ISSN: 2658–5782

Номер 1 Январь–Март 2019

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org

ИМех
им. Р.Р. Мавлютова

ISSN 2658–5782 Том 14 (2019), № 1, с. 52–58

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2019.1.007
DOI: 10.21662/mfs2019.1.007
УДК 532.5.013.4

Получена: 2.04.2019
Принята: 14.05.2019

Влияние зависимости вязкости от температуры на спектральные характеристики уравнения устойчивости течения термовязких жидкостей[1]

Низамова А.Д.*, **Киреев В.Н.****, **Урманчеев С.Ф.***

*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа
**Башкирский государственный университет, Уфа

Рассмотрено течение вязкой модельной жидкости в плоскопараллельном канале с неоднородным температурным полем. Задача об устойчивости течения термовязкой жидкости решается на основе полученного ранее обобщенного уравнения Орра–Зоммерфельда спектральным методом разложения по полиномам Чебышева. Исследуется влияние учета линейной и экспоненциальной зависимостей вязкости жидкости от температуры на спектральные характеристики уравнения гидродинамической устойчивости течения несжимаемой жидкости в плоском канале при различных значениях температуры стенок. Аналитически получены профили скорости течения термовязкой жидкости. Построены спектральные картины собственных значений обобщенного уравнения Орра–Зоммерфельда. Показано, что структура спектров в значительной степени зависит от свойств жидкости, определяемых показателем функциональной зависимости вязкости. Установлено, что при малых значениях параметра термовязкости спектр сопоставúм спектру для изотермического течения жидкости, однако, при его увеличении число собственных значений и их плотность возрастают, то есть существует большее количество точек, при которых задача имеет нетривиальное решение. Устойчивость течения термовязкой жидкости зависит от наличия собственного значения с положительной мнимой частью среди всего множества найденных собственных значений при фиксированных параметрах числа Рейнольдса и волнового числа. Показано, что при фиксированных значениях числа Рейнольдса и волнового числа с ростом параметра термовязкости течение может стать неустойчивым. Спектральные характеристики определяют структуру собственных функций и критические параметры течения термовязкой жидкости. При этом собственные функции демонстрируют поведение возмущений поперечной скорости, их возможный рост или затухание с течением времени.

Ключевые слова: термовязкая жидкость, спектры собственных значений, гидродинамическая неустойчивость

1. Введение

Задача исследования устойчивости течения термовязкой жидкости определяется необходимостью разработки методов управления режимами течения в промышленных конденсаторах и теплообменных устройствах. Как известно, в различных технологических процессах важны как ламинарный, так и турбулентный режимы течения. С точки зрения энергетической эффективности важен ламинарный режим, с другой стороны, при учете эффективности тепломассопереноса — турбулентный. С увеличением скорости ламинарное течение теряет устойчивость, и начинают развиваться возмущения, которые могут привести либо к установлению вторичного нелинейного режима, сохраняющего основные свойства ламинарного течения, либо к турбулизации потока.

В настоящее время накоплен достаточный за-

[1]Работа поддержана средствами государственного бюджета по госзаданию на 2019–2022 гг. (№ 0246-2019-0052), РФФИ (проект № 17-41-020999-р_а.) и Академии наук Республики Башкортостан (договор № 40/10).

дел по изучению особенностей устойчивости течения однородных жидкостей в каналах и их спектральных характеристик [1–4] и, как правило, обстоятельством возможных перепадов температур пренебрегают. Однако, характер зависимости вязкости жидкости от температуры является важным фактором, который во многом определяет закономерности течения [5].

В настоящей работе исследована устойчивость течения термовязких жидкостей с линейной и экспоненциальной зависимостями вязкости от температуры.

