ISSN: 2658–5782

Номер 3 Июль–Сентябрь 2019

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org

ИМех им. Р.Р. Мавлютова

ISSN 2658–5782 Том 14 (2019), № 3, с. 184–201

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2019.3.025
DOI: 10.21662/mfs2019.3.025
УДК 517.984.5

Получена: 24.11.2019
Принята: 24.12.2019

Обзор исследований по вырожденным краевым условиям и конечному спектру[1]

Ахтямов А.М.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа
Башкирский государственный университет, Уфа

Показано, что для несимметрического оператора диффузии случай, когда характеристический определитель тождественно равен нулю, невозможен и единственно возможными вырожденными краевыми условиями являются условия Коши. В случае симметрического оператора диффузии характеристический определитель тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда краевые условия являются ложнопериодическими краевыми условиями, и тождественно равен константе, отличной от нуля, тогда и только тогда, когда его краевые условия являются обобщенными условиями Коши. Описаны все вырожденные краевые условия для спектральной задачи с дифференциальным уравнением третьего порядка $y'''(x) = \lambda\, y(x)$. Найдена общая форма вырожденных краевых условий для оператора дифференцирования четвертого порядка D^4. Описаны 12 классов краевых задач на собственные значения для оператора D^4, спектр которого заполняет всю комплексную плоскость. Известно, что спектральные задачи, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость, существуют для дифференциальных уравнений любого четного порядка. Джоном Локкером поставлена следующая проблема (одинадцатая проблема): существуют ли подобные задачи для дифференциальных уравнений нечетного порядка? Дан положительный ответ на этот вопрос. Доказано, что спектральные задачи, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость, существуют для дифференциальных уравнений любого нечетного порядка. Таким образом, проблема Джона Локкера решена. Джон Локкер поставил проблему (десятая проблема): может ли спектральная краевая задача иметь конечный спектр? Рассматриваются краевые задачи с полиномиальным вхождением спектрального параметра в дифференциальное уравнение. Покзано, что соответствующая краевая задача может иметь заранее заданный конечный спектр в случае, когда корни характеристического уравнения являются кратными. Если же корни характеристического уравнения не являются кратными, то конечного спектра быть не может. Таким образом, десятая проблема Джона Локкера решена.

Ключевые слова: вырожденные краевые условия, конечный спектр, десятая и одинадцатая проблемы Джона Локкера

1. Введение

Пример 1. Рассмотрим следующую краевую задачу на собственные значения:

$$\begin{gathered} -y'' = \lambda\, y = \rho^2\, y, \\ y(0) - y(\pi) = 0, \\ y'(0) + y'(\pi) = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $y(x)$ — функция, которая описывает какой–либо физический процесс (например, процесс колебания струны); $\rho > 0$ — непрерывная на $[0, \pi]$ постоянная функция (например, плотность струны); λ — собственные значения.

Найдем собственные значения этой задачи. Линейно независимыми решениями дифференциального уравнения задачи (1) являются функции $y_1(x, \rho) = \cos x\, \rho$, $y_1(x, \rho) = (1/\rho) \sin x\, \rho$. Характеристический определитель задачи (1) имеет следующий вид:

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} y_1(0) - y_1(\pi) & y_2(0) - y_2(\pi) \\ y_1'(0) + y_1'(\pi) & y_2'(0) + y_2'(\pi) \end{vmatrix} \equiv$$

[1]Работа поддержана средствами государственного бюджета по госзаданию № 0246-2019-0088.

$$\equiv \begin{vmatrix} 1-\cos\pi\rho & \dfrac{\sin\pi\rho}{\rho} \\ -\rho\,\sin\pi\rho & 1+\cos\pi\rho \end{vmatrix} \equiv$$
$$\equiv (1-\cos\pi\rho)\cdot(1+\cos\pi\rho)-\sin^2\pi\rho \equiv$$
$$\equiv 1-\cos^2\pi\rho-\sin^2\pi\rho \equiv 0.$$

Как видим, характеристический определитель тождественно равен нулю. Это означает, что любое значение комплексной плоскости является собственным значением задачи (1).

