



## Исследование акустического рассеяния от одиночной звукопроницаемой сферы<sup>1</sup>

Насибуллаева Э.Ш.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В работе представлена обобщенная математическая модель и проведены численные исследования задачи акустического рассеяния от одиночной звукопроницаемой сферы при прохождении двух видов волн — сферической от монополярного источника излучения и плоской. При решении уравнений Гельмгольца используется численная техника, основанная на быстром методе мультиполей, которая позволяет достичь высокой точности получаемых результатов при минимальных затратах машинного времени. Проведено сравнение расчетов с известными экспериментальными данными и получено хорошее соответствие. Обобщены формулы для расчета основной характеристики поля рассеяния — полного сечения рассеяния — для звукопроницаемой сферы; показано влияние на данную характеристику физических параметров среды вне и внутри сферы, таких как плотность и скорость звука. Проведен численный параметрический анализ распределения давления вокруг одиночной звукопроницаемой сферы для различных значений волнового радиуса, плотности и скорости звука внешней и внутренней сред сферы. Полученные результаты в дальнейшем будут использоваться при проведении тестовых расчетов для верификации численного решения обобщенной задачи акустического рассеяния множества звукопроницаемых сфер (коаксиальных или произвольно расположенных в пространстве).

**Ключевые слова:** акустическое рассеяние, монополярный источник излучения, плоская волна, звукопроницаемая сфера, полное сечение рассеяния

### 1. Введение

Явление рассеяния звука на препятствиях малых размеров играет важную роль в акустике, в первую очередь из-за того, что на данном явлении основываются многие практические применения акустических волн, в том числе гидролокация, приборы неразрушающего контроля, медицинские сканеры, зондирования атмосферы и океана. Случай одиночной сферы (пузырька или капли) интересен с практической точки зрения, поскольку позволит в будущем проводить сравнения с результатами существующих экспериментальных данных и данных вычислительных экспериментов других исследователей как для произвольного падающего поля, так и для монополярного источника.

В настоящей работе были обобщены математическая модель, представленная в работе [1], для звуконепроницаемой одиночной сферы с произвольным акустическим импедансом, а также методика расчета [2], основанная на быстром методе мультиполей, которая позволяет достичь высокой точности получаемых результатов и минимизировать машинное время.

Целью настоящей работы является обобщение численной модели для определения поля внутри и вокруг одиночной звукопроницаемой сферы для двух видов падающей волны — сферической от монополярного источника излучения и плоской.

### 2. Постановка задачи и основные уравнения.

Рассматривается одиночная сфера радиуса  $a$  с координатами  $\mathbf{r}'_1 = (x'_1, y'_1, z'_1)$  в бесконечном трехмерном пространстве (см. рис. 1), заполненном однородной средой, которая характеризуется плотностью  $\rho_0$  и скоростью звука  $c_0$ . Сквозь поверхность

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-41-020582-р\_а), АН РБ (договор № 40/9) и средств государственного бюджета по госзаданию 0246-2018-0003.

сферы проходит волна, которая распространяется в другой среде, характеризующейся плотностью  $\rho_1$  и скоростью звука  $c_1$ , т.е. рассматриваются случаи сферического газового пузырька или сферической жидкой капли. Задача рассеяния звука от сферы сводится к решению уравнения Гельмгольца для комплексного потенциала  $\psi(\mathbf{r})$

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями, выражающими равенства потенциала и нормальных составляющих скорости частиц на поверхности препятствия, сквозь которую проходит волна:

$$\begin{aligned} (\psi(\mathbf{r}) - \psi_1^{\text{int}})|_{r=a} &= 0, \\ \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \psi_1^{\text{int}}}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В формулах (1) и (2)  $k$  — волновое число;  $\psi_1^{\text{int}}$  — комплексный потенциал внутри сферы, который также удовлетворяет уравнению Гельмгольца (1), но с волновым числом  $k_1$  для среды внутри сферы, т.е.

$$\nabla^2 \psi_1^{\text{int}} + k_1^2 \psi_1^{\text{int}} = 0. \quad (3)$$

Потенциал внешнего поля представляется в следующей форме:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) + \psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}), \quad (4)$$

где  $\psi_{\text{in}}(\mathbf{r})$  — потенциал падающего поля;  $\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r})$  — потенциал поля рассеяния, который удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial \psi_{\text{scat}}}{\partial r} - ik \psi_{\text{scat}} \right) = 0, \quad (5)$$

где  $i = \sqrt{-1}$  — мнимая единица. Данное условие соответствует уходящим на бесконечность волнам (на бесконечности волна затухает) и выделяет единственное решение уравнения (1) в классе обобщенных функций в неограниченной области.

### 2.1. Разложение по мультиполям

Для решения задачи применяется метод разложения по мультиполям (см., например, [2]). В случае одиночной звуконепроницаемой сферы с произвольным акустическим импедансом данная методика была подробно изложена в работе [1].

Вводится система отсчета, связанная с центром сферы, и осуществляется переход к сферической системе координат  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 = (r_1, \theta_1, \varphi_1)$ . На рис. 1 схематично представлены обозначения, используемые при разложении. Тогда разложение

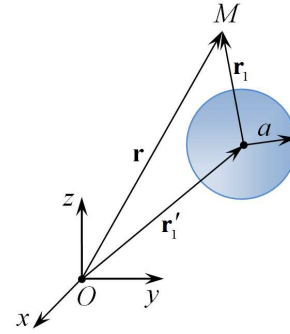


Рис. 1. Обозначения в разных системах отсчета

потенциала рассеянного поля, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца (1) и условию (5), может быть представлено в виде:

$$\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l A_l^s S_l^s(\mathbf{r}_1), \quad (6)$$

где  $A_l^s$  — неизвестные коэффициенты разложения по мультиполям;  $S_l^s(\mathbf{r}_1)$  — мультиполь порядка  $l$  и степени  $s$ , который определяется по формуле

$$S_l^s(\mathbf{r}_1) = h_l(kr_1) Y_l^s(\theta_1, \varphi_1).$$

Здесь  $h_l(kr)$  — сферические функции Хенкеля 1-го типа, удовлетворяющие условию Зоммерфельда;  $Y_l^s(\theta, \varphi)$  — ортогональные сферические гармоники. Вид данных функций представлен, например, в [3].

Разложение падающего поля около  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_1$  будет иметь вид:

$$\psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l C_l^{(\text{in})s}(\mathbf{r}'_1) R_l^s(\mathbf{r}_1),$$

где  $C_l^{(\text{in})s}(\mathbf{r}'_1)$  — коэффициенты разложения;  $R_l^s(\mathbf{r}_1)$  — регулярные решения уравнения Гельмгольца в сферических координатах, связанные со сферой:

$$R_l^s(\mathbf{r}_1) = j_l(kr_1) Y_l^s(\theta_1, \varphi_1).$$

Здесь  $j_l(z)$  — сферические функции Бесселя 1-го типа.

Тогда разложение потенциала (4) около  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_1$ :

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l [C_l^{(\text{in})s}(\mathbf{r}'_1) j_l(kr_1) + \\ + A_l^s h_l(kr_1)] Y_l^s(\theta_1, \varphi_1). \end{aligned} \quad (7)$$

Разложение потенциала внутри сферы примет вид:

$$\psi_1^{\text{int}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l B_l^s(\mathbf{r}'_1) j_l(k_1 r_1) Y_l^s(\theta_1, \varphi_1), \quad (8)$$

где  $B_l^s$  — неизвестные коэффициенты.

