ISSN: 2658–5782

Номер 2 Апрель–Июнь 2019

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org

ИМех
им. Р.Р. Мавлютова

ISSN 2658–5782 Том 14 (2019), № 2, с. 115–124

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2019.2.016
DOI: 10.21662/mfs2019.2.016
УДК 534.26

Получена: 19.06.2019
Принята: 18.12.2019

Численное моделирование акустического рассеяния от коаксиальных звукопроницаемых сфер[1]

Насибуллаева Э.Ш.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В настоящей работе представлена обобщенная математическая модель и проведены численные исследования задачи акустического рассеяния от множества сфер на случай сфер, сквозь поверхность которых проходит волна и центры которых расположены на одной оси (на случай звукопроницаемых и коаксиальных сфер), при прохождении сферической волны от монопольного источника излучения, произвольно расположенного в пространстве. При решении уравнений Гельмгольца для данной задачи адаптирована численная техника, основанная на быстром методе мультиполей, которая позволяет достичь высокой точности получаемых результатов при минимальных затратах машинного времени. Сравнение различных подходов к усечению бесконечных рядов в разложении показало следующее: результат с хорошей степенью точности с помощью одного расчета дает подход, основанный на усечении всех рядов при фиксированном числе в каждом разложении, а при необходимости получения результата с определенной степенью точности — подход, основанный на сравнении двух последовательных значений суммы ряда. Проведен численный параметрический анализ распределения давления внутри и вне сфер для различных значений их радиусов, физических характеристик внешней и внутренней сред, числа сфер, расстояний между центрами сфер, частоты воздействия и расположения монопольного источника излучения. Показано, что при определенных значениях параметров возможно появление зон понижения или повышения давления за звукопроницаемыми сферами. Полученные результаты позволят в дальнейшем проводить тестовые расчеты для верификации общего численного алгоритма для случая множества произвольно расположенных в пространстве сфер.

Ключевые слова: акустическое рассеяние, звукопроницаемая сфера, монопольный источник излучения, число усечения ряда

1. Введение

При взаимодействии акустической волны с препятствиями малых размеров, отличающихся плотностью и/или сжимаемостью от основной среды, появляются дополнительные (рассеянные) волны, распространяющиеся во все стороны от препятствий. Данное явление называют рассеянием (дифракцией) звука и его изучение является одной из важнейших задач акустики, поскольку на нем основываются многие практические применения акустических волн, такие как гидролокация, приборы неразрушающего контроля, медицинские сканеры, зондирования атмосферы и океана и т.п. Поэтому задача акустического рассеяния от препятствий малых размеров при внешних воздействиях является актуальной. Цель настоящей работы — исследование рассеяния акустической волны от звукопроницаемых сфер (сфер, через границу которых может проходить волна) с центрами, расположенными на одной оси, при наличии монопольного источника излучения.

Настоящая работа обобщает математическую модель, представленную в работе [1], где рассмотрен случай пары звуконепроницаемых сфер (т.е. случай твердых сфер) с произвольным акустиче-

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке средств государственного бюджета по госзаданию № 0246-2019-0052, РФФИ (грант № 17-41-020582-р_а) и АН РБ (договор № 40/9).

© Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН
© Насибуллаева Э.Ш.

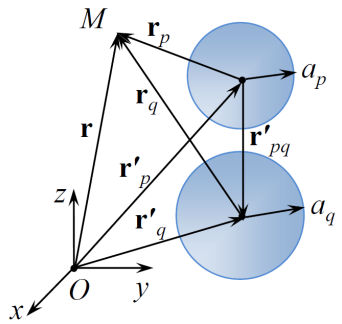

Рис. 1. Обозначения в разных системах отсчета для коаксиальных сфер

ским импедансом произвольно расположенных в пространстве при воздействии монопольного источника излучения. Также обобщена методика расчета [2], основанная на быстром методе мультиполей, которая позволяет достичь высокой точности получаемых результатов и минимизировать машинное время.

2. Постановка задачи и основные уравнения

Рассматриваются N сфер различных радиусов a_1, a_2, …, a_N с центрами в координатах $\mathbf{r}'_p = (x'_p, y'_p, z'_p)$ ($p = \overline{1,N}$), расположенных в бесконечном трехмерном пространстве, которое заполнено однородной идеальной средой, характеризующейся плотностью ρ_0 и скоростью звука c_0 (см. рис. 1). Предполагается, что центры сфер неподвижны и находятся на одной оси (случай коаксиальных сфер); сами сферы звукопроницаемы и волна внутри них распространяется в другой однородной идеальной среде с плотностью ρ_p и скоростью звука c_p; радиальное движение сферической поверхности отсутствует, т.е. сферическая поверхность является неподвижной. Таким образом, в данной постановке рассматриваются только рассеянные от внешнего источника излучения волны на сферических препятствиях, через поверхность которых волна может проходить.

Задача рассеяния звука от звукопроницаемых сфер сводится к решению уравнения Гельмгольца для комплексного потенциала $\psi(\mathbf{r})$ в произвольной точке $\mathbf{r}$ [3, 4]:

$$\nabla^2\psi + k_0^2\psi = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями, выражающими равенства потенциала и нормальных составляющих скорости частиц на поверхности p-й сферы $S_p = \{\mathbf{r} : |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p| = a_p\}$, сквозь которую проходит волна:

$$\begin{gathered}(\psi(\mathbf{r}) - \psi_p^{\text{int}})|_{S_p} = 0,\\ \left(\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{\rho_p}\frac{\partial\psi_p^{\text{int}}}{\partial r}\right)\Bigg|_{S_p} = 0, \quad p = \overline{1,N}.\end{gathered} \tag{2}$$