Пример 2. Рассмотрим следующую краевую задачу на собственные значения:

$$-y'' = \lambda\, y = \rho^2\, y, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0. \qquad (2)$$

Найдем собственные значения этой задачи. Характеристический определитель задачи (2) имеет следующий вид:

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \equiv 1.$$

Как видим, характеристический определитель тождественно равен единице. Это означает, что задача Коши (2) не имеет собственных значений.

Краевые условия для случая $\Delta(\lambda) \equiv C = \text{const}$ были названы в работе В.А. Марченко [1, С. 35] *вырожденными краевыми условиями*.

В 1927 году М.Х. Стоун опубликовал статью [2], в которой пример 1 обобщен на случай дифференциальных уравнений Штурма–Лиувилля. Стоуном было показано, что, если потенциальная функция $q(x)$ является симметрической (т.е. $q(x) = q(\pi - x)$), то любое комплексное число является точкой спектра краевой задачи

$$y'' + \lambda y + q(x)y,$$
$$y(0) - y(\pi) = 0,$$
$$y'(0) + y'(\pi) = 0.$$

Т.е. спектр этой краевой задачи полностью заполняет всю плоскость.

В книге М.А. Наймарка [3, С. 27] в 1969 году показано, что если коэффициенты обыкновенного линейного дифференциального уравнения являются непрерывными на $[0, 1]$, то для спектра задачи (16), (17) (уравнения приведены на стр. 5 настоящей статьи) имеют место следующие две возможности: 1) существует не более счетного числа собственных значений, не имеющих предельных точек в $\mathbb{C}$; 2) каждое $\lambda \in \mathbb{C}$ есть собственное значение.

Прямые и обратные задачи с нераспадающимися краевыми условиями для случая 1 достаточно хорошо изучены (см. например, [4, 5]). Вырожденный случай 2 изучен мало.

Вопрос описания всех краевых задач с вырожденными краевыми условиями связан с описанием всех вольтерровых задач. Вольтерровыми задачами называются задачи, соответствующие дискретным дифференциальным операторам L, у которых обратный оператор L^{-1} вольтерров (см. [6, с. 208]). В случае невырожденных граничных условий для произвольной непрерывной функции $q(x)$ система корневых векторов оператора L полна в $L_2(0, \pi)$ (см. [1, с. 41]). Поэтому вольтерровые задачи находятся среди задач с вырожденными граничными условиями.

В работе А.А. Дезина [7] (1985) было показано, что всевозможные вольтерровые задачи для оператора дифференцирования второго порядка с краевыми условиями (17) (см. стр. 5) при $n = 2$ имеют вид:

$$y(0) \mp a\, y(\pi) = 0, \quad y'(0) \pm a\, y'(\pi) = 0, \qquad (3)$$

где постоянная $a \neq 1$. В статье Б.Н. Биярова и С.А. Джумабаева [8] (1994) аналогичный результат получен для задачи Штурма–Лиувилля с дифференциальным уравнением $-y'' + q(x)\, y = \lambda\, y$ с симметрическим потенциалом.

В статье Джона Локкера [9] (1989) описаны все вырожденные краевые условия для оператора дифференцирования второго порядка с краевыми условиями (17) (см. стр. 5) при $n = 2$, а в работе А.М. Ахтямова [10] (2016) то же самое сделано для задачи Штурма–Лиувилля. Более точно в [10] показано следующее: если $q(x) \neq q(\pi - x)$ на некотором интервале отрезка $[0, \pi]$, то случай $\Delta(\lambda) \equiv 0$ невозможен, и единственно возможными вырожденными краевыми условиями являются условия Коши $y(0) = y'(0) = 0$ и $y(\pi) = y'(\pi) = 0$. Если $q(x) = q(\pi - x)$, то случай $\Delta(\lambda) \equiv 0$ реализуется тогда и только тогда, когда краевые условия (17) (см. стр. 5) при $n = 2$ являются ложнопериодическими краевыми условиями (15) (см. стр. 5) с $a = 1$, а случай $\Delta(\lambda) \equiv C \neq 0$ — тогда и только тогда, когда краевые условия (17) (см. стр. 5) при $n = 2$ являются обобщенными условиями Коши (15) с $a \neq 1$.