Тогда при подстановке (7), (8) в граничные условия (2) неизвестные коэффициенты  $A_l^s$  будут определяться по формуле

$$A_l^s = -\frac{j_l(ka)j_l'(k_1a) - \kappa j_l'(ka)j_l(k_1a)}{h_l(ka)j_l'(k_1a) - \kappa h_l'(ka)j_l(k_1a)} C_l^{(in)s}(\mathbf{r}'_1),$$

где введено обозначение  $\kappa = \frac{k}{k_1} \frac{\rho_1}{\rho_0}$ , а неизвестные коэффициенты  $B_l^s$  — по формуле

$$B_l^s = -\frac{ik}{k^2 a^2} \frac{C_l^{(in)s}(\mathbf{r}'_1)}{h_l(ka)j_l'(k_1a) - \kappa h_l'(ka)j_l(k_1a)}.$$

В случае монополярного источника излучения, расположенного в некоторой точке  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\text{source}}$ , падающее поле, соответствующее фундаментальному решению уравнения Гельмгольца, определяется по формуле

$$\psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) = -V_0 \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\text{source}}|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_{\text{source}}|}, \quad (9)$$

где  $V_0$  — амплитуда объемной скорости (или производительность) монополярного источника. Здесь и далее опускается временной множитель  $e^{-i\omega t}$ , где  $\omega = kc_0$  — угловая частота внешнего поля.

Задача для монополярного источника и одиночной сферы осесимметрична относительно оси, связывающей центр сферы и местоположение источника. Если эту ось взять в качестве оси  $z_1$ , тогда имеем (см., например, [2]):

$$\begin{aligned} C_l^{(in)s} &= -V_0 ik \delta_{s0} h_l(k|\mathbf{r}_{\text{source}} - \mathbf{r}'_1|) Y_l^0(0,0) = \\ &= -V_0 ik \delta_{s0} h_l(kd) \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}, \end{aligned}$$

где  $d$  — расстояние между источником и центром сферы;  $\delta_{s0}$  — дельта-функция Дирака.

Тогда выражения для потенциала поля рассеяния, полного потенциала на поверхности сферы и потенциал падающего поля примут вид:

$$\begin{aligned} \psi_{\text{scat}} &= \frac{V_0 ik}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) h_l(kr_1) h_l(kd) \times \\ &\times \frac{j_l(ka)j_l'(k_1a) - \kappa j_l'(ka)j_l(k_1a)}{h_l(ka)j_l'(k_1a) - \kappa h_l'(ka)j_l(k_1a)} P_l(\cos \theta_1), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\psi|_{S_1} = \frac{V_0 k \kappa}{4\pi a^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1) j_l(k_1a) h_l(kd) P_l(\cos \theta_1)}{h_l(ka)j_l'(k_1a) - \kappa h_l'(ka)j_l(k_1a)}. \quad (11)$$

$$\psi_{\text{in}}(\mathbf{r}'_1) = -\frac{V_0}{4\pi d} e^{ikd}. \quad (12)$$

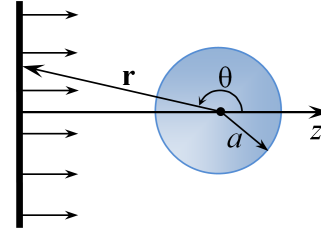


Рис. 2. Обозначения для падающей плоской волны на сферу

Поле внутри сферы определяется по формуле

$$\begin{aligned} \psi_{\text{int}} &= -\frac{\kappa V_0}{4\pi k a^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) h_l(kd) P_l(\cos \theta) \times \\ &\times \frac{j_l(k_1r)}{h_l(ka)j_l'(k_1a) - \kappa h_l'(ka)j_l(k_1a)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Поскольку связь между акустическим давлением и потенциалом определяется следующим образом:

$$p = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = i\omega \rho_0 \psi,$$

то значения  $p_{\text{scat}}$ ,  $p|_{r=a}$  и  $p_{\text{in}}$  можно вычислять с помощью формул (10), (11) и (12) с точностью до постоянной  $i\omega \rho_0$ .

В случае плоской волны, падающей в положительном направлении оси  $z$  (рис. 2), разложение потенциала падающей волны будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) &= \frac{p_0}{i\omega \rho_0} e^{ik \cdot \mathbf{r}} = \frac{p_0}{i\omega \rho_0} e^{ikr \cos \theta} = \\ &= \frac{p_0}{i\omega \rho_0} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta) = \\ &= \frac{p_0}{i\omega \rho_0} \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} j_l(kr) Y_l^0(\theta, 0), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $p_0$  — давление в начальный момент времени. Следовательно,

$$C_l^{(in)s} = \frac{p_0}{i\omega \rho_0} \delta_{s0} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)}.$$

Тогда для плоской волны формулы, аналогичные формулам (10), (11) и (13), примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi_{\text{scat}} &= -\frac{p_0}{i\omega \rho_0} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) h_l(kr) P_l(\cos \theta) \times \\ &\times \frac{j_l(ka)j_l'(k_1a) - \kappa j_l'(ka)j_l(k_1a)}{h_l(ka)j_l'(k_1a) - \kappa h_l'(ka)j_l(k_1a)}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \psi|_{S_1} &= -\frac{p_0 \kappa}{\omega \rho_0 (ka)^2} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \times \\ &\times \frac{j_l(k_1a) P_l(\cos \theta)}{h_l(ka)j_l'(k_1a) - \kappa h_l'(ka)j_l(k_1a)}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\Psi_{\text{int}} = -\frac{p_0 \kappa}{\omega \rho_0 (ka)^2} \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(k_1 r) \times \frac{P_l(\cos \theta)}{h_l(ka) j_l'(k_1 a) - \kappa h_l'(ka) j_l(k_1 a)}. \quad (17)$$

### 3. Полное сечение рассеяния

Рассмотрим полное сечение рассеяния  $\sigma_s$  — характеристика, которая вводится для описания явления рассеяния (см., например, [4, 5]). Физический смысл данной величины — это площадь перпендикулярной потоку площадки (круга), попадая в которую налетающая частица испытывает рассеяние. Определяется данная характеристика следующим образом:

$$\sigma_s = \frac{P_s}{I_0} = \frac{1}{I_0} \int_{(S)} I_s dS, \quad (18)$$

где  $P_s$  — мощность рассеянной волны;  $I_0$  — интенсивность падающей волны;  $I_s$  — интенсивность рассеянной волны; интеграл берется по сферической поверхности  $S = 4\pi r^2$  радиуса  $r$ , которая окружает препятствие.

В работе [1] представлен подробный вывод формулы для определения значения  $\sigma_s$  в случае звуконепроницаемой сферы для монополюсного источника излучения и плоской волны. В настоящей работе приведем аналогичные формулы для звукопроницаемой сферы.

Полное сечение рассеяния вычисляется по формуле

$$\sigma_s = A \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |E_l|^2, \quad (19)$$

где значения коэффициентов  $A$  и  $E_l$  ( $l = 0, 1, \dots$ ) равны

$$A = 4\pi d^2, \quad E_l = \frac{j_l(ka) j_l'(k_1 a) - \kappa j_l'(ka) j_l(k_1 a)}{h_l(ka) j_l'(k_1 a) - \kappa h_l'(ka) j_l(k_1 a)} h_l(kd) \quad (20)$$

для монополюсного источника излучения и

$$A = \frac{4\pi}{k^2}, \quad E_l = \frac{j_l(ka) j_l'(k_1 a) - \kappa j_l'(ka) j_l(k_1 a)}{h_l(ka) j_l'(k_1 a) - \kappa h_l'(ka) j_l(k_1 a)} \quad (21)$$

в случае плоской волны.