2. Постановка задачи об устойчивости течения термовязкой жидкости

Задача гидродинамической устойчивости течения термовязкой жидкости в плоскопараллельном канале с неоднородным температурным полем сводится к обобщенному уравнению Орра–Зоммерфельда [6–8]:

$$\begin{gathered}\mu_0\left[\varphi^{IV}-2k^2\varphi''+k^4\varphi\right]-ik\mathrm{Re}\Big[(u_0-c)\times\\ \times\left(\varphi''-k^2\varphi\right)-u_0''\varphi\Big]+2\mu_0'\left(\varphi'''-2k^2\varphi'\right)+\\ +\mu_0''\left(\varphi''+2k^2\varphi\right)=0,\end{gathered} \tag{1}$$

с граничными условиями:

$$\varphi(-1)=\varphi(1)=0,\quad \varphi'(-1)=\varphi'(1)=0, \tag{2}$$

где μ — вязкость; $\varphi(y)$ — амплитуда возмущения поперечной скорости; $u_0=u_0(y)$ — профиль скорости в невозмущенном состоянии; i — мнимая единица; $c=w/k$ — фазовая скорость волны вдоль оси канала (собственное значение); w — частота; k — проекция волнового вектора на ось канала (волновое число); Re — число Рейнольдса. При решении задачи в уравнениях и формулах вязкость представлена в безразмерном виде. В исходной математической модели размерность вязкости $[\mu]$ = Па·с.

Следует отметить, что вывод уравнения (1) осуществлялся при задании возмущений только на давление и компоненты вектора скорости.

Если считать течение изотермическим, то уравнение (1) упрощается и сводится к классическому уравнению Орра–Зоммерфельда.

При решении уравнения (1) обычно применяют временной подход, исследуя растущие возмущения с течением времени, т.е. задавая действительные значения k и считая фазовую скорость комплексной: $c=c_r+ic_i$ с неизвестными значениями c_r (вещественная часть), c_i (мнимая часть).

Таким образом, для решения задачи об устойчивости течения жидкости необходимо найти все собственные значения c, которым соответствуют нетривиальные собственные функции $\varphi(y)$. Тогда критерием неустойчивости, очевидно, будет условие $c_i>0$: если существует хотя бы одно собственное значение с положительной мнимой частью, то течение является неустойчивым при заданных числе Рейнольдса и волновом числе. Если же все собственные значения имеют неположительную мнимую часть, то течение устойчивое при заданных параметрах. Этот факт объясняется тем, что при существовании хотя бы одного собственного значения, мнимая часть которого отрицательна, возмущения в виде бегущей волны примут вид:

$$\begin{gathered}u(y)=\varphi(y)e^{ik(x-ct)}=\varphi(y)e^{ik(x-c_rt-ic_it)}=\\ =\varphi(y)e^{kc_it-ik(x-c_rt)}=\\ =\varphi(y)e^{kc_it}(\cos(k(x-c_rt))-i\sin(k(x-c_rt))).\end{gathered}$$

Отметим, что возмущения будут увеличиваться за счет быстрого роста множителя $e^{ik(x-ct)}$.

Заметим, что, если основной поток $u_0(y)$ является четной функцией $u_0(y)=ay^2+c$, то решения $\varphi(y)$ уравнения Орра–Зоммерфельда обладают свойством четности или нечетности. В случае, когда скорость основного потока $u_0(y)$ является нечетной функцией, вещественной на отрезке $y\in[-1;1]$: $u_0(y)=by$, $\mathrm{Im}(b)=0$, то собственные значения и функции также имеют определенную симметрию. Так, если имеется собственное значение λ_0 и соответствующая ему собственная функция $\varphi_0(y)$, то, используя комплексное сопряжение для уравнения Орра–Зоммерфельда, убеждаемся, что значение λ_1 и функция $\varphi_1(y)$:

$$\lambda_1=-\lambda_0^*,\quad \varphi_1(y)=\varphi_0^*(-y)$$

также являются собственными. Таким образом, в случае нечетности основного потока $u_0(y)$ собственные значения обладают симметрией относительно мнимой оси.

Условие $c_i=0$ дает нейтральную кривую, на которой возмущения не растут и не затухают. Минимальное значение числа Рейнольдса на нейтральной кривой называется критическим числом Рейнольдса Re_{cr}.

Согласно теории [9] рассматривается устойчивость течений жидкостей относительно возмущений поперечной скорости, так как они являются самыми «опасными» для турбулизации течения.