В работе А.М. Ахтямова [11] (2017) результаты для задач Штурма–Лиувилля обобщены на случай оператора диффузии. Описаны все вырожденные двухточечные краевые условия однородной спектральной задачи для оператора диффузии. Показано, что для несимметрического оператора диффузии случай, когда характеристический определитель тождественно равен нулю, невозможен и единственно возможными вырожденными краевыми условиями являются условия Коши. В случае симметрического оператора диффузии характеристический определитель тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда краевые условия являются ложнопериодическими краевыми условиями, и тождественно равен константе, отличной от нуля, тогда и только тогда, когда его краевые условия являются обобщенными условиями Коши.

Первые результаты для дифференциальных операторов произвольного четного порядка были получены в 1982 году в работе В.А. Садовничего и Б.Е. Кангужина [12] (1982) (см. также работы Джона Локкера [13] (2006), [14] (2008)). В статье В.А. Садовничего и Б.Е. Кангужина было показано, что для любого четного порядка существуют дифференциальные операторы, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость. Эти краевые условия имели следующий вид:

$$U_j(y) = y^{(j-1)}(0) + (-1)^{j-1} y^{(j-1)}(1) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

А в работе А.С. Макина [15] показано, что, если постоянные коэффициенты $d \neq \pm 1$ и n — четное натуральное число, то характеристический определитель задачи

$$y^{(n)}(x) + \sum_{m=1}^{n} p_m(x) y^{(n-m)}(x) + \lambda y(x) = 0,$$
$$y^{(2\nu-j)}(0) + d(-1)^{j+1} y^{(2\nu-j)}(\pi) = 0.$$

тождественно равен константе, отличной от нуля. Здесь $p_m(x)$ — комплекснозначные функции в $L_1(0,\pi)$. Однако, в связи с этим возникает еще один вопрос, существуют ли другие примеры операторов, помимо приведенных в [12], спектр соответствующих задач для которых полностью заполняет всю комплексную плоскость. В работе А.М. Ахтямова [16] (2017) показано, что такие примеры существуют. Кроме того, описаны все 12 классов краевых задач на собственные значения для оператора D^4, спектр которого заполняет всю комплексную плоскость. Каждый из этих классов краевых условий содержит произвольную константу. Получается, что для оператора дифференцирования четвертого порядка число краевых условий, спектр соответствующих задач для которых полностью заполняет всю комплексную плоскость, бесконечно много (континуум).

До недавнего времени оставался открытым вопрос, сформулированный в частности в работе Джона Локкера [13] в 2006 году: существуют ли спектральные задачи (16), (17) (см. стр. 5) с дифференциальным уравнением нечетного порядка, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость. А.М. Ахтямовым в 2017 году [17] было показано, что такие операторы существуют. Для любого нечетного порядка были приведены примеры подобных операторов.

Существуют ли другие примеры подобных операторов? В 2018 году в работе А.М. Ахтямова [18] для оператора дифференцирования третьего порядка дан отрицательный ответ на этот вопрос. Описаны все краевые задачи для оператора дифференцирования третьего порядка, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость. Для оператора дифференцирования третьего порядка они совпадают с найденными в работе [17]. Причем, в отличие от случая оператора дифференцирования четвертого порядка, для оператора дифференцирования третьего порядка количество краевых задач, спектр которых полностью заполняет всю плоскость, — конечное число. В работе [18] найдены также условия для которых характеристический определитель тождественен константе.