Отметим, что при  $\kappa \rightarrow 0$  имеет место случай акустически мягкой сферы, а при  $\kappa \rightarrow \infty$  — акустически жесткой (см., например, [4]).

В формуле (19) ряд вычисляется до тех пор, пока модуль разности предыдущего (при  $l = l_{\text{prev}}$ )

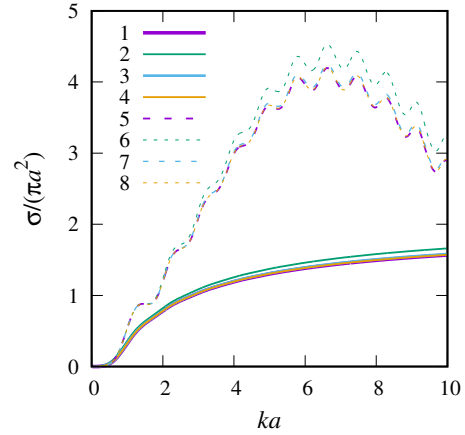


Рис. 3. Сравнение безразмерного значения полного сечения рассеяния  $\sigma_s / (\pi a^2)$  от волнового радиуса  $ka$  для следующих случаев:

1 и 5 — плоская волна;

2 и 6 — монополюсный источник излучения при  $\rho_{in} = 2$ ;

3 и 7 — монополюсный источник излучения при  $\rho_{in} = 5$ ;

4 и 8 — монополюсный источник излучения при  $\rho_{in} = 10$ .

Сплошные линии — капля воды в воздухе; штриховые — капля воды в глицерине

и текущего (при  $l = l_{\text{prev}} + 1$ ) значений  $\sigma_s$  не станет меньше  $\varepsilon = 10^{-10}$ .

На рис. 3 представлено сравнение безразмерного сечения рассеяния для различных случаев внешнего воздействия (плоская волна или монополюсный источник излучения) и двух видов капель воды (в воздухе и глицерине). Видно, что при увеличении расстояния между центром сферы и монополюсным источником излучения  $\rho_{in}$  кривые стремятся к кривым для случая плоской волны. Объясняется это тем, что при увеличении аргумента функции Хенкеля  $h_l(kd)$ , т.е. при  $kd \rightarrow \infty$ , имеет место следующее асимптотическое представление данной функции [3]:

$$h_l(kd) \approx \frac{1}{kd} (-i)^{l+1} e^{ikd},$$

тогда получим, что

$$|h_l(kd)|^2 \approx \frac{1}{(kd)^2} \quad \text{при } kd \rightarrow \infty,$$

и значения коэффициентов, вычисленные по формуле (20), будут стремиться к значениям, вычисленным по формулам (21). Далее рассмотрим изменение полного сечения рассеяния от волнового радиуса при различных значениях параметров для случая падения на сферу плоской волны.

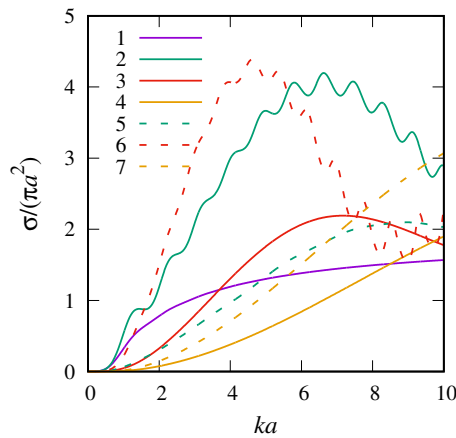


Рис. 4. Сравнение безразмерного значения полного сечения рассеяния  $\sigma_s / (\pi a^2)$  от волнового радиуса  $ka$  в случае плоской волны при различных характеристиках сред:  
 1 – капля воды в воздухе;  
 2 – капля воды в глицерине;  
 3 – капля воды в дихлорэтано;  
 4 – капля воды в хлорбензоле;  
 5 – капля глицерина в воде;  
 6 – капля дихлорэтана в воде;  
 7 – капля хлорбензола в воде

На рис. 4 приведено сравнение безразмерного сечения рассеяния, рассчитанного по формуле (19) с коэффициентами (21), в зависимости от волнового числа  $ka$  для различных сред внутри и вне сферы. Физические характеристики сред представлены в табл. 1. Заметим, что относительная погрешность полученных значений для случаев капли воды в воздухе и жесткой сферы не превышают 0.16% (для  $ka \leq 0.2$ ), поскольку отношение величины  $\rho_1 / \rho_0$ , а, следовательно, и значение  $k$ , близко к нулю.

В том случае, когда рассматривается капля в жидкости, в которой значения  $\rho_0$  и  $c_0$  мало отличаются от соответствующих значений  $\rho_1$  и  $c_1$  жидкости внутри капли, например, в случае воды и касторового масла (см. табл. 1), то рассеяние прак-

Таблица 1. Плотность  $\rho$  и скорость звука  $c$  различных сред при 20°C

Вещество	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$c$ , м/с
Воздух	1.205	343.1
Вода	998	1484
Глицерин	1260	1923
Касторовое масло	960	1480
Дихлорэтан	1252.6	1034
Хлорбензол	1106.2	1289

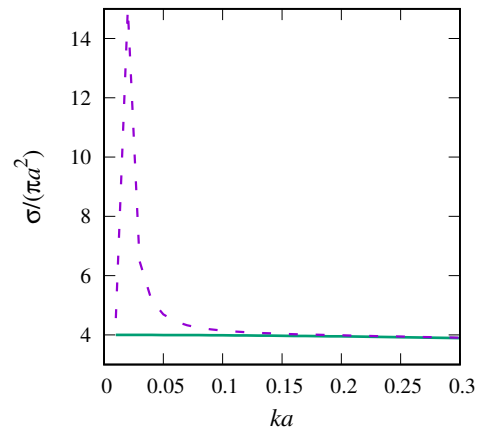


Рис. 5. Сравнение безразмерного значения полного сечения рассеяния  $\sigma_s / (\pi a^2)$  от волнового радиуса  $ka$  в случае плоской волны для воздушного пузырька в воде (штриховая линия) и мягкой сферы (сплошная линия)

тически отсутствует. Так, для капли касторового масла в воде при  $ka = 10$  имеем  $\sigma_s / (\pi a^2) \approx 3 \cdot 10^{-3}$ .