В формулах (1) и (2) k_0 — волновое число для внешней среды; ψ_p^{int} — комплексный потенциал внутри p-й сферы, который также удовлетворяет уравнению Гельмгольца, но с волновым числом k_p для среды внутри этой сферы:

$$\nabla^2\psi_p^{\text{int}} + k_p^2\psi_p^{\text{int}} = 0.$$

При решении данной задачи потенциал внешнего поля представляется в форме

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) + \psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}),$$

где $\psi_{\text{in}}(\mathbf{r})$ — потенциал падающего поля; $\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r})$ — потенциал поля рассеяния, который должен удовлетворять условию излучения Зоммерфельда, соответствующему уходящим на бесконечность волнам (данное условие выделяет единственное решение уравнения (1) в классе обобщенных функций в неограниченной области):

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial\psi_{\text{scat}}}{\partial r} - ik_0\psi_{\text{scat}}\right) = 0, \tag{3}$$

где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

Для решения уравнения Гельмгольца (1) с граничными условиями (2) была обобщена численная техника [2], разработанная для случая звуконепроницаемых сфер с произвольным комплексным сопротивлением. Данная техника основана на быстром методе мультиполей и позволяет достичь высокой точности получаемых результатов при минимальных затратах машинного времени. Если в качестве оси Oz выбрать ось с центрами этих сфер, то задача становится осесимметричной и, без ограничения общности задачи, можно выбрать начало отсчета в центре 1-ой сферы, а в качестве плоскости Oyz взять плоскость, содержащую ось Oz и монопольный источник излучения.

Далее вводятся системы отсчета, связанные с центрами сфер, и осуществляется переход к сферической системе координат $\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p = \mathbf{r}_p = (r_p, \theta_p, \varphi_p)$ ($p = \overline{1,N}$). На рис. 1 схематично представлены обозначения, используемые при разложении. Тогда разложение потенциала рассеянного поля может быть представлено в форме

$$\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}) = \sum_{p=1}^{N} \psi_p(\mathbf{r}) = \\ = \sum_{p=1}^{N} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} A_n^{(p)m} S_n^m(\mathbf{r}_p),$$

где $\psi_p(\mathbf{r})$ — потенциал поля рассеяния, вызванного p-й сферой, но с учетом влияния всех остальных сфер (является регулярным вне p-й сферы и удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда (3)); $A_n^{(p)m}$ — неизвестные коэффициенты разложения по мультиполям; $S_n^m(\mathbf{r}_p) = h_n(kr_p)Y_n^m(\theta_p, \varphi_p)$ — мультиполь порядка n и степени m; $h_n(kr)$ — сферические функции Ханкеля 1-го типа, удовлетворяющие условию Зоммерфельда; $Y_n^m(\theta, \varphi)$ — ортогональные сферические гармоники.

Разложение потенциала падающего поля около $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_p$ в ряд регулярных фундаментальных решений будет иметь вид:

$$\psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} C_n^{(\text{in})m}(\mathbf{r}'_p) R_n^m(\mathbf{r}_p), \qquad (4)$$

где $C_n^{(\text{in})m}(\mathbf{r}'_p)$ — коэффициенты разложения; $R_n^m(\mathbf{r}_p) = j_n(kr_p)Y_n^m(\theta_p, \varphi_p)$ — регулярные фундаментальные решения уравнения Гельмгольца в сферических координатах, связанные с p-й сферой; $j_n(kr)$ — сферические функции Бесселя 1-го типа.

Разложение потенциала поля внутри p-й сферы имеет следующий вид:

$$\psi_p^{\text{int}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} E_n^{(p)m} j_n(k_p r_p) Y_n^m(\theta_p, \varphi_p),$$

где $E_n^{(p)m}$ — неизвестные коэффициенты.

Вид специальных функций $h_n(z)$, $j_n(z)$, $Y_n^m(\theta, \varphi)$ известен и представлен, например, в справочнике [5].

На следующем этапе проводится повторное разложение по мультиполям. Для этого берется q-я сфера и около нее ($|\mathbf{r}_q| \leqslant |\mathbf{r}'_p - \mathbf{r}'_q|$, где $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_q$ — центр сферы) мультиполи $S_n^m(\mathbf{r})$ ($p \neq q$) разлагаются повторно в ряд регулярных фундаментальных решений:

$$S_n^m(\mathbf{r}_p) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^{l} (S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{pq}) R_l^s(\mathbf{r}_q)$$

($p, q = \overline{1, N}$; $p \neq q$). Здесь $(S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{pq})$ — коэффициенты перехода при повторном разложении. Поскольку задача является осесимметричной, последнюю формулу можно упростить. Так как коэффициенты повторного разложения в этом случае будут зависеть только от относительного расположения центров сфер, а не от углов, то получим следующее выражение

$$S_n^m(\mathbf{r}_p) = \sum_{l=|m|}^{\infty} (S|R)_{ln}^m(r'_{pq}) j_l(kr_q) Y_l^m(\theta_q, \varphi_q)$$

($p, q = \overline{1, N}$; $p \neq q$), где коэффициенты повторного разложения определяются как

$$(S|R)_{ln}^m(r'_{pq}) = (S|R)_{ln}^{mm}(\mathbf{r}'_{pq})$$

($l, n = 0, 1, \ldots$; $m = -n, \ldots, n$) и для них имеют место следующие равенства

$$(S|R)_{ln}^m(r'_{pq}) = (-1)^{l+n}(S|R)_{ln}^m(r'_{qp})$$

($l, n = 0, 1, \ldots$; $m = -n, \ldots, n$).