3. Методы и подходы, используемые для решения задачи

В настоящей работе применяется спектральный метод, использующий разложения по полиномам Чебышева первого рода. Решение задачи (1), (2) будем искать с помощью следующего разложения:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{N} z_n T_n(y), \quad -1 \leqslant y \leqslant 1, \tag{3}$$

где z_n — коэффициенты разложения собственных функций по полиномам Чебышева, а $T_n(y)$ являются полиномами Чебышева первого рода и могут быть определены с помощью рекуррентного соотношения:

$$\begin{gathered} T_0(y) = 1; \\ T_1(y) = y; \\ \ldots \\ T_{n+1}(y) = 2yT_n(y) - T_{n-1}(y), \end{gathered}$$

или в тригонометрической форме:

$$T_n(y) = \cos\left(n \cdot \arccos(y)\right) \quad (|y| \leqslant 1).$$

Найденную аналитически функцию профиля скорости течения в невозмущенном состоянии представим следующим рядом:

$$U(y) = \sum_{n=0}^{N} u_n T_n(y) \quad (-1 \leqslant y \leqslant 1), \tag{4}$$

и найдем соответствующие коэффициенты разложения u_n. Далее с помощью подстановки (3), (4) в систему уравнений (1), приравниваем коэффициенты при различных T_n и получаем уравнения для z_n:

$$\begin{gathered} \frac{1}{24}\mu \sum_{\substack{p\,=\,n+4 \\ p\,\equiv\,n(\mathrm{mod}2)}}^{N} \Big[p^3\left(p^2-4\right)^2 - 3n^2p^5 + \\ +3n^4p^3 - pn^2\left(n^2-4\right)^2\Big] z_p - \\ -\left(2k^2\mu - ik\mathrm{Re}\,c\right) \sum_{\substack{p\,=\,n+2 \\ p\,\equiv\,n(\mathrm{mod}2)}}^{N} p\left(p^2-n^2\right) z_p + \\ +\left(k^4\mu - ik\mathrm{Re}\,c\right) d_n z_n - \\ -\frac{1}{2}ik\mathrm{Re} \sum_{p=2}^{N} z_p \sum_{\substack{m\,\equiv\,p(\mathrm{mod}2) \\ |m|\,\leqslant\,p-2 \\ |n-m|\,\leqslant\,N}} p\left(p^2-n^2\right) \bar{u}_{n-m} - \\ -k^2 \sum_{\substack{|p|\,\leqslant\,N \\ |n-p|\,\leqslant\,N}} \bar{z}_p \bar{u}_{n-p} - \\ -\sum_{\substack{|p|\,\leqslant\,N \\ |n-p|\,\leqslant\,N}} \bar{z}_p \sum_{\substack{m\,\equiv\,|n-p|+2 \\ m+n\,\equiv\,p(\mathrm{mod}2)}} m\left(m^2-(n-p)^2\right) u_n = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

где $\bar{z}_p = d_{|p|} z_{|p|}$; $\bar{u}_p = d_{|p|} u_{|p|}$; $-N \leqslant p \leqslant N$; $d_0 = 2$; $d_p = 1$; $p > 0$; $p \equiv n(\mathrm{mod}2)$ означает, что $p - n$ кратно двум.

Также, применяя свойства полиномов Чебышева на концах отрезка $[-1;1]$:

$$T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n, \quad T_n'(\pm 1) = (\pm 1)^n n^2,$$

граничные условия (5) настоящей задачи при $y = -1$ и $y = 1$ можно переписать:

$$\sum_{\substack{n\,=\,0 \\ n\,\equiv\,0(\mathrm{mod}2)}}^{N} z_n = 0, \qquad \sum_{\substack{n\,=\,0 \\ n\,\equiv\,0(\mathrm{mod}2)}}^{N} n^2 z_n = 0, \tag{6}$$

$$\sum_{\substack{n\,=\,1 \\ n\,\equiv\,1(\mathrm{mod}2)}}^{N} n z_n = 0, \qquad \sum_{\substack{n\,=\,1 \\ n\,\equiv\,1(\mathrm{mod}2)}}^{N} n^2 z_n = 0. \tag{7}$$

Стоит отметить, что для течений с симметричным профилем достаточно рассматривать только четные z_n, $n = 0, 2, \ldots, N = 2M$ (условия (7) выполняются автоматически) и размерность системы уравнений (5) уменьшается в два раза.