На рис. 5 показано изменение безразмерного значения полного сечения рассеяния для воздушного пузырька в воде, когда  $\rho_0 \gg \rho_1$ . Отметим, что при частоте падающей волны  $\omega$ , близкой по значению к собственной частоте пузырька  $\omega_0$  ( $\omega \approx \omega_0$ ), в системе имеет место резонанс, который приводит к значительному рассеянию звука. Для  $ka \ll 1$  собственная частота и полное сечение рассеяния определяются по следующим формулам [4]:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3\rho_1 c_1^2}{\rho_0 a^2}}, \quad \sigma_s = \frac{4\pi}{k^2} = \frac{4\pi a^2}{(ka)^2}.$$

Рассмотрим на примере пузырька радиусом  $a = 5$  мкм: собственная частота  $\omega_0 \approx 4.13$  МГц, следовательно его резонансный волновой радиус  $ka \approx 0.0139$  (рис. 5, штриховая линия). При  $ka \ll 1$  и  $\omega \gg \omega_0$  полное сечение рассеяния будет стремиться к значению полного сечения рассеяния для мягкой сферы (см., например, [1, 4])  $\sigma_s \rightarrow 4\pi a^2$ . На рис. 5 безразмерное значение полного сечения рассеяния мягкой сферы изображено сплошной линией.

На рис. 6 представлены сравнения случаев, когда среда внутри капли отличается только плотностью от внешней среды:  $\rho_1 = \rho_0 \pm 5\%$ ,  $c_1 = c_0$ . Видно, что качественно характер кривых не меняется, а количественное изменение не превышает 19% относительно капли большей плотности (при изменении плотности на 10%).

На рис. 7 представлено сравнение безразмерных значений полного сечения рассеяния в слу-

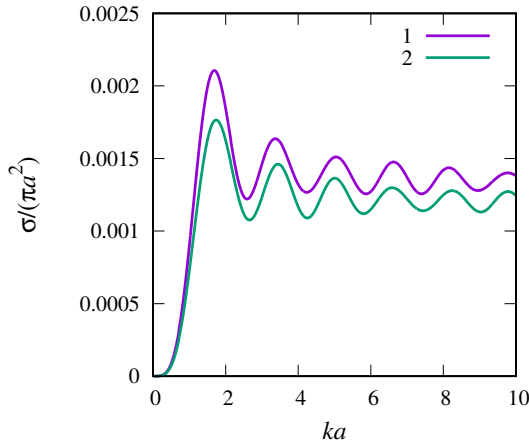


Рис. 6. Сравнение безразмерного значения полного сечения рассеяния  $\sigma_s / (\pi a^2)$  от волнового радиуса  $ka$  в случае плоской волны при различных характеристиках среды внутри капли в воде:  
 1 –  $\rho_1 = 0.95\rho_0$ ,  $c_1 = c_0$ ;  
 2 –  $\rho_1 = 1.05\rho_0$ ,  $c_1 = c_0$

чаях, когда отличаются обе характеристики среды внутри сферы (плотность и скорость звука):  $\rho_1 = \rho_0 \pm 5\%$ ,  $c_1 = c_0 \pm 5\%$ . При фиксированном значении скорости звука  $c_1$  кривые 1–3 и 4–6 сдвигаются вверх. Однако, в случае, когда  $c_1 < c_0$  увеличение значения плотности  $\rho_1$  приводит к уменьшению значения  $\sigma_s / (\pi a^2)$ , а при  $c_1 > c_0$  – к увеличению значения данной величины.

Из рис. 6 и 7 видно, что на рассеяние звуковой волны существенным образом влияет различие в скорости звука сред вне и внутри сферы, в то время, как различие в плотности этих сред имеет несущественное значение.

Отметим, что в случае малого волнового радиуса, когда  $ka \ll 1$ , преобладают монополярная ( $l = 0$ ) и дипольная ( $l = 1$ ) составляющие [4]. В этом приближении полное сечение рассеяния сводится к следующему упрощенному виду:

$$\sigma_s = 4\pi a^2 \left[ \left( \frac{1 - \chi_1/\chi}{(ka)^2 - 3\chi_1/\chi} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{1 - \rho_1/\rho}{1 + 2\rho_1/\rho} \right)^2 \right] (ka)^4, \quad (22)$$

где  $\chi = \rho_0 c_0^2$  – упругость среды вокруг сферы;  $\chi_1 = \rho_1 c_1^2$  – упругость среды внутри сферы. Для значений  $ka$  до 0.1 относительная погрешность величины  $\sigma_s$ , вычисленная по формулам (19), (21) и (22), не превышает 1%.

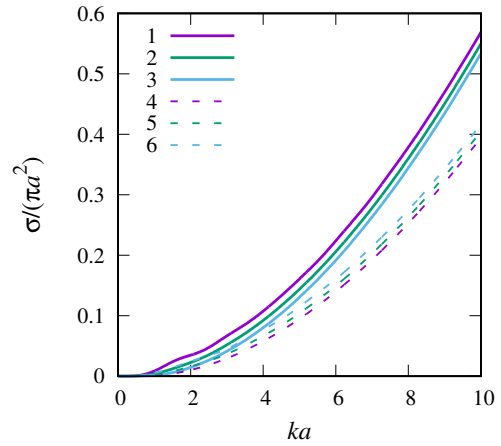


Рис. 7. Сравнение безразмерного значения полного сечения рассеяния  $\sigma_s / (\pi a^2)$  от волнового радиуса  $ka$  в случае плоской волны при различных характеристиках среды внутри капли в воде:  
 1 –  $\rho_1 = 0.95\rho_0$ ,  $c_1 = 0.95c_0$ ;  
 2 –  $\rho_1 = \rho_0$ ,  $c_1 = 0.95c_0$ ;  
 3 –  $\rho_1 = 1.05\rho_0$ ,  $c_1 = 0.95c_0$ ;  
 4 –  $\rho_1 = 0.95\rho_0$ ,  $c_1 = 1.05c_0$ ;  
 5 –  $\rho_1 = \rho_0$ ,  $c_1 = 1.05c_0$ ;  
 6 –  $\rho_1 = 1.05\rho_0$ ,  $c_1 = 1.05c_0$

#### 4. Сравнение с экспериментальными данными

Эксперимент, представленный в работе [7], связан с измерениями отклика поверхности одночного пузырька в жидкости на падающую плоскую волну. В данной работе эксперименты проводились в резервуаре из оргстекла размерами  $1.2 \times 0.45 \times 0.51$  м<sup>3</sup>, заполненном водой, стенки которого выложены безэховым материалом для уменьшения отражения. Источником, излучающим волну, управляли в импульсном режиме, выделяя сигнал от пузырька, который располагался на тонкой нити, прикрепленной к рамке из тонкой проволоки и расположенной на оси на глубине 0.18 м. Расстояние от датчика до нити было равно  $r = 0.58$  м. Размеры создаваемых в данном эксперименте пузырьков составляли  $a = (585 \pm 35)$  мкм. Отметим, что в данной работе было показано отсутствие каких-либо существенных изменений в форме пузырька.