После представленных выше разложений потенциал подставляется в граничные условия (2) и в результате некоторых преобразований задача сводится к системе линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов $A_n^{(q)m}$. В случае осевой симметрии данная система может быть представлена в виде $2m + 1$ независимых линейных систем (для каждого m) в матричном виде:

$$\mathbf{L}^m \mathbf{A}^m = \mathbf{D}^m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где матрицы и вектора представляются как

$$\mathbf{L}^m = \{\mathbf{L}^{(qp)m}\}, \ \mathbf{A}^m = \{\mathbf{A}^{(q)m}\}, \ \mathbf{D}^m = \{\mathbf{D}^{(q)m}\}$$

($q, p = \overline{1, N}$), элементы которых, в свою очередь, скомпонованы следующим образом:

$$\mathbf{L}^{(qp)m} = \{L_{ln}^{(qp)m}\}, \ \mathbf{A}^{(q)m} = \{A_n^{(q)m}\}^{\mathrm{T}}, \ \mathbf{D}^{(q)m} = \{D_n^{(q)m}\}^{\mathrm{T}}$$

($p, q = \overline{1, N}$; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $l, n = |m|, |m + 1|, \ldots$). Элементы матриц вычисляются по следующим формулам:

$$L_{ln}^{(qp)m} = \begin{cases} B_l (S|R)_{ln}^m(r'_{pq}), & p \neq q \\ \delta_{ln}, & p = q; \end{cases}$$

$$D_l^{(q)m} = -B_l C_l^{(\text{in})m}(\mathbf{r}'_q),$$

где введено следующее обозначение

$$B_l = \frac{j_l(k_0 a_q) j'_l(k_q a_q) - \kappa_q j'_l(k_0 a_q) j_l(k_q a_q)}{h_l(k_0 a_q) j'_l(k_q a_q) - \kappa_q h'_l(k_0 a_q) j_l(k_q a_q)}$$

с введенным параметром $\kappa_q = \dfrac{k_0/k_q}{\rho_0/\rho_q}$. В последних формулах знак «T» — знак транспонирования; δ_{ln} — символ Кронекера.

Осесимметричные коэффициенты $(S|R)^m_{l|m|}$ достаточно вычислить для $l \geqslant n \geqslant m \geqslant 0$ благодаря соотношению симметрии:

$$(S|R)^m_{ln} = (S|R)^{-m}_{ln}, \quad m = 0, 1, \ldots$$

Процесс заполнения матрицы $\{(S|R)^m_{l|m|}\}$ является трудоемким и представлен в работе [6].

В случае монопольного источника излучения, расположенного в некоторой точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_s$, падающее поле, соответствующее фундаментальному решению уравнения Гельмгольца, определяется по формуле

$$\psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) = -V_0 \frac{e^{ik_0|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|}, \tag{5}$$

где V_0 — амплитуда объемной скорости (или производительность) монопольного источника. Здесь и далее опускается временной множитель $e^{-i\omega t}$, где $\omega = k_0 c_0$ — угловая частота внешнего поля. Положение монопольного источника задается расстоянием от него до центра 1-й сферы $d = |r_s - r'_1| = |r_s|$ и углом между осью Oz и вектором r_s — $\theta_{r_s - r'_q} = \theta_s$; угол $\varphi_{r_s - r'_q}$ будет равен $\pi/2$ или $-\pi/2$.

Разложение функции (5) около центра q-й сферы $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_q$ может быть определено как (см., например, [2])

$$\psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) = -V_0 i k_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} S_n^{-m}(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_q) R_n^m(\mathbf{r}_q),$$

($|\mathbf{r}_q| \leqslant |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_q|$). Сравнивая последнее выражение с разложением (4), получим

$$C_n^{(\text{in})m}(\mathbf{r}'_q) = -V_0 i k_0 S_n^{-m}(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_q) =$$
$$= -V_0 i k_0 h_n(k_0|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_q|) Y_n^{-m}(\theta_{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_q}, \varphi_{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_q}).$$

Граничное значение потенциала ψ на поверхности q-й сферы примет следующий вид:

$$\psi|_{S_q} = \frac{i\kappa_q}{(ka_q)^2} \times$$
$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{j_n(k_q a_q) A_n^{(q)m} Y_n^m(\theta_q, \varphi_q)}{j_n(ka_q) j'_n(k_q a_q) - \kappa_q j'_n(ka_q) j_n(k_q a_q)}.$$

Для дальнейшей работы введем следующие функции.

Переходная функция H_1, измеренная в децибелах, определяется по формуле

$$H_1 = 20 \lg \left| \frac{\psi|_{S_q}}{\psi_{\text{in}}(\mathbf{r}'_q)} \right| \tag{6}$$

и представляет собой отношение амплитуды акустического поля при особом расположении поверхности S_q q-ой сферы к амплитуде падающего поля в центре этой сферы. Функция модуля нормированного давления в произвольной точке $\mathbf{r}$ задается как

$$H_2 = \left| \frac{p(\mathbf{r})}{p_{\text{in}}(\mathbf{r})} \right| = \begin{cases} \left| \dfrac{\psi}{\psi_{\text{in}}} \right|, & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p| > a_p, \\ \left| \dfrac{\psi_p^{\text{int}}}{\psi_{\text{in}}} \right|, & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_p| < a_p, \end{cases} \tag{7}$$

поскольку связь между акустическим давлением и потенциалом определяется следующим образом:

$$p = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = i\omega\rho_0\psi,$$

следовательно, значения для давлений среды $p(\mathbf{r})$ и падающего поля $p_{\text{in}}(\mathbf{r})$ в произвольной точке пространства $\mathbf{r}$ можно вычислять с помощью соответствующих формул для потенциалов с точностью до постоянной $i\omega\rho_0$.

3. Число усечения

При применении техники разложения по мультиполям важным является вопрос правильного выбора числа усечения M бесконечных рядов (см. рис. 2): при малом числе M точность расчетов будет низкой, а при большом — возрастет не только точность, но и время расчета. Выделяется два подхода к определению числа усечения:

- усечение рядов основывается на сравнении двух последовательных значений суммы ряда (при $m = M$ и $m = M + 1$) — как только их разность становится меньше некоторого значения ε, дальнейший расчет суммы ряда прекращается и принимается значение при $m = M$ [7] (подход I);
- происходит усечение всех рядов при фиксированном числе M в каждом разложении (подход II).