2. Вырожденные краевые условия оператора диффузии

Описаны все вырожденные двухточечные краевые условия однородной спектральной задачи для оператора диффузии. Показано, что для несимметрического оператора диффузии случай, когда характеристический определитель тождественно равен нулю, невозможен и единственно возможными вырожденными краевыми условиями являются условия Коши. В случае симметрического оператора диффузии характеристический определитель тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда краевые условия являются ложнопериодическими краевыми условиями, и тождественно равен константе, отличной от нуля, тогда и только тогда, когда его краевые условия являются обобщенными условиями Коши. Оператор диффузии представляет собой обобщение оператора Штурма–Лиувилля. Настоящий параграф является кратким изложением статей [10] и [11].

Обозначим через L следующую задачу для оператора диффузии:

$$ly = y'' + \left(\lambda^2 - 2\lambda\, p(x) - q(x)\right) y = 0, \qquad (4)$$

$$U_i(y) = a_{i1}\, y(0) + a_{i2}\, y'(0) + a_{i3}\, y(\pi) + {} + a_{i4}\, y'(\pi) = 0, \qquad (5)$$

где вещественные функции $p(x) \in W_2^1(0,\pi)$, $q(x) \in L_2(0,\pi)$; a_{ij}, $i = 1,\ 2,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ — комплексные постоянные.

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов a_{lk} краевых условий (5) через A, а ее миноры, составленные из i-го и j-го столбцов, через M_{ij}:

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{matrix} \right\|, \quad M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix},$$
$$i, j = 1, 2, 3, 4.$$

На протяжении всей статьи будем считать, что ранг матрицы A равен двум: $\mathrm{rank}\, A = 2$.

Собственные значения задачи L являются корнями следующей целой функции ([3, с. 29], [1, с. 33–36]):

$$\begin{gathered}\Delta(\lambda) = M_{12} + M_{34} + M_{32}\, y_1(\pi, \lambda) + \\ + M_{42}\, y_1'(\pi, \lambda) + M_{13}\, y_2(\pi, \lambda) + M_{14}\, y_2'(\pi, \lambda),\end{gathered} \tag{6}$$

где $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ — линейно независимые решения уравнения (4), удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered}y_1(0, \lambda) = 1, \quad y_1'(0, \lambda) = 0, \\ y_2(0, \lambda) = 0, \quad y_2'(0, \lambda) = 1.\end{gathered}$$

Справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\begin{gathered}y_1(x, \lambda) = \cos\pi\,(\lambda - a) - a_1\,\frac{\cos\pi\,(\lambda - a)}{\lambda} + \\ + \pi\, c_1\,\frac{\sin\pi\,(\lambda - a)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_{-\pi}^{\pi} \psi_1(t)\, e^{i\lambda t}\, dt,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}y_2(x, \lambda) = \frac{\sin\pi\,(\lambda - a)}{\lambda} + a_0\,\frac{\sin\pi\,(\lambda - a)}{\lambda^2} - \\ - \pi\, c_1\,\frac{\cos\pi\,(\lambda - a)}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}\int_{-\pi}^{\pi} \psi_2(t)\, e^{i\lambda t}\, dt,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}y_1'(x, \lambda) = -\lambda\,\sin\pi\,(\lambda - a) + a_0\,\sin\pi\,(\lambda - a) + \\ + \pi\, c_1\,\cos\pi\,(\lambda - a) + \int_{-\pi}^{\pi} \psi_3(t)\, e^{i\lambda t}\, dt,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}y_2'(x, \lambda) = \cos\pi\,(\lambda - a) + a_1\,\frac{\cos\pi\,(\lambda - a)}{\lambda} + \\ + \pi\, c_1\,\frac{\sin\pi\,(\lambda - a)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_{-\pi}^{\pi} \psi_4(t)\, e^{i\lambda t}\, dt,\end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered}a = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} p(t)\, dt, \quad a_0 = \frac{1}{2}\,(p(0) + p(\pi)), \\ a_1 = \frac{1}{2}\,(p(0) - p(\pi)), \\ c_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (q(t) + p^2(t))\, dt, \\ \psi_i(t) \in L_2[0, \pi], \quad i = 1, 2, 3, 4.\end{gathered}$$

для достаточно большого $\lambda \in \mathbb{R}$ ([24, 25]).