На рис. 8 представлено сравнение расчетных и экспериментальных данных значения целевой силы (target strength, TS) при изменении частоты  $f$  от 70 до 150 кГц для трёх радиусов пузырька  $a = 550, 585, 620$  мкм. Целевая сила, измеренная в децибелах, рассчитывалась по следующей формуле

$$TS = 10 \lg \sigma_{bs}, \quad (23)$$

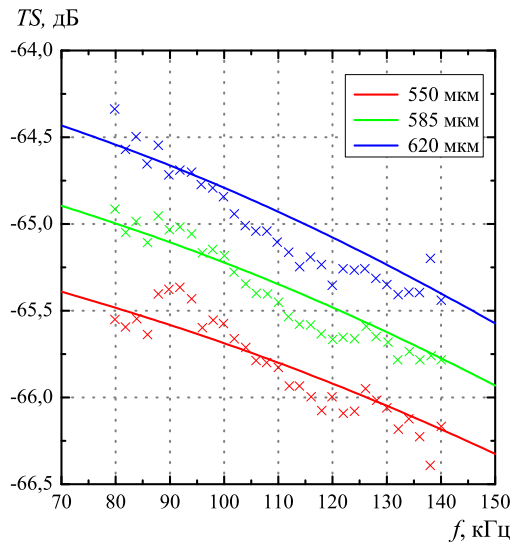


Рис. 8. Сравнение между расчетными данными (линии) и экспериментальными данными работы [7] (символы): величина отклика TS от частоты падающего поля для одиночного пузырька радиуса  $585 \pm 35$  мкм

где  $\sigma_{bs}$  — обратное сечение рассеяния для пузырька, определяемое по формуле

$$\sigma_{bs} = \left| \frac{\Psi_{scat}|_{S_1}}{\Psi_{in}(\mathbf{r})} \right|^2.$$

Здесь  $\Psi_{scat}$  вычисляется по формуле (15) на поверхности пузырька  $S_1$ , а знаменатель равен  $\Psi_{in}(\mathbf{r}) = V_0 e^{ikr}/r$ , так как отраженная от пузырька плоская волна становится сферической.

При расчетах производилось усечение ряда в разложении (15). Число усечения  $M$ , определяемое по эвристической формуле [6]

$$M = [eka], \quad e = 2.71828 \dots, \quad (24)$$

является нижней границей для небольших чисел  $ka$ , а для больших значений достаточно использовать формулу  $M \geq eka/2$  [2].

Рис. 8 показывает, что расчетные и экспериментальные данные хорошо согласуются (максимальная относительная погрешность составляет не более 0.42%).

Отметим, что в разложении (15) в соответствии с формулой (24) остается только два слагаемых ( $l = 0, 1$ ), что согласуется с тем фактом, что при отражении от пузырька преобладающими являются только первые две моды (монопольное и дипольное рассеяние), в то время как остальные моды более высокого порядка дают незначительный эффект.

## 5. Численные расчеты

В результате численного моделирования были написаны программные коды на языке Fortran 90. Для вычисления специальных функций и их производных  $h_l(z), h'_l(z), j_l(z), P_l(z)$  были адаптированы программные коды [8], написанные на языке Fortran 77.

На рис. 9 представлены диаграммы распределения модуля нормированного давления вокруг капли в жидкости, когда физические параметры сред не совпадают ( $\rho_1 \neq \rho_0$  и  $c_1 \neq c_0$ ), при падении плоской волны для различных значений волнового радиуса ( $ka = 0.1, 1, 5.05, 10$ ). В случае капли воды в дихлорэтана (рис. 9 (слева)), т.е. в случае капли меньшей плотности и большей скорости звука, чем окружающая ее жидкость, с некоторого значения  $ka$  (см. диаграмму для  $ka = 1$ ) появляется «теневая» зона за каплей, которая при дальнейшем увеличении  $ka$  «освещается» (появляется так называемое пятно Пуассона). А в случае капли дихлорэтана в воде (рис. 9 (справа)), когда капля имеет большую плотность и меньшую скорость звука, чем окружающая ее жидкость, наблюдается резкое повышение давления за сферой, т.е. капля представляет собой сферическую жидкую линзу. При увеличении значения  $ka$  область резкого повышения давления уменьшается, но увеличивается ее максимальное значение.

На рис. 10 для наглядности приведены нормированные амплитуды давления вблизи сферической капли на оси  $Oy$  ( $y = 0$ ), соответствующие значениям  $ka$ , представленным на рис. 9. На рис. 11 показана зависимость функции отклика на поверхности сферы (переходной функции)  $H$ , измеренной в децибеллах, которая рассчитывалась по следующей формуле

$$H = 20 \lg \left| \frac{\Psi|_{S_1}}{\Psi_{in}(\mathbf{r}'_1)} \right|. \quad (25)$$

Данная функция представляет отношение амплитуды акустического поля при особом расположении поверхности к амплитуде падающего поля в центре сферы. При расчетах производилось усечение ряда в разложении по формуле (24).

На рис. 12 представлены диаграммы распределения нормированного давления вокруг воздушного пузырька в воде (случай  $\rho_1 \ll \rho_0$ ) при падении плоской волны в дорезонансной области ( $ka = 0.005$ ), в области резонанса ( $ka = 0.0139$ ), в послерезонансной области ( $ka = 0.02$ ) и вдали от резонанса ( $ka = 0.1$ ), где значения для пузырька близки к значениям для мягкой сферы. На рис. 13 показаны графики нормированной амплитуды давления