Для того чтобы найти $M + 1$ неизвестных коэффициентов z_{2m}, $m = 0, 1, \ldots, M = N/2$ из $M + 3$ уравнений применяется τ-метод, заключающийся в откидывании последних двух уравнений ($m = M - 1, M$), тогда с граничными условиями (6) получаются $M + 1$ уравнение для $M + 1$ неизвестных z_{2m}, $m = 0, 1, \ldots, M - 1$. Таким образом из (5) получаем:

$$Az = cBz,$$

где z — вектор с неизвестными компонентами; A, B — матрицы размерности $(M+1) \times (M+1)$, которые можно записать следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 4 & 9 & \ldots & N^2 \\ 0 & 0 & a_{11} & \ldots & a_{1,M-1} \\ \ldots & & & & \\ 0 & 0 & a_{M-1,1} & \ldots & a_{M-1,M-1} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & \ldots & b_{1,M-1} \\ \ldots & & & & \\ 0 & 0 & b_{M-1,1} & \ldots & b_{M-1,M-1} \end{pmatrix}.$$

Первые две строчки матриц A и B были получены с помощью граничных условий (6), а элементы $a_{i,j}$ и $b_{i,j}$ — из уравнений (5). Матрица B является особенной из-за нулевых первых строк и появляются дополнительные сложности с поиском ее обращения. Поэтому алгебраическими преобразованиями матриц: обнулив вне диагональные элементы и нормируя диагональные элементы первых двух строк матрицы A, и применяя это преобразование одновременно к матрице B, можем избежать появления дополнительных трудностей:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{11} & \dots & \tilde{a}_{1,M-1} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{M-1,1} & \dots & \tilde{a}_{M-1,M-1} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{b}_{11} & \dots & \tilde{b}_{1,M-1} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \tilde{b}_{M-1,1} & \dots & \tilde{b}_{M-1,M-1} \end{pmatrix}.$$

Тогда собственные значения

$$\left(\tilde{A} - c\tilde{B}\right)\tilde{z} = 0, \tag{8}$$

где A и B — невырожденные матрицы. Далее, используя алгоритм QZ к уравнениям (8), находим искомые собственные значения. Для дальнейшего поиска собственных функций из вычисленных $\tilde{z}$ обратными преобразованиями найдем z.

4. Результаты численного моделирования и их анализ

4.1. Линейная зависимость вязкости от температуры

Рассмотрим зависимость вязкости жидкости от температуры:

$$\mu_L(T) = 1 - \alpha_L T,$$

где $\alpha_L < 0,5$ — параметр изменения вязкости; T — температура.

Спектральные картины собственных значений течения жидкостей с линейной температурной зависимостью вязкости при фиксированных параметрах числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = 10^4$ и волновом числе $k = 1$ представлены на рис. 1. Такие картины принято называть «спектральным галстуком». Анализ полученных результатов показывает, что при малых значениях параметра термовязкости спектр сопостави́м спектру для изотермического течения жидкости. Однако, при его увеличении количество собственных значений и их плотность возрастают, то есть существует большее количество точек, при которых задача имеет нетривиальное решение. Также стоит отметить, что при заданных Re и k для рассмотренных значений параметра термовязкости течение всегда является неустойчивым.

