

ISSN: 2658-5782

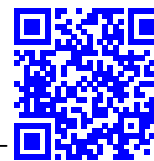
Номер 2

Апрель-Июнь 2019

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org





Продольные колебания стержня с переменным сечением

Утяшев И.М.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Стержни с переменным сечением находят применение во многих деталях и механизмах. Например, конические стержни широко применяются в ударных механизмах. Прочность таких деталей напрямую зависит от собственных частот продольных колебаний. В настоящей работе представлен метод, позволяющий численно найти собственные частоты продольных колебаний упругого стержня с переменным сечением. Данный метод основан на представлении площади сечения в виде экспоненциальной функции от полинома степени n . На основе такого представления удалось составить задачу Штурма–Лиувилля с граничными условиями третьего рода. Линейно независимые функции общего решения имеют вид степенного ряда по переменным x и λ , вследствие чего порядок характеристического уравнения зависит от выбора количества членов ряда. Приведенный подход отличается от работ других авторов как по постановке, так и методом решения. В работе рассмотрен стержень с жестко закрепленным левым концом, закрепление на правом конце может быть либо свободным, либо упругим или жестким. Приведены первые три собственные частоты для различных профилей сечения. Из анализа численных результатов следует, что у жестко закрепленного стержня с утончением в средней части первая собственная частота заметно выше, чем у конического стержня. Показано, что с увеличением жесткости закрепления на правом конце собственные частоты растут для всех профилей сечения. Результаты исследования могут найти применение для решения обратных задач по восстановлению профиля сечения по конечному набору собственных частот.

Ключевые слова: стержень, собственные частоты, собственные значения, продольные колебания, функция сечения, площадь сечения

1. Введение

Стержни с переменным сечением широко применяются в ударных механизмах [1]. Такие объекты называются концентраторами. Прочность этих механизмов напрямую зависит от собственных частот продольных колебаний. Например, в работе [2] рассмотрены продольные колебания упругих стержней переменного сечения конического, экспоненциального и катеноидального типов. Получены аналитические выражения коэффициентов усиления концентраторов в случаях задания граничных условий первого и второго рода.

В [3] с помощью перехода к интегральным уравнениям и применения метода последователь-

ных приближений получено решение для консольного стержня с сечением, заданным в виде функции от продольной координаты.

В случае, когда стержень является составным, то есть состоит из двух и более частей с различными диаметрами, такие объекты моделируются в виде ступенчатых стержней [4, 5]. В [5] приведены результаты решения не только прямой, но и обратной задач, где представлен метод, позволяющий по трем низшим собственным частотам продольных колебаний определить начальную координату и величину прикрепленной распределенной массы к ступенчатому стержню, а также отношение площадей.

Исследования собственных колебаний стержней переменного сечения могут быть полезны для неразрушающего контроля. Например, в работе [6]

исследована эволюция характеристик собственных продольных колебаний круглого стержня при увеличении дефекта его поперечного сечения.

В [7] рассмотрены собственные поперечные колебания прямого стержня с поперечным сечением прямоугольной формы, имеющим постоянную высоту и переменную ширину, изменяющуюся по экспоненциальному закону. Методом сплайнов степени 5 получены значения частот собственных колебаний при различных функциях изменения поперечного сечения стержня и способах его закрепления.

В настоящей работе предлагается описывать площадь сечения в виде экспоненциальной функции от полинома степени n .

2. Постановка и решение задачи

Свободные продольные колебания стержня длины L описываются уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EF(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho F(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

где $u(x, t)$ — перемещение сечения с координатой x ; $F(x)$ — площадь поперечного сечения стержня с координатой x ; t — время; модуль упругости E и плотность ρ стержня считаются постоянными. Граничные условия (условия Робена) для струны единичной длины ($L = 1$) имеют вид:

$$u_x(0) - hu(0) = 0, \quad u_x(1) + Hu(1) = 0,$$

где h, H — жесткость пружины на левом и правом концах соответственно.

Решение уравнения (1) будем искать в виде $u = y(x) \cos(\omega t)$ (ω — частота), тогда (1) запишется в виде:

$$(Fy')' + \lambda^2 Fy = 0 \quad (2)$$

где $\lambda^2 = \frac{\rho \omega^2}{E}$.