При подходе II существуют две формулы для расчета числа усечения M:

$$M = \left[k_0 a_p + \left(\ln\left(2\sqrt{2} k_0 a_p \epsilon^{-1}\right)^{\frac{2}{3}} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \ (k_0 a_p)^{\frac{1}{3}} / (2\sqrt{2}) + 1 \right) \right], \tag{8}$$

вывод которой представлен, например, в работах [8] (для одиночного рассеяния) и [9] (для множественного рассеяния), и эвристические формулы

$$M = \begin{cases} \left[e k_0 r'_{pq} \right] \text{ для малых } k_0 r'_{pq}, \\ \left[\dfrac{1}{2} e k_0 r'_{pq} \right] \text{ для больших } k_0 r'_{pq}, \end{cases} \tag{9}$$

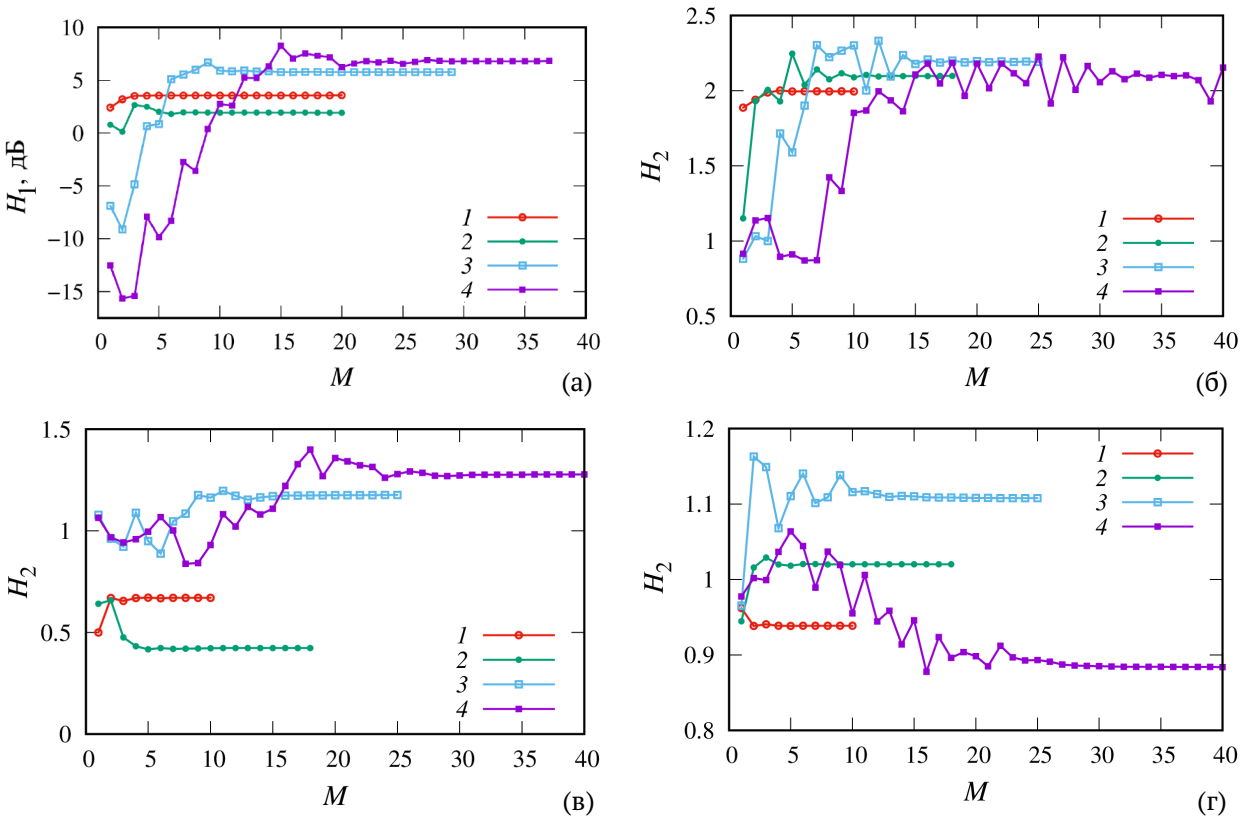

Рис. 2. Зависимости вычисленных значений функций H_1 или H_2 для двух капель воды в воздухе от числа усечения M для различных частот монопольного источника излучения (*1* — $f = 100$ кГц, *2* — $f = 200$ кГц, *3* — $f = 500$ кГц, *4* — $f = 1$ МГц) в различных точках пространства: на поверхности 1-ой сферы в сферических координатах $\varphi = 0°$ и $\theta = 60°$ (а); в декартовых координатах, относительно 1-ой сферы, $\mathbf{r}/a_1 = (0,0,0)$ (б); $\mathbf{r}/a_1 = (0,-1.5,-1.5)$ (в); $\mathbf{r}/a_1 = (0,2,1.5)$ (г)

представленные в работе [2]. В последних двух формулах $[z]$ — целая часть числа z; ϵ — искомая ошибка, связанная с коэффициентами Фурье; e — число Эйлера.

На рис. 2 представлена зависимость функции H_1 или H_2 от числа усечения M для случая двух капель воды в воздухе радиусов $a_1 = 585$ мкм и $a_2 = 1.5a_1$ для различных значений частот f (соответственно, различных значений волнового радиуса ka_1) и монопольного источника излучения, расположенного на одной оси с центрами сфер на расстоянии $d = 10a_1$ от центра 1-ой сферы. На рис. 2(а) показаны результаты для переходной функции H_1, вычисленной по формуле (6) в точке на поверхности 1-ой сферы ($q = 1$) со сферическими координатами $\varphi = 0°$ и $\theta = 60°$, а на рис. 2(б)–(г) — для функции H_2, вычисленной по формуле (7) в точках пространства, имеющих в системе отсчета, связанной с 1-ой сферой, декартовы координаты $(0,0,0)$ (т.е. в центре 1-ой сферы), $(0,-1.5a_1,-1.5a_1)$, $(0,2a_1,1.5a_1)$ соответственно.