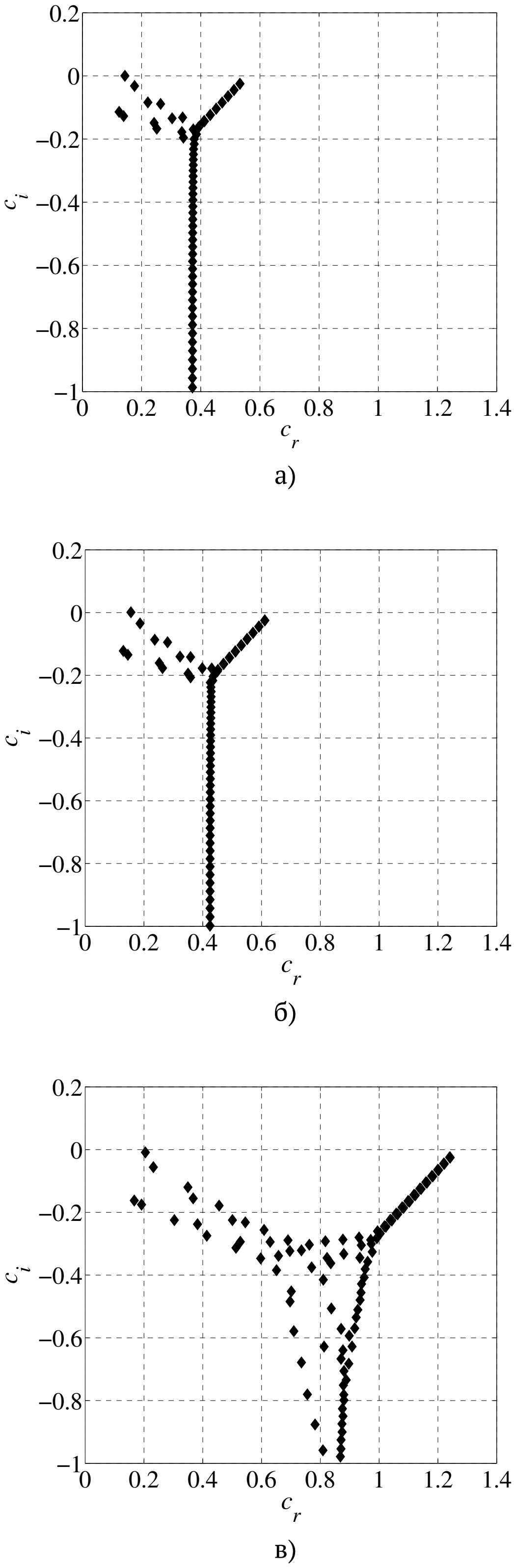

Рис. 1. Спектры собственных значений: а) $\alpha_L = 0.1$; б) $\alpha_L = 0.2$; в) $\alpha_L = 0.5$

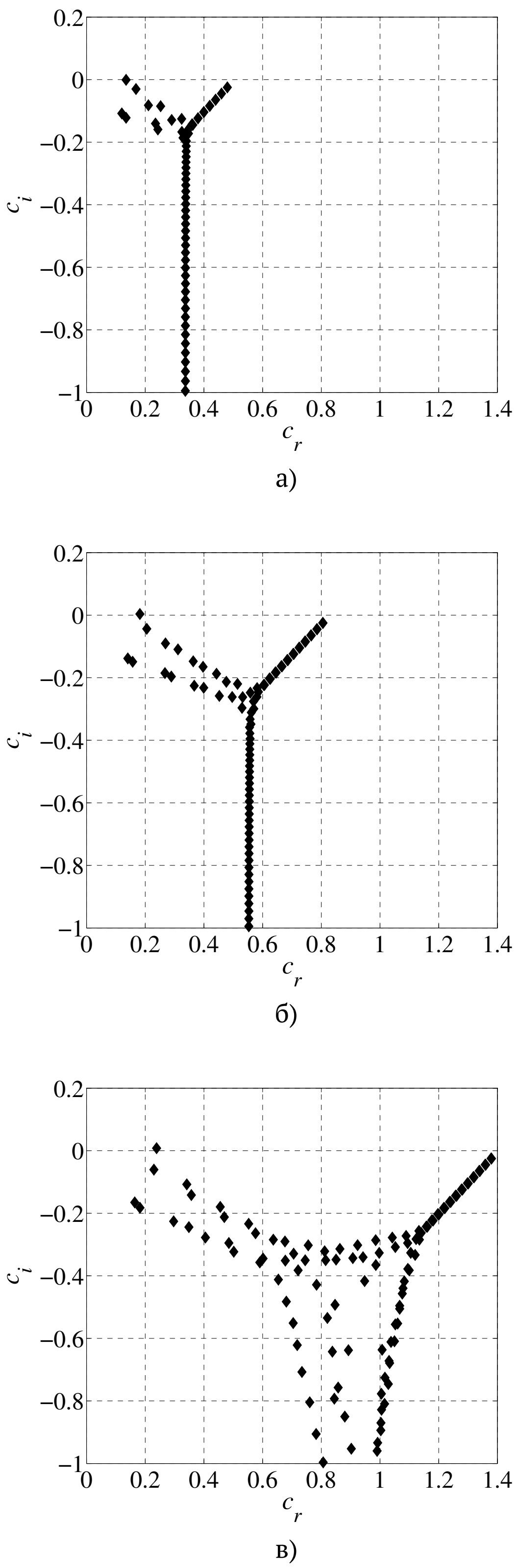

Рис. 2. Спектры собственных значений при $\mathrm{Re} = 10^4$, $k = 1$: а) $\alpha_L = 0.1$; б) $\alpha_L = 0.2$; в) $\alpha_L = 0.5$