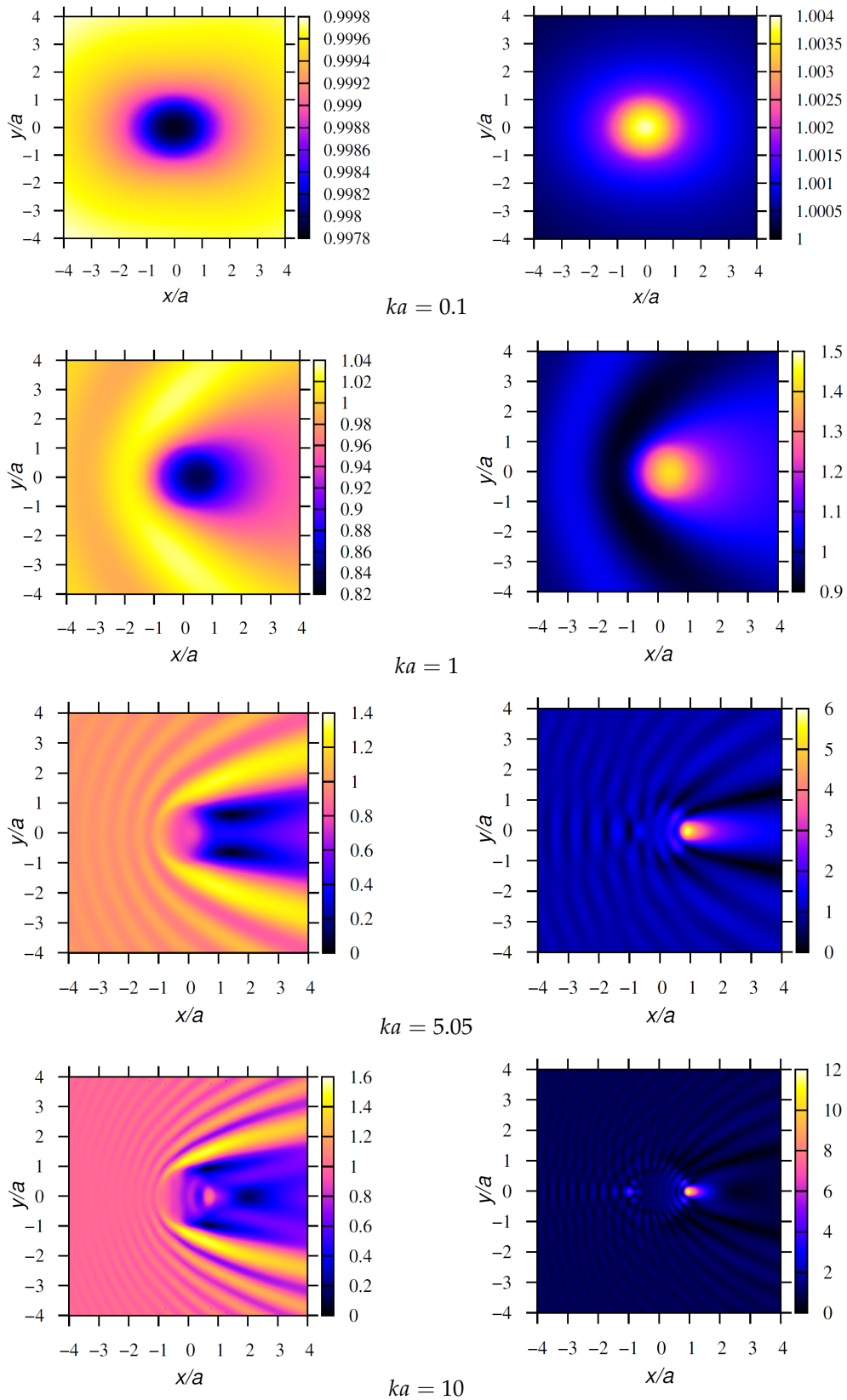


Рис. 9. Диаграммы распределения модуля нормированного давления вокруг капли в жидкости при падении плоской волны для различных значений волнового радиуса  $ka$ : капля воды в дихлорэтане (слева); капля дихлорэтана в воде (справа)



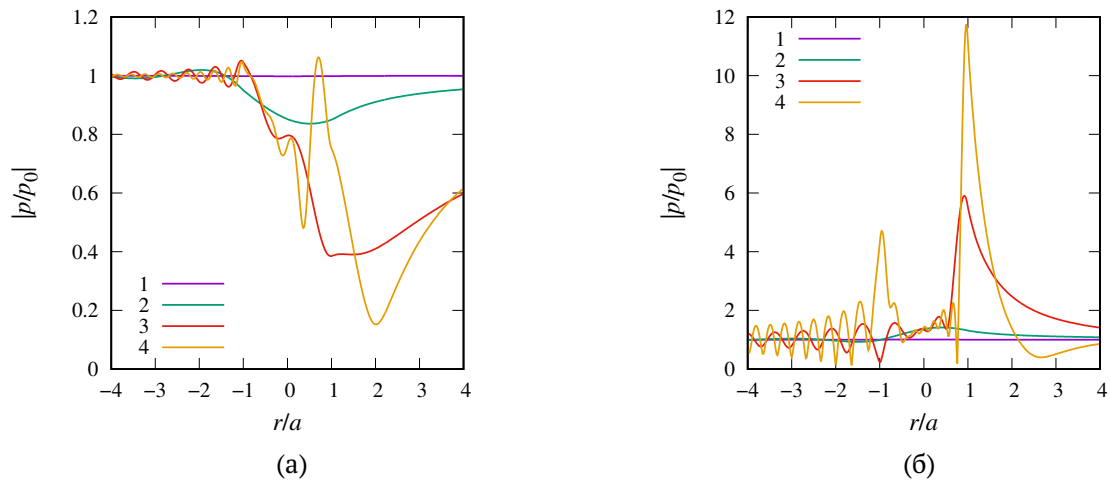


Рис. 10. Нормированная амплитуда давления вблизи одиночной сферической капли воды в дихлорэтане (а) и капли дихлорэтана в воде (б) при воздействии плоской волны для различных значений волнового радиуса  $ka$ : 1 –  $ka = 0.1$ ; 2 –  $ka = 1$ ; 3 –  $ka = 5.05$ ; 4 –  $ka = 10$

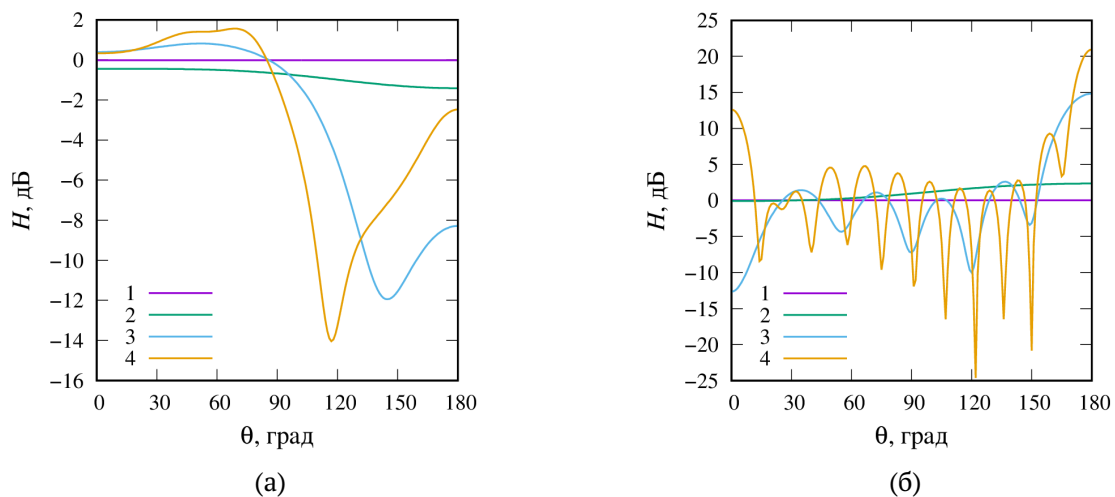


Рис. 11. Зависимость функции отклика  $H$  на поверхности сферы от угла  $\theta$  для капли воды в дихлорэтане (а) и капли дихлорэтана в воде (б) при воздействии плоской волны для различных значений волнового радиуса  $ka$ : 1 –  $ka = 0.1$ ; 2 –  $ka = 1$ ; 3 –  $ka = 5.05$ ; 4 –  $ka = 10$

на оси  $Oy$  ( $y = 0$ ) вблизи пузырька для соответствующих рис. 12 значений  $ka$ . Для рассмотренного диапазона значений ( $ka \ll 1$ ) функция отклика на поверхности пузырька  $H$  остается практически постоянной — максимальная погрешность относительно минимального значения данной функции не превышает 0.1%.

Рис. 14, 15 демонстрируют случай капли воды в воздухе, т.е. случай  $\rho_1 \gg \rho_0$ . Диаграммы распределения нормированного давления вокруг капли при падении плоской волны для различных значений  $ka$  представлены на рис. 14. Отметим, что при увеличении  $ka$  распределение давления стано-

вится близким к распределению давления вокруг жесткой сферы (см., например, [1]). На рис. 15(а) показаны кривые нормированной амплитуды давления вдоль оси  $Oy$  ( $y = 0$ ) для значений  $ka$ , приведенных на рис. 14, а рис. 15(б) демонстрирует зависимость функции отклика на поверхности капли  $H$  от угла  $\theta$ .