Заметим, что на рис. 2(б) для $f = 1$ МГц при значениях $M > 38$ происходит резкий рост значений функции. Как было отмечено в работе [2], для некоторых чисел усечения при превышении значения M, определенного уравнением (9), могут возникнуть трудности, связанные с экспоненциальным ростом части членов в разложении, приводя к переполнению относительных ошибок. Объясняется это наличием сферических функций Ханкеля большого порядка $h_n(k_0 r'_{pq})$, входящих в матрицу переразложения системы, причем асимптотическое разложение этих функций при больших n и фиксированных $k_0 r'_{pq}$ показывает, что рост начинается при $n \approx ek_0 r'_{pq}/2$, поэтому данное значение и легло в основу формулы (9). Таким образом, при возникновении данных трудностей необходимо экспериментально проверять результаты — по нескольким расчетам определять значение искомой функции до момента накопления ошибок расчета.

Таблица 1. Сравнение значений числа M, полученных с помощью различных подходов, для различных частот f внешнего поля

f, **кГц**	M_G	M_{Am}	M_a	M_b	M_c	M_d
100	6	5	6	7	7	4
200	14	8	14	15	11	6
500	18	15	19	24	16	16
1000	36	20	31	36*	31	28

Рассмотрим значения числа M, полученные с помощью разных подходов. В табл. 1 для наглядности представлены следующие расчетные значения данной величины: M_G и M_{Am} определяются с помощью подхода II по формулам (9) и (8) (при $\epsilon = 10^{-8}$) соответственно; M_a, M_b, M_c и M_d — с помощью подхода I при относительной погрешности между последовательными расчетами $\varepsilon = 10^{-3}$ (для значения, отмеченного знаком «*» $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-3}$) в точках пространства, данные для которых представлены на рис. 2(а)–(г) соответственно. Отметим, что для частот $f = 100, 200, 500, 1000$ кГц значения $k_0 r'_{12}$, которые необходимы для корректного расчета по формуле (9), соответственно равны $k_0 r'_{12} \approx 1.07, 2.14, 3.35, 10.71$.

Анализ полученных данных показывает, что если необходимо получить значение искомой функции с помощью одного расчета с хорошей степенью точностью, то достаточно применения подхода II с формулой (9), поскольку формула (8) даже при $\epsilon = 10^{-8}$ дает более грубый результат (в приведенном примере точность $\varepsilon = 10^{-3}$ не достигается даже для точек поверхности). Если же данные должны быть получены с определенной степенью точности, то необходимо применять подход I, однако расчеты можно начинать не с $M = 1$, а с величины $M = \min(M_G, M_{Am})$. Для предотвращения случая накопления ошибок, описанного выше, необходимо контролировать результат при значениях $M > M_G$ — решение для точки определяется в момент его стабилизации до начала экспоненциального роста, даже если заданная точность не достигается. Так, например, для случая, представленного на рис. 2(б) при $f = 1$ МГц, значение M может быть определено равным 36 (при $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-3}$), поскольку к этому моменту решение начало стабилизироваться, но до достижения заданной точности ($\varepsilon = 10^{-3}$) начинается экспоненциальный рост (при $M > 38$).

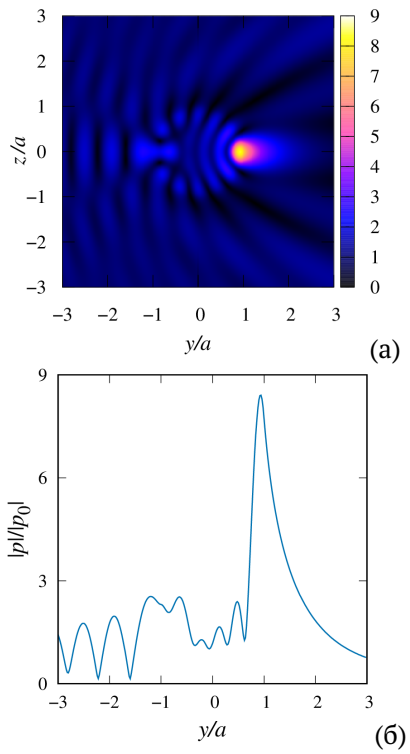

Рис. 3. Диаграмма распределения (а) и график (б) для нормированной амплитуды давления снаружи и внутри сферы: $\rho_0 = 10^3$ кг/м^3, $c_0 = 1.5 \cdot 10^3$ м/с, $\rho_1 = 1.1\rho_0$, $c_1 = 0.95c_0$, $a/\lambda = a/(c_0/f) = 0.9$. Качественное сравнение с данными, приведенными в книге [4, рис. 8.10]

4. Численные результаты

В результате численного моделирования были написаны программные коды на языке Fortran 90. Для вычисления специальных функций и их производных $h_l(z)$, $h'_l(z)$, $j_l(z)$, $P_l(z)$ были адаптированы программные коды [10], написанные на языке Fortran 77.