В настоящей работе предлагается площадь поперечного сечения стержня в точке x принять в виде экспоненциальной функции от полинома степени n :

$$F(x) = e^{P(x)}, \quad (3)$$

где $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, коэффициент a_0 соответствует значению площади сечения в точке начала отсчета. Подставив (3) в (2), учитывая, что $P'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}$, получим задачу Штурма-Лиувилля:

$$-y'' - P'(x)y' = \lambda^2 y, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} U_1(y) &= y'(0) - hy(0) = 0, \\ U_2(y) &= y'(1) + Hy(1) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Метод решения аналогичен методу, представленному в [9], где отличие заключается в основном уравнении (4). Общее решение уравнения (4) будем искать в виде:

$$y(x, \lambda) = C_1 y_1 + C_2 y_2. \quad (6)$$

Здесь y_1, y_2 — линейно-независимые решения уравнения (4). Функции y_1, y_2 будем строить в виде ряда Маклорена по переменным x и λ , для которых должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} y_1(0, \lambda) &= 1, \quad y_1'(0, \lambda) = 0, \\ y_2(0, \lambda) &= 0, \quad y_2'(0, \lambda) = 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Условие (7) необходимо для линейной независимости функции y_1, y_2 . Тогда y_1, y_2 , при условии (7), запишутся в виде бесконечного ряда:

$$\begin{aligned} y_1(x, \lambda) &= 1 - \lambda \frac{x^2}{2!} + P'(0) \cdot \lambda^2 \frac{x^3}{3!} + \\ &+ \left(2\lambda^2 P''(0) - \lambda^2 \cdot P'^2(0) + \lambda^4 \right) \frac{x^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(x, \lambda) &= x - P'(0) \frac{x^2}{2!} - \left(P''(0) - P'^2(0) + \lambda^2 \right) \frac{x^3}{3!} - \\ &- \left(P'''(0) - 3P'(0)P''(0) + P'^3(0) + 2\lambda^2 P'(0) \right) \frac{x^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

Причем y_1, y_2 являются целыми функциями по λ при каждом фиксированном x .

Подставив (6) в граничные условия (5), с учетом (7), имеем

$$\begin{aligned} -h \cdot C_1 + C_2 &= 0, \\ C_1 (y_1'(1, \lambda) - H \cdot y_1(1, \lambda)) + \\ + C_2 (y_2'(1, \lambda) - H \cdot y_2(1, \lambda)) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Условием существования нетривиального решения линейной алгебраической системы (8) для коэффициентов C_1 и C_2 является равенство нулю определителя этой системы (см. [8]):

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} -h & 1 \\ U_2(y_1(1, \lambda)) & U_2(y_2(1, \lambda)) \end{vmatrix} = 0.$$

Преобразуя данный определитель, получим

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= -y_1'(1, \lambda) - H \cdot y_1(1, \lambda) - \\ -h \cdot y_2'(1, \lambda) - h \cdot H \cdot y_2(1, \lambda) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Нули характеристического определителя (9) являются собственными числами задачи (4)–(5).

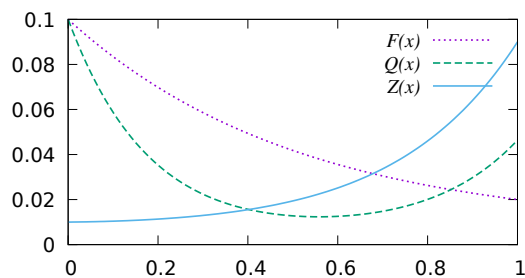


Рис. 1. Функции площади сечения

3. Анализ результатов

Рассмотрим три вида функции сечения (см. рис. 1):

$$F(x) = \exp(-2.3026 - 2.0557x + 0.4463x^2),$$

$$Q(x) = \exp(-2.3026 - 8.4428x + 7.6753x^2),$$

$$Z(x) = \exp(-4.6052 - 0.0527x + 2.2499x^2),$$

где $F(x)$ — стержень конической формы (концентратор); $Q(x)$ — стержень с утончением вблизи середины; $Z(x)$ — стержень конической формы, закрепленный в узкой части.

