предположение индукции

$$w_{2k} = \frac{1}{2^{2k}}\frac{1}{(2k)!}\left(-2zP_{k-1}(s)e^{-z^2} + Q_k(s)w_0\right),$$
$$w_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1}}\frac{1}{(2k+1)!}\left(-R_k(s)e^{-z^2} + 2zS_k(s)w_0\right),$$

где P_k, Q_k, R_k, S_k – полиномы степени k.

Докажем предположение индукции

$$2(2k+1)w_{2k+1} = 2zw_{2k} + w_{2k-1} \quad \Rightarrow$$

$$w_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k+1}}\frac{1}{(2k+1)!}\Big[-sP_{k-1}e^{-z^2} + 2zQ_kw_0 +$$
$$+2(2k)\left(-R_{k-1}e^{-z^2} + 2zS_{k-1}w_0\right)\Big],$$

$$2(2k)w_{2k} = 2zw_{2k-1} + w_{2k-2} \quad \Rightarrow$$

$$w_{2k} = \frac{1}{2^{2k}}\frac{1}{(2k)!}\Big[-2zR_{k-1}e^{-z^2} + sS_{k-1}w_0 +$$
$$+2(2k-1)\left(-2zP_{k-2}e^{-z^2} + Q_{k-1}w_0\right)\Big].$$

Отсюда следуют рекуррентные соотношения для полиномов:

$$R_k = sP_{k-1} + 4kR_{k-1},$$
$$S_k = Q_k + 4kS_{k-1},$$
$$P_{k-1} = R_{k-1} + 2(2k-1)P_{k-2},$$
$$Q_k = sS_{k-1} + 2(2k-1)Q_{k-1},$$

с начальными полиномами:

$$P_{-1} = 0,\ Q_0 = 1,\ R_0 = 1,\ S_0 = 1,\ P_0 = 1,$$
$$Q_1 = s+2,\ R_1 = s+4,\ S_1 = s+6,\ P_1 = s+10.$$

Рекуррентные равенства для каждой серии полиномов:

$$P_k = (s+8k+2)P_{k-1} - 8k(2k-1)P_{k-2},$$
$$Q_{k+1} = (s+8k+2)Q_k - 8k(2k-1)Q_{k-1},$$
$$R_k = (s+8k-2)R_{k-1} - 8(k-1)(2k-1)R_{k-2},$$
$$S_k = (s+8k-2)S_{k-1} - 8(k-1)(2k-1)S_{k-2}.$$

Полиномы R_k и S_k, P_k и Q_{k+1} имеют одинаковые рекуррентные соотношения, но разные начальные полиномы. Полиномы Q_k, S_k совпадают с полиномами Вебера:

$$Q_2 = s^2 + 12s + 12, \quad S_2 = s^2 + 20s + 60,$$
$$P_2 = s^2 + 28s + 132, \quad R_2 = s^2 + 18s + 32, \ldots$$

Интегрирование

$$D^{-1}w = -\int_z^\infty w(t)dt \qquad (DD^{-1}w = w)$$

уравнения Вебера (27) лишь изменяет постоянную λ

$$(D^{-n}w)'' + 2z(D^{-n}w)' = -(\lambda - 2n)D^{-n}w.$$

Если $\lambda = 2n$, то $D^{-n}w = w_0$. В этом случае решение исходного уравнения с условием на бесконечности имеет вид:

$$w_{-n} = (-1)^n D^n w_0 = e^{-z^2} F_{n-1}(z) \to 0 \qquad (33)$$

при $z \to \infty$, где $F_k(z)$ — полином степени k;

$$w_{-1} = e^{-z^2}, \quad w_{-2} = 2ze^{-z^2},$$

$$w_{-3} = (s-2)e^{-z^2}, \quad w_{-4} = 2z(s-6)e^{-z^2}, \ldots$$

Предположение индукции

$$F_{2k+1} = 2zS_k(s), \quad F_{2k} = R_k(s), \quad s = (2z)^2,$$

где S_k, R_k — полиномы степени k.

Из формулы (33) следует

$$2zS_k e^{-z^2} = -D\left(e^{-z^2}R_k\right) = 2ze^{-z^2}(R_k - 4R_k'),$$

$$R_{k+1}e^{-z^2} = -D\left(2ze^{-z^2}S_k\right) = \\ = e^{-z^2}\left((s-2)S_k - 4sS_k'\right).$$

Отсюда следуют рекуррентные соотношения для полиномов:

$$S_k = R_k - 4R_k', \quad R_{k+1} = (s-2)S_k - 4sS_k'$$

с начальными полиномами:

$$R_0 = 1, \quad S_0 = 1, \quad R_1 = s-2, \quad S_1 = s-6.$$

Можно вывести рекуррентные соотношения для каждой серии полиномов:

$$R_{k+1} = (s-2)R_k - 8(s-1)R_k' + 16sR_k'',$$

$$S_{k+1} = (s-6)S_k - 8(s-3)S_k' + 16sS_k'';$$

$$R_2 = s^2 - 12s + 12,$$

$$S_2 = s^2 - 20s + 60,$$

$$R_3 = s^3 - 42s^2 + 420s - 840,$$

$$S_3 = s^3 - 30s^2 + 180s - 120, \ldots$$

Полиномы S_k, R_k имеют чередующиеся по знаку коэффициенты, поэтому имеют k положительных корней. Коэффициент при старшей степени равен 1. Минимальный корень s_* уменьшается с ростом k как для четных, так и для нечетных номеров полиномов. Между соседними корнями S_k есть корень R_k [7]. При $n \geqslant 3$ решение w_{-n} имеет колебательный характер с конечным числом нулей.