Из этих соотношений следует, что линейно независимы функции $y_1(\pi, \lambda)$, $y_1'(\pi, \lambda)$, $y_2(\pi, \lambda)$, 1, входящие в разложение функции $\Delta(\lambda)$. Если добавить к этим функциям еще и функцию $y_2'(\pi, \lambda)$, то соответствующая система функций является линейно независимой тогда и только тогда, когда $p(x) \neq p(\pi - x)$ или (и) $q(x) \neq q(\pi - x)$ на некотором интервале из отрезка $[0, \pi]$. Это следует из того, что тождество $y_1(\pi, \lambda) \equiv y_2'(\pi, \lambda)$ верно тогда и только тогда, когда $p(x) = p(\pi - x)$ и $q(x) = q(\pi - x)$ [26, Лемма 3] (равенства функций понимаются в смысле равенств в пространствах функций, в которых они заданы).

Если $p(x) \neq p(\pi - x)$ или (и) $q(x) \neq q(\pi - x)$ и $\Delta(\lambda) \equiv C = \mathrm{const}$, то из (6) и линейной независимости соответствующих функций следуют равенства:

$$\begin{gathered}M_{12} + M_{34} = C, \quad M_{32} = 0, \quad M_{42} = 0, \\ M_{13} = 0, \quad M_{14} = 0.\end{gathered} \tag{7}$$

Для нахождения миноров M_{12} и M_{34} воспользуемся тем, что произвольные числа не могут быть минорами матрицы. Для того чтобы числа M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{23}, M_{24}, M_{34} были минорами матрицы необходимо и достаточно, чтобы выполнялись так называемые соотношения Плюккера [23]:

$$M_{12}\, M_{34} - M_{13}\, M_{24} + M_{14}\, M_{23} = 0. \tag{8}$$

(Миноры M_{23}, M_{24} из равенств (8) отличаются от миноров M_{32}, M_{42} из равенств (7) только знаком). Из (7) и (8) получаем два набора миноров:

$$\begin{gathered}M_{12} = C \neq 0, \quad M_{34} = 0, \quad M_{32} = 0, \\ M_{42} = 0, \quad M_{13} = 0, \quad M_{14} = 0;\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}M_{12} = 0, \quad M_{34} = C \neq 0, \quad M_{32} = 0, \\ M_{42} = 0, \quad M_{13} = 0, \quad M_{14} = 0.\end{gathered} \tag{10}$$

Случай $C = 0$ (а, значит, и случай $\Delta(\lambda) \equiv 0$) не может быть реализован, поскольку равенство нулю всех определителей второго порядка противоречит условию $\mathrm{rank}\, A = 2$. По наборам миноров (9) и (10) с помощью методов идентификации матрицы по ее минорам [23] однозначно определяются краевые условия (5) (т.е. матрица A находится с точностью до линейных преобразований ее строк). Набору миноров (9) соответствуют условия Коши $y(0) = y'(0) = 0$, а набору миноров (10) — $y(\pi) = y'(\pi) = 0$.