Рассмотрим собственные частоты продольных колебаний стержня при различных закреплениях на правом конце (на левом конце ($x = 0$) — жесткое закрепление). В табл. 1–3 приведены соответственно первая, вторая и третья частоты колебания.

Как видно из полученных данных для функции

Таблица 1. Зависимость первой частоты от закрепления и функции сечения

Функция	Вид закрепления в точке $x = 1$		
	жесткое	упругое	свободное
$F(x)$	3.3120	2.5979	2.1175
$Q(x)$	4.4184	3.2812	1.4990
$Z(x)$	3.6695	2.6194	0.9346

Таблица 2. Зависимость второй частоты от закрепления и функции сечения

Функция	Вид закрепления в точке $x = 1$		
	жесткое	упругое	свободное
$F(x)$	6.3708	5.2781	4.9435
$Q(x)$	7.1701	5.6093	5.2030
$Z(x)$	6.5803	5.0764	4.6400

Таблица 3. Зависимость первой частоты от закрепления и функции сечения

Функция	Вид закрепления в точке $x = 1$		
	жесткое	упругое	свободное
$F(x)$	9.4835	8.227	7.9964
$Q(x)$	10.0620	8.4463	8.2042
$Z(x)$	9.6271	8.0720	7.8155

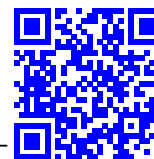
$Q(x)$ при жестком закреплении первая частота заметно выше, чем $F(x)$ и $Z(x)$. Также из табл. 1–3 можно заметить, что с увеличением жесткости закрепления на правом конце собственные частоты растут. Для случая симметричных граничных условий собственные частоты для функций $F(x)$ и $Z(x)$ очень близки, но не совпадают, так как $F(x)$ и $Z(x)$ несимметричны относительно середины стержня.

4. Заключение

Предложенный в настоящей работе метод представления площади сечения в виде экспоненциальной функции от полинома степени n позволяет численно найти собственные частоты колебания стержня. Данный подход может найти применение при решении обратной задачи, когда по собственным частотам требуется восстановить закон изменения площади сечения. Анализ результатов численных экспериментов для различных закреплений и профилей продольного сечения показал, что с увеличением жесткости закрепления растут и собственные частоты. К недостаткам метода можно отнести то, что при моделировании сложных форм сечения, например острых углов, получается полином большой степени, что, в свою очередь, значительно влияет на точность решения.

Список литературы

- Манжосов В.К. Моделирование продольного удара в стержневых системах неоднородной структуры / В.К. Манжосов, В.В. Слепухин. Ульяновск: УлГТУ, 2011. 208 с.
- Промыслова А.С. Продольные колебания упругих стержней переменного сечения (концентраторов) // МТТ. 2008. № 6. С. 118–127. <https://elibrary.ru/item.asp?id=13064258>
- Биргер И.А. Сопротивление материалов: Учеб. пособие. / И.А. Биргер, Р.Р. Мавлютов М.: Наука, 1986. 560 с.
- Пономарев С.Д. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 3. М.: Машиностроение, 1959. 1116 с.
- Хахимов А.Г. О собственных продольных колебаниях ступенчатого стержня с распределенной присоединенной массой // Контроль. Диагностика. 2013. № 11. С. 9–13. <https://elibrary.ru/item.asp?id=20519086>
- Акуленко Л.Д., Байдулов В.Г., Георгиевский Д.В., Нестеров С.В. Эволюция собственных частот продольных колебаний стержня при увеличении дефекта поперечного сечения // МТТ. 2017. № 6. С. 136–144. DOI: 10.15507/2079-6900.20.201802.148-158
- Павлов В.П. Поперечные колебания стержня с переменным поперечным сечением и вычисление его собственных частот методом сплайнов // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2017. Т. 21, № 2 (76). С. 3–16. <http://journal.ugatu.ac.ru/index.php/Vestnik/article/view/62/26>
- Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
- Утяшев И.М., Ахтямов А.М. Определение локальной неоднородности среды по собственным частотам колебаний струны // Многофазные системы. 2018. Т. 13, № 4. С. 99–106. DOI: 10.21662/mfs2018.4.014