В предыдущей работе автора [1] было проведено сравнение результатов расчета для звуконепроницаемой сферы с теоретическими и экспериметальными данными работы [7] и получено хорошее соответствие (максимальная относительная погрешность теоретических данных составляет не более 10^{-2}%). В работе [11] сравнивались результаты расчетов, полученные для одиночной звукопроницаемой сферы, с экспериментальными данными работы [12] и также получено хорошее соответствие (максимальная относительная погрешность теоретических данных — не более 0.42%). На рис. 3 представлены результаты тестовых расчетов (значения физических и геометрических параметров системы приведены в подписи к рисунку) нормированного распределения давления вне и

внутри звукопроницаемой сферы для плоской падающей волны для сравнения с теоретическими данными, полученными в книге [4] и приведенными на рис. 8.10 данной работы; получено хорошее качественное согласование. Тестирование алгоритма аналогичного представленному в настоящей работе для случая двух звуконепроницаемых сфер (частный случай коаксиальных сфер при $N = 2$) при наличии монопольного источника излучения было проведено в работе [6], которое показало хорошее соответствие с результатами расчетов, представленных в работе [2]. Таким образом, тестовые расчеты, проведенные для случаев, которые представлены в аналогичных теоретических и экспериментальных (для одиночной сферы) работах, показывают корректность полученных по представленной методике данных.

Проведен численный параметрический анализ распределения давления внутри и вне коаксиальных сфер для различных значений их радиусов, физических характеристик рабочей жидкости (плотность и скорость звука), числа сфер, расстояний между их центрами, расположения (относительно фиксированной сферы) монопольного источника излучения.

На рис. 4(а),(б) и 5 представлены диаграммы распределения модуля нормированного давления вокруг и внутри сфер в плоскости Oyz ($x = 0$) с началом в центре 1-ой сферы и осью Oz (осью, на которой расположены центры данных сфер). Сами оси Oy и Oz на данных рисунках изображены белыми прямыми линиями.

На рис. 4 представлено распределение нормированного давления H_2 для двух воздушных пузырьков в воде (рис. 4(а)) и двух капель воды в воздухе (рис. 4(б)) при излучении от монопольного источника с радиус-вектором $\mathbf{r}_s = (10a_1, \pi/2, \pi/2)$, т.е. расположенного на оси Oy справа от 1-ой сферы. На рис. 4(в) показана нормированная амплитуда давления вдоль оси Oy: сплошная линия соответствует случаю, представленному на рис. 4(а), а штриховая — рис. 4(б). Расчеты были выполнены для следующих значений параметров системы: $a_1 = 585$ мкм, $a_2 = 1.5a_1$, $f = 20$ кГц, расстояние между центрами сфер $r'_{12} = 1.5a_1 + a_2$ (случай не соприкасающихся сфер).

На рис. 5 представлены три диаграммы распределения модуля нормированного давления для трех звукопроницаемых соприкасающихся сфер радиусов $a_1 = 585$ мкм, $a_2 = a_3 = 1.5a_1$ при различных значениях физических параметров окружающей (вода с $\rho_0 = 998$ кг/м^3 и $c_0 = 1484$ м/с или дихлорэтан с $\rho_0 = 1253$ кг/м^3 и $c_0 = 1034$ м/с) и внутренней (воздух с $\rho_p = 1.205$ кг/м^3 и $c_p = 343$ м/с или вода) сред и частоты $f = 200$ кГц монопольного источника, расположенного на расстоянии $d = 10a_1$ от центра 1-ой сферы на оси, соединяющей центры этих сфер. Отметим, что у дихлорэтана плотность больше, а скорость звука меньше, чем в воде. Поскольку плотность воздуха много меньше плотности окружающей его жидкости, то воздушный пузырек в воде вне резонанса близок к мягкой твердой сфере, поэтому давление внутри него близко к нулевому (см. рис. 4(а) и (в) — сплошная линия).

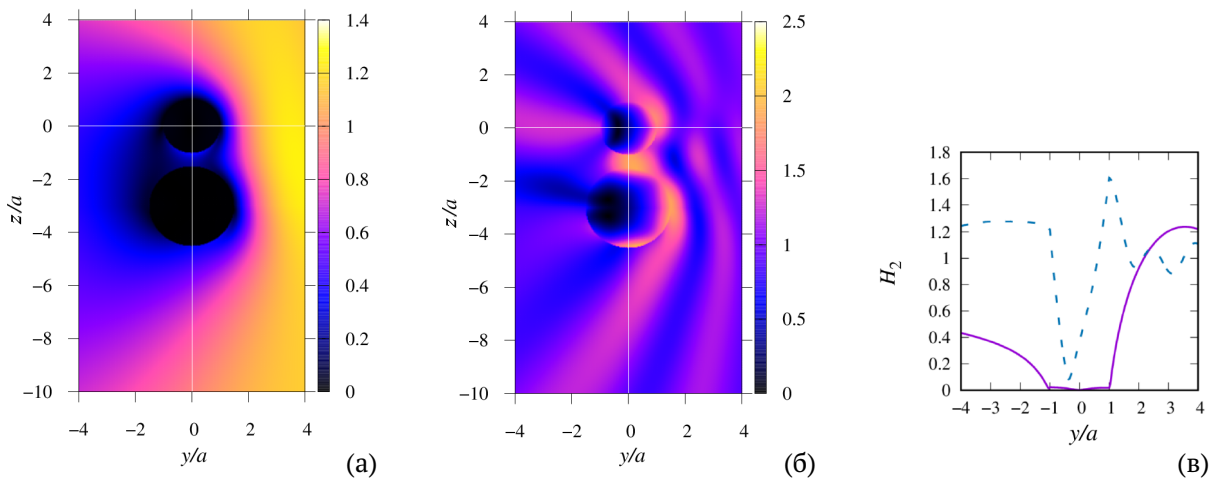

Рис. 4. Диаграммы распределения модуля нормированного давления вокруг пары сфер в случаях: воздушных пузырьков в воде (а) и капель воды в воздухе (б) при значении частоты $f = 20$ кГц для монопольного источника излучения, расположенного слева на оси Oy на расстоянии $d = 10a_1$ от центра 1-ой сферы; нормированная амплитуда давления вдоль оси Oy для данных пузырьков (сплошная линия) и капель (штриховая линия) (в)