Таким образом, верна

Теорема 1. *Если $p(x) \neq p(\pi - x)$ или(и) $q(x) \neq q(\pi - x)$ на некотором интервале из отрезка $[0, \pi]$, то случай $\Delta(\lambda) \equiv 0$ невозможен, и единственно возможными вырожденными краевыми условиями являются условия Коши $y(0) = y'(0) = 0$ и $y(\pi) = y'(\pi) = 0$.*

Если $p(x) = p(\pi - x)$, $q(x) = q(\pi - x)$ и $\Delta(\lambda) \equiv C = \mathrm{const}$, то из (6) и линейной независимости соответствующих функций следуют равенства:

$$\begin{gathered}M_{12} + M_{34} = C, \quad M_{32} + M_{14} = 0, \\ M_{42} = 0, \quad M_{13} = 0.\end{gathered} \tag{11}$$

Из (8) и (11) получаем два набора миноров:

$$\begin{gathered} M_{12}=C_1,\quad M_{34}=C-C_1,\\ M_{32}=\mp\sqrt{C_1\,(C_1-C)},\\ M_{42}=0,\quad M_{13}=0,\\ M_{14}=\pm\sqrt{C_1\,(C_1-C)}. \end{gathered} \tag{12}$$

Если $C=0$ (случай $\Delta(\lambda)\equiv 0$), то из (12) вытекают равенства:

$$\begin{gathered} M_{12}=C_1,\quad M_{34}=-C_1,\\ M_{32}=\mp C_1,\quad M_{42}=0,\\ M_{13}=0,\quad M_{14}=\pm C_1. \end{gathered} \tag{13}$$

По этим наборам миноров с помощью методов идентификации матрицы по ее минорам [23] однозначно получаем два вида краевых условий:

$$y(0)\mp y(\pi)=0,\quad y'(0)\pm y'(\pi)=0. \tag{14}$$

Условия (14) в [10] названы *ложнопериодическими*, так как они являются вырожденными и отличаются от невырожденных периодических или антипериодических краевых условий переменой только одного знака (с плюса на минус или с минуса на плюс).

Если $C\neq 0$ (случай $\Delta(\lambda)\not\equiv 0$), то вид краевых условий зависит от того, какие из миноров (12) отличны от нуля. Если $C-C_1=0$, то получаем условия Коши $y(0)=y'(0)=0$, если $C_1=0$, то получаем условия Коши $y(\pi)=y'(\pi)=0$, если $C-C_1\neq 0$ и $C_1\neq 0$, то получаем условия:

$$y(0)\mp a\,y(\pi)=0,\quad y'(0)\pm a\,y'(\pi)=0, \tag{15}$$

где $a=\sqrt{(C_1-C)/(C_1)}\neq 1$. Эти условия (условия вида (15), где $0\leqslant a\leqslant\infty$ и $a\neq 1$) в [10] названы *обобщенными условиями Коши.*

Следовательно, верна

Теорема 2. *Если $p(x)=p(\pi-x)$ и $q(x)=q(\pi-x)$, то случай $\Delta(\lambda)\equiv 0$ реализуется тогда и только тогда, когда краевые условия (5) являются ложнопериодическими краевыми условиями (14), а случай $\Delta(\lambda)\equiv C\neq 0$ — тогда и только тогда, когда условия (5) являются обобщенными условиями Коши (15).*

3. Вырожденные краевые условия для дифференциального уравнения третьего порядка

3.1. Основные результаты

Рассмотрим следующую двухточечную краевую задачу:

$$y'''(x)=\lambda\,y(x)=s^3\,y(x),\qquad x\in[0,1] \tag{16}$$

$$\begin{gathered} U_j(y)=\sum_{k=1}^{3}a_{jk}\,y^{(k-1)}(0)+\\ +\sum_{k=1}^{3}a_{j\,k+n}\,y^{(k-1)}(1)=0,\qquad j=1,2,3. \end{gathered} \tag{17}$$

Матрицу из коэффициентов краевых условий (17) обозначим через A:

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{Vmatrix}, \tag{18}$$

где

$$\operatorname{rank} A=3. \tag{19}$$

В настоящем параграфе получены следующие результаты:

Теорема 1. *Краевые задачи (16), (17) не могут иметь спектра, состоящего из конечного числа собственных значений.*