4.2. Экспоненциальная зависимость вязкости от температуры

Рассмотрим течение жидкости с экспоненциальной температурной зависимостью вязкости:

$$\mu_E(T) = \exp(-\alpha_E T),$$

где $\alpha_E > 0$ — параметр термовязкости.

Спектры собственных значений течения жидкости с экспоненциальной температурной зависимостью вязкости для нескольких значений α_E представлены на рис. 2. По полученным результатам можно сделать вывод о том, что при выполненных предположениях спектр собственных значений для малых параметров α_E (рис. 2 (а), (б)) качественно соответствует спектру собственных значений изотермического течения жидкости. Собственные значения стремятся к оси вещественных частей, группируясь в вертикальную ветвь, а при приближении к нулевым мнимым частям — делятся на отдельные ветви. С увеличением значений параметра α_E спектр имеет значительные изменения: вертикальная ветвь начинает делиться на несколько отдельных ветвей (рис. 2 (в)). Стоит отметить, что существует собственное значение с мнимой частью большей нуля (рис. 2), а это соответствует неустойчивости течения при фиксированных параметрах волнового числа и числа Рейнольдса.

5. Заключение

Установлено, что учет зависимости вязкости от температуры значительно влияет на выводы относительно гидродинамической устойчивости, что, безусловно, важно при анализе режимов течения в каналах теплообменников. При одних и тех же значениях чисел Рейнольдса и волновых чисел, описывающих устойчивые режимы течения, увеличение параметра термовязкости может привести к возникновению неустойчивых режимов. Следует отметить, что при этом происходит и качественное изменение структуры спектров собственных значений. Спектральные характеристики течения являются важной частью при анализе режимов течения жидкостей.

Список литературы

[1] Petukhov B.S. Heat transfer and friction in turbulent pipe flow with variable physical properties // Advances in Heat Transfer 6. 1970. Pp. 503–564.
DOI: 10.1016/S0065-2717(08)70153-9

[2] Orszag S.A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld equation // J. of Fluid Mech. 50. 1971. Pp. 689–703.
DOI: 10.1017/S0022112071002842

[3] Шкаликов А.А. Спектральные портреты оператора Орра–Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса // Труды международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям — сателлита Международного конгресса математиков ICM-2002 (Москва, МАИ, 11–17 августа 2002). Часть 3. СМФН. 2003. Т. 3. С. 89–112.
http://mi.mathnet.ru/cmfd17

[4] Скороходов С.Л. Численный анализ спектра задачи Орра–Зоммерфельда // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47, № 10. С. 1672–1691.
http://mi.mathnet.ru/zvmmf229

[5] Урманчеев С.Ф., Киреев В.Н. Установившееся течение жидкости с температурной аномалией вязкости // Доклады академии наук. 2004. Т. 396, № 2. С. 204–207.
https://elibrary.ru/item.asp?id=17352428

[6] Низамова А.Д. Влияние температурной зависимости вязкости на устойчивость плоскопараллельного течения жидкости // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2014. Вып. 10. С. 90–94.
DOI: 10.21662/uim2014.1.017

[7] Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчеев С.Ф. О влиянии зависимости вязкости от температуры на устойчивость течения жидкости // Известия УНЦ РАН. 2014. № 4. С. 12–16.
https://elibrary.ru/item.asp?id=24326737

[8] Киреев В.Н., Низамова А.Д., Урманчеев С.Ф. Некоторые особенности гидродинамической неустойчивости течения термовязкой жидкости в плоском канале // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83, № 3. С. 454–459.
DOI: 10.1134/S003282351903007X

[9] Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука. 1977. 421 с.