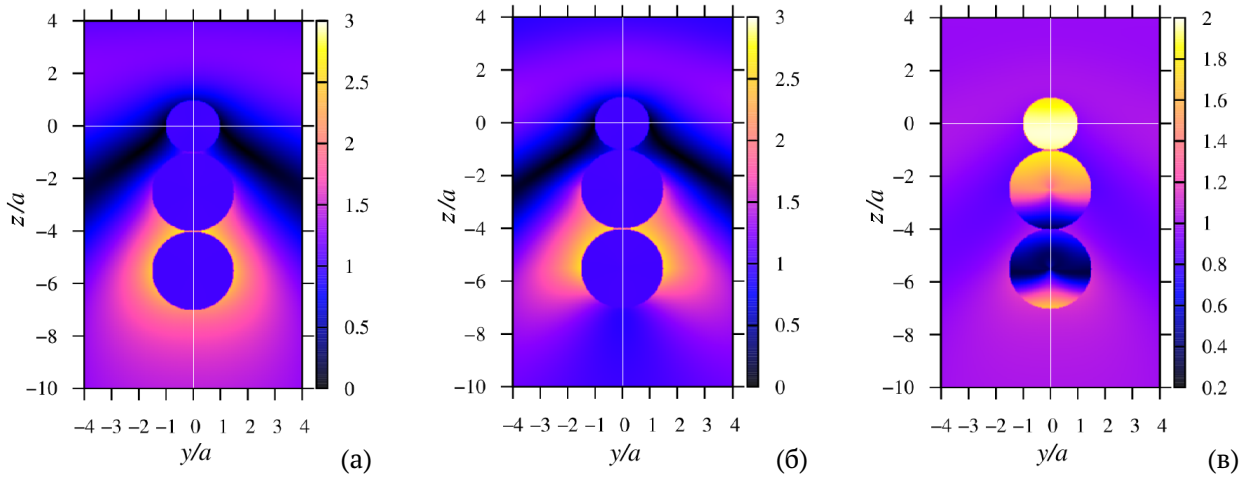

Рис. 5. Диаграммы распределения модуля нормированного давления вокруг трех воздушных пузырьков в воде (а) и дихлорэтане (б), трех капель воды в дихлорэтане (в) при значении частоты $f = 200$ кГц для монопольного источника излучения, расположенного сверху на оси Oz на расстоянии $d = 10a_1$ от центра 1-ой сферы

В случае же, когда плотность внутри сферы выше плотности вне нее (рис. 4(б) и (в) — штриховая линия, а также рис. 5(в)), распределение давления внутри сферы меняется существенно, вызывая как резкое падение до нулевого значения, так и резкий рост до значений в 1.5–2 раза больших значений падающей акустической волны.

Из рис. 4 и 5 видно, что существуют значения параметров, при которых возможно появление «теневой» зоны за сферами, когда давление в этой зоне падает (например, зоны за парой пузырьков на рис. 4(а) и за третьим пузырьком в дихлорэтане на рис. 5(б)) или, наоборот, «освещение» зоны, когда давление в данной области повышается (например, зона за первой каплей воды на рис. 4(б) и за вторым пузырьком в воде на рис. 5(а)).

5. Заключение

В настоящей работе проведено исследование акустического рассеяния от множества коаксиальных сфер, через поверхность которых проходит акустическая волна, при воздействии сферической волны от монопольного источника излучения, произвольно расположенного в пространстве. Представлены обобщения математической модели и методики повторного разложения по мультиполям на случай звукопроницаемых сфер в соответствии с работой [2], где исследовалось рассеяние от звуконепроницаемых сфер с произвольным акустическим импедансом.

Рассмотрены различные подходы к усечению бесконечных рядов в разложении. Их сравнение показало, что усечение всех рядов в каждом разложении при фиксированном числе M, определенном по формуле (9), дает результат хорошей степени точности с помощью одного расчета. При необходимости получения результата с определенной степенью точности усечение рядов должно основываться на сравнении двух последовательных значений суммы ряда, причем в качестве начального значения M членов в разложении достаточно взять наименьшее из чисел, полученных с помощью формул (8) и (9).

Численный параметрический анализ, проведенный для различных физических параметров как внешней, так и внутренней для сферы сред, числа сфер и расстояния между их центрами, а также для различных значений частот внешнего воздействия и расположения источника монопольного излучения относительно оси, соединяющей центры сфер, показал, что при определенных значениях параметров возможно появление зоны понижения давления за звукопроницаемыми сферами или, наоборот, зоны повышения давления.

В дальнейшем планируется проведение параметрического анализа в более широком диапазоне параметров, в том числе для различных значений радиусов сфер, расстояния между их центрами, расположения и частоты монопольного источника излучения, физических параметров окружающей и внутренней сред и т.п.

Полученные результаты позволят проводить тестовые расчеты для верификации общего численного алгоритма для случая множества произвольно расположенных в пространстве сфер.

Список литературы

[1] Насибуллаева Э.Ш. Исследование рассеяния от звуконепроницаемой одиночной сферы при внешнем воздействии // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2017. Т. 12, № 1. С. 73–82.
DOI: 10.21662/uim2017.1.011

[2] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // J. Acoust. Soc. Am. 2002. Vol. 112, No. 6. P. 2688–2701.
DOI: 10.1121/1.1517253

[3] Skaropoulos N.C., Yagridou H.D., Chrissoulidis D.P. Interactive resonant scattering by a cluster of air bubbles in water // J. Acoust. Soc. Am. 2003. Vol. 113, No. 6. Pp. 3001–3011.
DOI: 10.1121/1.1572141

[4] Гринченко В.Т., Вовк И.В., Мацыпура В.Т. Основы акустики. Киев: Наукова думка, 2009. 867 с.