## 6. Заключение

В работе обобщена математическая модель и проведено численное исследование акустического рассеяния от звукопроницаемой сферы (случай, когда падающая волна проходит через поверхность

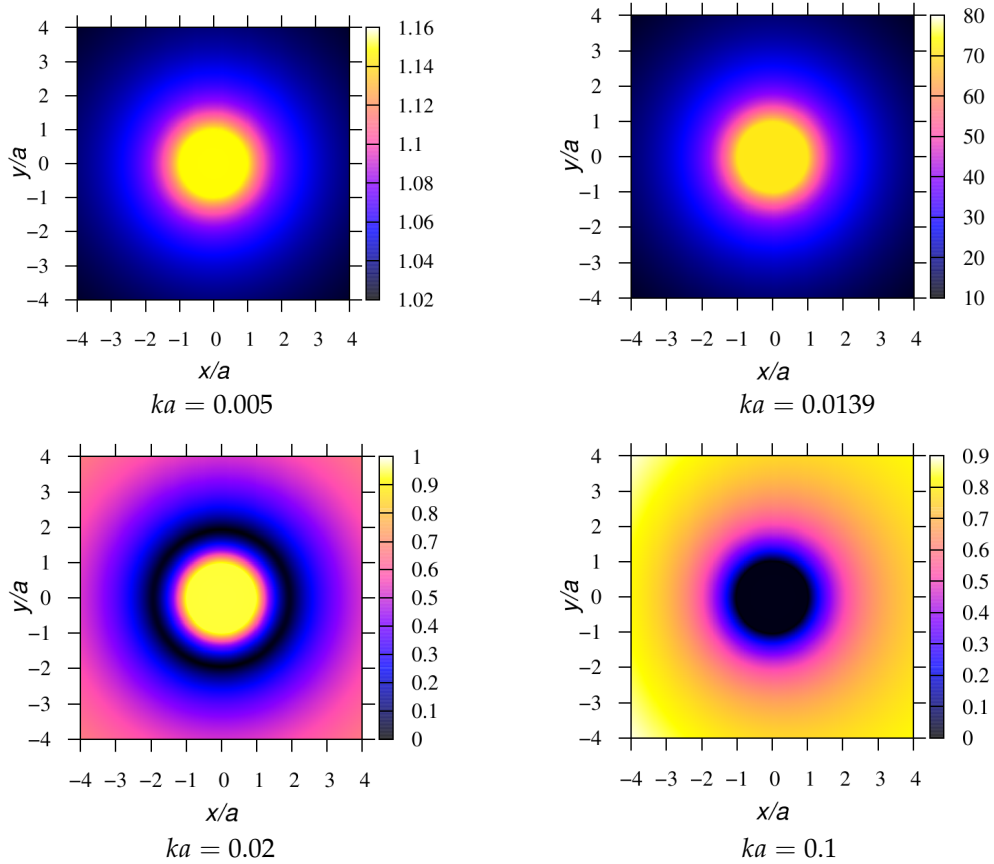


Рис. 12. Диаграммы распределения модуля нормированного давления вокруг воздушного пузырька в воде при падении плоской волны для различных значений волнового радиуса  $ka$

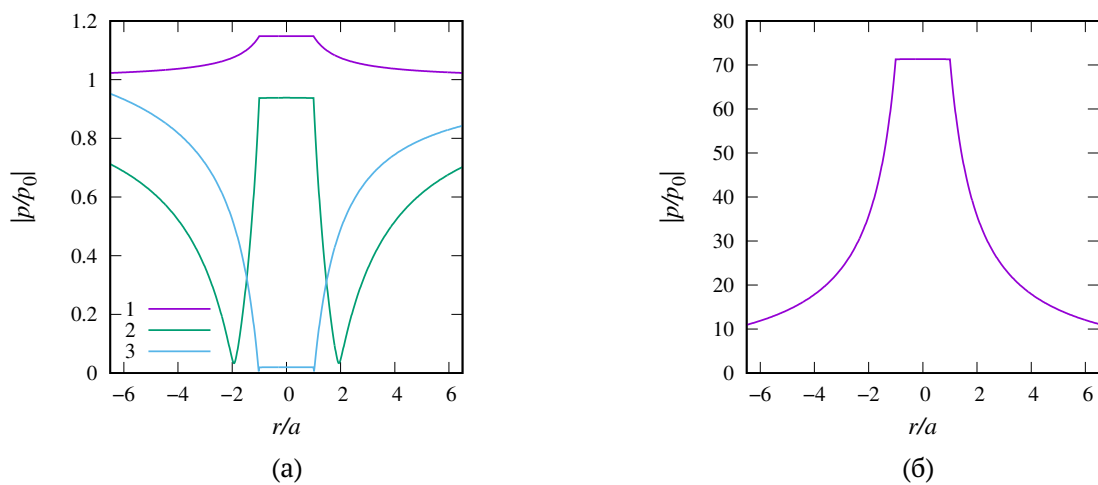


Рис. 13. Нормированная амплитуда давления вблизи одиночного воздушного сферического пузырька в воде при падении плоской волны вне резонансной области для различных значений  $ka$ : 1 –  $ka = 0.005$ ; 2 –  $ka = 0.02$ ; 3 –  $ka = 0.1$  (а) и в области резонанса (б)

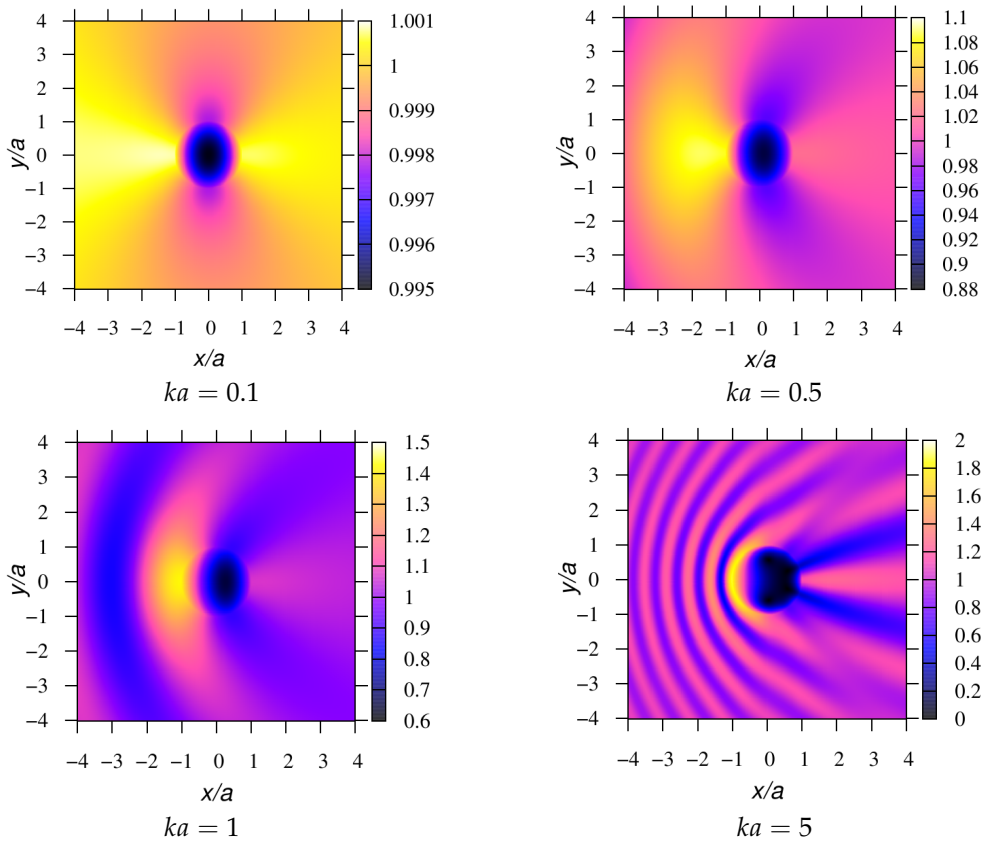


Рис. 14. Диаграммы распределения модуля нормированного давления вокруг одиночной сферической капли воды в воздухе при падении плоской волны для различных значений волнового радиуса  $ka$