Решения имеют физический смысл до наименьшего корня. В точке корня $u = 1$ и давление равно пластовому, т.е. корень задает фронт волны фильтрации. Появление фронта — следствие нелинейности уравнения пьезопроводности (4).

6. Приближение с нецелым λ

Рассмотрим уравнение Вебера (27) с нецелым отрицательным λ

$$-2(n+1) < \lambda < -2n \quad \Rightarrow \quad 0 < -\frac{\lambda}{2} - n = \epsilon < 1$$

Разложим решение в асимптотический ряд по степеням ϵ

$$w = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \ldots$$

с краевыми условиями:

$$u_0|_{z=z_0} = 1, \quad u_0|_{z\to\infty} = 0;$$

$$u_j\big|_{z=z_0} = u_j\big|_{z\to\infty} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots$$

В нулевом приближении получим уравнение Вебера (27) с целым $\lambda = -2n$. Решение краевой задачи определяется с помощью функций (31)

$$u_0 = \frac{w_n(z)}{w_n(z_0)}.$$

Для первого приближения получим неоднородное уравнение Вебера

$$u_1'' + 2zu_1' = 2nu_1 + 2u_0, \quad u_1|_{z=z_0} = u_1|_{z\to\infty} = 0.$$

Решение определяется с помощью функции Грина $G(z, s)$

$$u_1 = 2\int_{z_0}^{\infty} G(z, s)u_0(s)ds.$$

Функция Грина строится с помощью фундаментальной системы решений самосопряженного однородного уравнения [7]:

$$\left(e^{z^2}u'\right)' = 2ne^{z^2}u,$$

$$G(z, s) = \begin{cases} C_1u_1(z) & z_0 \leqslant z \leqslant s \\ C_2u_2(z) & s \leqslant z < \infty \end{cases},$$

$$C_1u_1(s) = C_2U_2(s), \quad C_2u_2' - C_1u_1' = e^{-s^2}. \qquad (34)$$

Функционально независимые решения u_1, u_2 удовлетворяют первому и второму краевому условию соответственно.

В качестве фундаментальной системы решений выберем решение w_n (31) и полином Вебера v_n (32). Тогда

$$u_2(z) = w_n(z) \to 0 \qquad z \to \infty,$$

$$u_1(z) = w_n(z)v_n(z_0) - w_n(z_0)v_n(z)$$

и определитель Вронского равен

$$W(s) = u_1u_2' - u_2u_1' = w_n(z_0)\left(w_nv_n' - v_nw_n'\right).$$

Определяя постоянные из равенств (34), получим функцию Грина

$$G(z,s) =$$

$$= \begin{cases} e^{-s^2} W^{-1}(s) w_n(s) \left(w_n(z) v_n(z_0) - w_n(z_0) v_n(z) \right) \\ \qquad\qquad \text{при} \quad z_0 \leqslant z \leqslant s \\ e^{-s^2} W^{-1}(s) w_n(z) \left(w_n(s) v_n(z_0) - w_n(z_0) v_n(s) \right) \\ \qquad\qquad \text{при} \quad s \leqslant z < \infty \end{cases} .$$

Аналогично определяются следующие приближения.

Второе краевое условие на границе по первому приближению принимает вид:

$$-Q_0 \simeq \frac{w_n'(z_0)}{w_n(z_0)} + \epsilon u_1'(z_0) \quad \Rightarrow$$

$$Q_0 \approx -\frac{w_n'(z_0)}{w_n(z_0)} + (\lambda + 2n) \int\limits_{z_0}^{\infty} G(z_0, s) \frac{w_n(s)}{w_n(z_0)} ds.$$

Последнее равенство определяет закон фильтрации $\beta = \frac{1}{2}(1-\lambda)$ по краевым условиям z_0 и Q_0.

7. Заключение

Выведено нелинейное уравнение упругой фильтрации, которое линеаризуется точечной заменой. В одномерном случае поставлена краевая задача упругой фильтрации через подвижную границу. Выведена инвариантная подмодель автомодельной фильтрации через подвижную границу и определена зависимость между краевыми данными для любого автомодельного режима фильтрации. Асимптотики инвариантной подмодели определяют связь между постоянными автомодельных краевых условий.

Список литературы

[1] Есипов Д.В., Куранаков Д.С., Лапин В.Н., Чёрный С.Г. Математические модели гидроразрыва пласта // Вычислительные технологии. 2014. Т. 19, № 2. С. 33–61. (http://www.ict.nsc.ru/jct/annotation/1589)

[2] Carter R.D. Appendix I. Derivation of the general equation for estimating the extent of the fractured area // Drilling and Production Practice / Eds. G.C. Howard, C.R. Fast. N.Y.: Amer. Petrol. Inst. 1957. P. 261–270.

[3] Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.

[4] Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика: Учебник для вузов. М.: Недра, 1993. 416 с.

[5] Nordgren R.P. Propagation of a vertical hydraulic fracture // Soc. Petrol. Eng. J. 1972. 12. Pp. 306–314. (DOI: 10.2118/3009-PA)

[6] Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В. Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды: монография. Новосибирск.: Изд-во НГТУ, 2012. 659 с.

[7] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.

13 (2018), **3**, 64–72

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2018.3.010
DOI: 10.21662/mfs2018.3.010

Received: 10.10.2018
Accepted: 15.10.2018

Self-similar elastic regime of filtration through moving boundary

Khabirov S.V., Khabirov S.S.

Mavlutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa

The one-dimensional problem of elastic filtration of fluid through moving boundary is considered. The boundary conditions for invariant problem is introduced. The problem is reduced to overdetermine boundary problem for Veber equation. The exact solutions are obtained. For arbitrary invariant filtration law the relationship between overdetermine invariant boundary conditions is obtained.

Keywords: elastic filtration, moving boundary, invariant solutions, Veber equation, boundary problem, asymptotics of solutions