[5] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.

[6] Насибуллаева Э.Ш. Исследование акустического рассеяния от пары звуконепроницаемых сфер при внешнем воздействии // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 1. С. 44–51.
DOI: 10.21662/mfs2019.1.006

[7] Duda R.O., Martens W.L. Range dependence of the response of a spherical head model // J. Acoust. Soc. Am. 1998. Vol. 104. Pp. 3048–3058.
DOI: 10.1109/ASPAA.1997.625597

[8] Antoine X., Chniti C., Ramdani K. On the numerical approximation of high-frequency acoustic multiple scattering problems by circular cylinders // J. Comput. Phys. 2008. Vol. 227, No. 3. Pp. 1754–1771.
DOI: 10.1016/j.jcp.2007.09.030

[9] Chew W.C., Jin J.M., Michielssen E., Song J. Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics. Artech HouseAntennas and Propagation Library, Norwood, 2001. 932 p.

[10] Zhang S., Jin J. Computation of special functions. NY: Wiley-Iterscience, 1996. 717 p.

[11] Насибуллаева Э.Ш. Исследование акустического рассеяния от одиночной звукопроницаемой сферы // Многофазные системы. 2018. Т. 13, № 4. С. 79–91.
DOI: 10.21662/mfs2018.4.012

[12] Kapodistrias G., Dahl P.H. Effects of interaction between two bubble scatterers // J. Acoust. Soc. Am. 2000. Vol. 107. Pp. 3006–3017.
DOI: 10.1121/1.429330

ISSN 2658–5782 14 (2019), **2**, 115–124

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2019.2.016
DOI: 10.21662/mfs2019.2.016

Received: 19.06.2019
Accepted: 18.12.2019

Numerical simulation of acoustic scattering from coaxial sound-penetrable spheres

Nasibullaeva E.Sh.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

This paper presents a generalisation of the mathematical model and numerical study of the acoustic scattering problem from multiple spheres in the case of spheres through which the wave passes and whose centers are located on the same axis (the case of sound-penetrable and coaxial spheres) under the action of spherical waves from a monopoly radiation source arbitrarily located in space. When solving the Helmholtz equations, a numerical technique based on the fast multipole method has been adapted for this task, which allows one to achieve high accuracy of the results obtained with minimal computer time. Comparison of the different approaches to truncation infinite series in the expansion showed the following: the result with a good degree of accuracy by a single calculation gives approach based on the truncation of all the rows with a fixed number in each expansion, and the result with a certain degree of accuracy gives an approach based on comparing two consecutive values of the sum of the series. A numerical parametric analysis of the pressure distribution inside and outside the spheres is carried out for various values of their radii, physical characteristics of the external and internal media, the number of spheres, the distances between the centers of the spheres, the frequency of exposure and the location of the monopole radiation source. It is shown that at certain values of the parameters, the appearance of zones of decrease or increase in pressure behind sound-penetrable spheres is possible. The obtained results will further allow to carry out test calculations to verify the general numerical algorithm for the case of a multitude of spheres arbitrarily located in space.

Keywords: acoustic scattering, sound-penetrable sphere, monopole radiation source, truncation number

References

[1] Nasibullaeva E.Sh. [Investigation of scattering from sound-proof single sphere under external influence]. *Trudy Instituta mekhaniki im. R.R. Mavlyutova Ufimskogo nauchnogo tsentra RAN Multiphase systems* [Proceedings of the Institute of Mechanics. R.R. Mavlyutov Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences]. 2017. V. 12, No. 1. Pp. 73–82 (in Russian).
DOI: 10.21662/uim2017.1.011

[2] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // J. Acoust. Soc. Am. 2002. Vol. 112, no. 6. P. 2688–2701.
DOI: 10.1121/1.1517253

[3] Skaropoulos N.C., Yagridou H.D., Chrissoulidis D.P. Interactive resonant scattering by a cluster of air bubbles in water // J. Acoust. Soc. Am. 2003. Vol. 113, No. 6. Pp. 3001–3011.
DOI: 10.1121/1.1572141

[4] Grinchenko V.T., Vovk I.V., Macypura V.T. [Osnovy akustiki] *Basics of acoustics.* K: Naukova Dumka, 2009. P. 867 (in Russian).

[5] Korn G.A., Korn Th.M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. McGraw Hill Book Company, 1968. 943 p.

[6] Nasibullaeva E.Sh. [Investigation of acoustic scattering from a pair soundproof spheres under external influence]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2019. V. 14, No. 1. Pp. 44–51 (in Russian).
DOI: 10.21662/mfs2019.1.006

[7] Duda R.O., Martens W.L. Range dependence of the response of a spherical head model // J. Acoust. Soc. Am. 1998. Vol. 104. Pp. 3048–3058.
DOI: 10.1109/ASPAA.1997.625597

[8] Antoine X., Chniti C., Ramdani K. On the numerical approximation of high-frequency acoustic multiple scattering problems by circular cylinders // J. Comput. Phys. 2008. Vol. 227, No. 3. Pp. 1754–1771.
DOI: 10.1016/j.jcp.2007.09.030

[9] Chew W.C., Jin J.M., Michielssen E., Song J. Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics. Artech House-Antennas and Propagation Library, Norwood, 2001. 932 p.

[10] Zhang S., Jin J. Computation of special functions. NY: Wiley-Iterscience, 1996. 717 p.

[11] Nasibullaeva E.Sh. [The study of acoustic scattering from a single sound-permeable sphere]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2018. V. 13, No. 4. Pp. 79–91 (in Russian).
DOI: 10.21662/mfs2018.4.012

[12] Kapodistrias G., Dahl P.H. Effects of interaction between two bubble scatterers // J. Acoust. Soc. Am. 2000. Vol. 107. Pp. 3006–3017.
DOI: 10.1121/1.429330