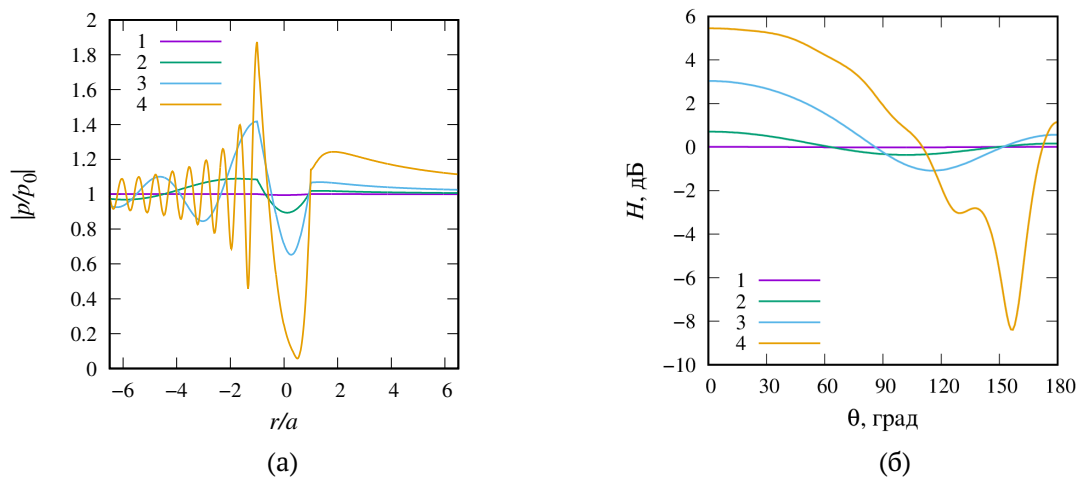


Рис. 15. Нормированная амплитуда давления вблизи одиночной сферической капли воды в воздухе на оси  $Oy$  (а) и зависимость функции отклика  $H$  на поверхности сферы от угла  $\theta$  (б) при падении плоской волны для различных значений волнового радиуса: 1 –  $ka = 0.1$ ; 2 –  $ka = 0.5$ ; 3 –  $ka = 1$ ; 4 –  $ka = 5$

сферы) для двух видов внешнего воздействия: сферической волны от монополюсного источника излучения и плоской волны. Методика разложения по мультиполям в случае звуконепроницаемой сферы с произвольным акустическим импедансом [2] обобщена на случай звукопроницаемой сферы, поскольку данная методика позволяет достичь высокой точности получаемых результатов и минимизировать машинное время. Получены формулы разложения для двух частных случаев внешнего поля. Проведено сравнение результатов расчетов настоящей работы с экспериментальными данными работы [7], получено хорошее соответствие.

Представлены обобщенные формулы для основной характеристики поля рассеяния — полного сечения рассеяния — для звукопроницаемой сферы и двух видов внешнего воздействия. Проведен численный анализ влияния таких физических параметров внешней и внутренней сред на данную характеристику как скорость звука и плотность при изменении значения волнового радиуса  $ka$ . Показано, что на рассеяние звуковой волны существенным образом влияет различие в скорости звука сред вне и внутри сферы, в то время, как различие в плотности этих сред имеет несущественное значение.

Проведен численный параметрический анализ распределения давления вокруг одиночной звукопроницаемой сферы для различных значений волнового радиуса  $ka$ , плотности сред  $\rho_0$  и  $\rho_1$ , а также скорости звука сред  $c_0$  и  $c_1$ . Показано, что в случае газового пузырька ( $\rho_1 \ll \rho_0$ ) при  $ka \ll 1$  имеет место резонанс, а при больших значениях  $ka$  рассеяние от пузырька становится близко к рассеянию от мягкой звукопроницаемой сферы. А в случае капли жидкости в газе ( $\rho_1 \gg \rho_0$ ) при больших значениях  $ka$  рассеяние близко к рассеянию жесткой звукопроницаемой сферы. В том слу-

чае, когда внутри и вне сферы находятся жидкости с различными значениями плотности и скорости звука ( $\rho_1 \neq \rho_0, c_1 \neq c_0$ ) при определенных значениях параметров возможно появление «теневого» зоны за сферой (пятно Пуассона) или, наоборот, «освещение» зоны, когда капля представляет собой сферическую жидкую линзу.

Полученные результаты в дальнейшем будут использоваться для проведения тестовых расчетов для обобщенной задачи акустического рассеяния множества звукопроницаемых сфер (как коаксиальных, так и произвольно расположенных в пространстве).

## Список литературы

- [1] Насибуллаева Э.Ш. Исследование рассеяния от звукопроницаемой одиночной сферы при внешнем воздействии // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2017. Т. 12, № 1. С. 73–82. (DOI: [10.21662/uim2017.1.011](https://doi.org/10.21662/uim2017.1.011))
- [2] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from  $N$  spheres using multipole reexpansion // J. Acoust. Soc. Am. 2002. Vol. 112, No. 6. P. 2688–2701. (DOI: [asa.scitation.org/doi/10.1121/1.1517253](https://doi.org/10.1121/1.1517253))
- [3] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.
- [4] Гринченко В.Т., Вовк И.В., Мацыпура В.Т. Основы акустики. Киев: Наукова думка, 2009. 867 с.
- [5] Шендеров Е.Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судострое-ние. 1989. 304 с.
- [6] Duda R.O., Martens W.L. Range dependence of the response of a spherical head model // J. Acoust. Soc. Am. 1998. Vol. 104. Pp. 3048–3058. (DOI: [asa.scitation.org/doi/10.1121/1.423886](https://doi.org/10.1121/1.423886))
- [7] Kapodistrias G., Dahl P.H. Effects of interaction between two bubble scatterers // J. Acoust. Soc. Am. 2000. Vol. 107. Pp. 3006–3017. (DOI: [asa.scitation.org/doi/10.1121/1.429330](https://doi.org/10.1121/1.429330))
- [8] Zhang S., Jin J. Computation of special functions. NY: Wiley-Interscience, 1996. 717 p.



## The study of acoustic scattering from a single sound-permeable sphere

Nasibullaeva E.Sh.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa

The paper presents a generalized mathematical model and numerical investigation of the problem of acoustic scattering from a single sound-permeable sphere during the passage of two types of waves - spherical from a monopole radiation source and a plane one. In solving the Helmholtz equation, a numerical technique based on the fast method of multipoles is used, which allows achieving high accuracy of the results obtained at the lowest cost of computer time. The calculations are compared with known experimental data and a good agreement is obtained. The formulas for calculating the main characteristic of the scattering field (the total scattering cross section) for a sound-permeable sphere are generalized. The effect on this characteristic of the physical parameters of media outside and inside the sphere, such as the density and speed of sound, is shown. A numerical parametric analysis of the pressure distribution around a single sound-permeable sphere for different values of the wave radius, density, and speed of sound of the outer and inner medium of the sphere is carried out. The obtained results will later be used for test verification calculations for the numerical solution of the generalized problem of acoustic scattering of a set of sound-permeable spheres (coaxial or arbitrarily located in space).

**Keywords:** acoustic scattering, a monopole radiation source, a plane wave, a sound-permeable sphere, a total scattering cross section