ISSN 2658–5782 14 (2019), 1, 52–58

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2019.1.007
DOI: 10.21662/mfs2019.1.007

Received: 2.04.2019
Accepted: 14.05.2019

Influence of viscosity temperature dependence on the spectral characteristics of the thermoviscous liquids flow stability equation

Nizamova A.D.*, **Kireev V.N.****, **Urmancheev S.F.***

*Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia
**Bashkir State University, Ufa, Russia

The flow of a viscous model fluid in a flat channel with a non-uniform temperature field is considered. The problem of the stability of a thermoviscous fluid is solved on the basis of the derived generalized Orr-Sommerfeld equation by the spectral decomposition method in Chebyshev polynomials. The effect of taking into account the linear and exponential dependences of the fluid viscosity on temperature on the spectral characteristics of the hydrodynamic stability equation for an incompressible fluid in a flat channel with given different wall temperatures is investigated. Analytically obtained profiles of the flow rate of a thermovisible fluid. The spectral pictures of the eigenvalues of the generalized Orr-Sommerfeld equation are constructed. It is shown that the structure of the spectra largely depends on the properties of the liquid, which are determined by the viscosity functional dependence index. It has been established that for small values of the thermoviscosity parameter the spectrum compares the spectrum for isothermal fluid flow, however, as it increases, the number of eigenvalues and their density increase, that is, there are more points at which the problem has a nontrivial solution. The stability of the flow of a thermoviscous fluid depends on the presence of an eigenvalue with a positive imaginary part among the entire set of eigenvalues found with fixed Reynolds number and wavenumber parameters. It is shown that with a fixed Reynolds number and a wave number with an increase in the thermoviscosity parameter, the flow becomes unstable. The spectral characteristics determine the structure of the eigenfunctions and the critical parameters of the flow of a thermally viscous fluid. The eigenfunctions constructed in the subsequent works show the behavior of transverse-velocity perturbations, their possible growth or decay over time.

Keywords: thermoviscous liquid, spectra of eigenvalues, hydrodynamics instability

References

[1] Petukhov B.S. Heat transfer and friction in turbulent pipe flow with variable physical properties // Advances in Heat Transfer 6. 1970. Pp. 503–564.
DOI: 10.1016/S0065-2717(08)70153-9

[2] Orszag S.A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld equation // J. of Fluid Mech. 50. 1971. Pp. 689–703.
DOI: 10.1017/S0022112071002842

[3] Shkalikov A.A. Spectral portraits of the Orr–Sommerfeld operator for large Reynolds numbers // Journal of Mathematical Sciences. 2004. Vol. 124(6). Pp. 5417–5441.
DOI: 10.1023/B:JOTH.0000047362.09147.c7

[4] Skorohodov S.L. Numerical analysis of the spectrum of the Orr–Sommerfeld problem // Computational mathematics and mathematical physics. 2007. Vol. 47. Issue 10. Pp. 1603–1621.
DOI: 10.1134/S096554250710003X

[5] Urmancheev S.F., Kireev V.N. Steady flow of a fluid with an anomalous temperature dependence of viscosity, Doklady Physics. 2004. V. 49, № 5. Pp. 328–331.
DOI: 10.1134/1.1763627

[6] Nizamova A.D.[Influence of the temperature dependence of viscosity on the stability of plane-parallel fluid flow] Trudy Instituta mexaniki im. R.R. Mavlutov URC RAS. 2014. № 10. P. 90–94 (in Russian).
DOI: 10.21662/uim2014.1.017

[7] Nizamova A.D., Kiree V.N., Urmancheev S.F. [Influence of temperature dependence of viscosity on fluid flow stability] Izvestiya URC RAS. 2014. № 4. Pp. 12–16 (in Russian).
https://elibrary.ru/item.asp?id=24326737

[8] Kireev V.N., Nizamova A.D., Urmancheev S.F. [Some features of the hydrodynamic instability of the flow of a thermally viscous fluid in a flat channel] Prikladnaya mexanika i matematika. 2019. Vol. 83, № 3. Pp. 454–459 (in Russian).
DOI: 10.1134/S003282351903007X

[9] Gol'dshtik M.A., Shtern V.N. [Hydrodynamic stability and turbulence] Novosibirsk: Nauka. 1977. 421 p. (in Russian).