Longitudinal oscillation of a rod with a variable cross section

Utyashev I.M.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

Variable cross-section rods are used in many parts and mechanisms. For example, conical rods are widely used in percussion mechanisms. The strength of such parts directly depends on the natural frequencies of longitudinal vibrations. The paper presents a method that allows numerically finding the natural frequencies of longitudinal vibrations of an elastic rod with a variable cross section. This method is based on representing the cross-sectional area as an exponential function of a polynomial of degree n . Based on this idea, it was possible to formulate the Sturm-Liouville problem with boundary conditions of the third kind. The linearly independent functions of the general solution have the form of a power series in the variables x and λ , as a result of which the order of the characteristic equation depends on the choice of the number of terms in the series. The presented approach differs from the works of other authors both in the formulation and in the solution method. In the work, a rod with a rigidly fixed left end is considered, fixing on the right end can be either free, or elastic or rigid. The first three natural frequencies for various cross-sectional profiles are given. From the analysis of the numerical results it follows that in a rigidly fixed rod with thinning in the middle part, the first natural frequency is noticeably higher than that of a conical rod. It is shown that with an increase in the rigidity of fixation at the right end, the natural frequencies increase for all cross section profiles. The results of the study can be used to solve inverse problems of restoring the cross-sectional profile from a finite set of natural frequencies.

Keywords: rod, eigenfrequencies, eigenvalues, longitudinal vibrations, section function, section area

References

- [1] Manzhosov V. K. [Modeling of longitudinal impact in bar systems of heterogeneous structure] *Modelirovanie prodol'nogo udara v sterzhnevyykh sistemakh neodnorodnoy struktury* / V.K. Manzhosov, V.V. Slepuxin. Ul'yanovsk: UlGTU, 2011. P. 208 (in Russian).
- [2] Promyslova A.S. Longitudinal vibrations of elastic rods of variable cross-section (concentrators) // *Mech. Solids*. 2008. No. 43. Pp. 939–947.
DOI: 10.3103/S0025654408060113
- [3] Birger I.A. [Strength of materials] *Soprotivlenie materialov: Ucheb. posobie* / I.A. Birger, R.R. Mavlyutov M.: Nauka, 1986. P. 560 (in Russian).
- [4] Ponomarev S.D. [Strength calculations in mechanical engineering] *Raschety na prochnost' v mashinostroyeni*. V. 3. M.: Mashinostroyeni, 1959. P. 1116 (in Russian).
- [5] Xakimov A.G. [On natural longitudinal vibrations of a stepped rod with a distributed attached mass] *O sobstvennykh prodol'nykh kolebaniyakh stupenchatogo sterzhnya s raspredelennoy prisoedinennoy massoy* // *Kontrol'. Diagnostika*. 2013. No. 11. Pp. 9–13 (in Russian).
<https://elibrary.ru/item.asp?id=20519086>
- [6] Akulenko, L.D., Baidulov, V.G., Georgievskii, D.V. et al. Evolution of Natural Frequencies of Longitudinal Vibrations of a Bar as Its Cross-Section Defect Increases // *Mech. Solids*. 2017. No. 52. Pp. 708–714.
DOI: 10.3103/S0025654417060103
- [7] Pavlov V.P. [Transverse vibrations of a rod with a variable cross section and the calculation of its natural frequencies by the splines method] *Poperechnye kolebaniya sterzhnya s peremennym poperechnym secheniem i vychislenie ego sobstvennykh chastot metodom splajnov* // *Vestnik Ufimskogo gosudarstvennogo aviacionnogo texnicheskogo universiteta*. 2017. V. 21, No. 2 (76). Pp. 3–16 (in Russian).
<http://journal.ugatu.ac.ru/index.php/Vestnik/article/view/62/26>
- [8] Najmark M.A. [Linear Differential Operators] *Linejnye differentsial'nye operatory*. M.: Nauka, 1969. P. 526 (in Russian).
- [9] Utyashev I.M., Akhtyamov A.M. Determination of local inhomogeneity of the medium from the natural frequencies of string oscillations // *Multiphase Systems*. 2018. V. 13, № 4. Pp. 99–106.
DOI: 10.21662/mfs2018.4.014