Теорема 2. *Краевые условия (17) могут быть вырожденными только для задач с матрицами (18), которые с точностью до линейных преобразований строк совпадают с матрицами следующих двух видов:*

$$A_1=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & a_2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_3 \end{Vmatrix}, \tag{20}$$

и

$$A_2=\begin{Vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{21}$$

Теорема 3. *Краевые условия задачи (16), (17) являются вырожденными тогда и только тогда, когда матрица (18) коэффициентов краевых условий (17) с точностью до линейных преобразований строк совпадает с матрицей (20) или матрицей (21), где числа a_1, a_2 и a_3 являются тремя различными корнями некоторого числа, а $\Delta(\lambda)\equiv 0$ тогда и только тогда, когда числа a_1, a_2 и a_3 являются тремя различными корнями из минус единицы.*

3.2. Свойство линейно независимых решений

Спектральная задача (16), (17) при $n=3$ имеет следующий характеристический определитель $\Delta(\lambda)$:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3)\\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3)\\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) \end{vmatrix}, \tag{22}$$

где $y_j = y_j(x,s)$ — следующие линейно независимые решения уравнения (16), удовлетворяющие условиям

$$y_j^{(k-1)} = \begin{cases} 1, \text{ при } k = j \\ 0, \text{ при } k \neq j \end{cases} :$$

$$y_1 = \frac{1}{3}\exp(-s\,x) + \frac{2}{3}\exp\left(\frac{1}{2}sx\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sx\right),$$

$$y_2 = -\frac{1}{3s}\exp(-sx) + \frac{\sqrt{3}}{3s}\exp\left(\frac{1}{2}sx\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sx\right) + \\ + \frac{1}{3s}\exp\left(\frac{1}{2}sx\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sx\right),$$

$$y_3 = \frac{1}{3s^2}\exp(-sx) + \frac{\sqrt{3}}{3s^2}\exp\left(\frac{1}{2}sx\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sx\right) - \\ - \frac{1}{3s^2}\exp\left(\frac{1}{2}sx\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sx\right),$$

Лемма 1. Функции $y_{j-1}^{(k-1)}(1,\lambda)$ и $y_j^{(k)}(1,\lambda)$ тождественно равны:

$$y_{j-1}^{(k-1)}(1,\lambda) \equiv y_j^{(k)}(1,\lambda), \qquad k,j = 1,2,3. \tag{23}$$

Утверждение леммы 1 проверяется непосредственным вычислением.

Обозначим через B матрицу следующего вида:

$$B = \begin{Vmatrix} y_1(0) & y_1'(0) & y_1''(0) & y_1(1) & y_1'(1) & y_1''(1) \\ y_2(0) & y_2'(0) & y_2''(0) & y_2(1) & y_2'(1) & y_2''(1) \\ y_3(0) & y_3'(0) & y_3''(0) & y_n(1) & y_3'(1) & y_3''(1) \end{Vmatrix} = \\ = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & y_1(1) & y_1'(1) & y_1''(1) \\ 0 & 1 & 0 & y_2(1) & y_2'(1) & y_2''(1) \\ 0 & 0 & 1 & y_3(1) & y_3'(1) & y_3''(1) \end{Vmatrix} = \|B_1, B_2\|.$$

Таким образом, матрица B состоит из двух квадратных матриц B_1 и B_2. Определители этих матриц представляют собой Вронскианы в точках $x = 0$ и $x = 1$ соответственно: $\det(B_1) = W(0)$, $\det(B_2) = W(1)$. Из формулы Лиувилля для определителя Вронского [27, с. 95–96] следует, что

$$\det(B_1) = W(0) = 1, \quad \det(B_2) = W(1) = 1.$$

С помощью матриц A и B определитель (22) можно представить следующим образом:

$$\Delta(\lambda) \equiv \det(A \cdot B^T).$$

Разложив последний определитель с помощью формулы Бине–Коши получим [28, п. 1.14, С. 41-42]:

$$\Delta(\lambda) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant 2n} A_{i_1,i_2,i_3}\, B_{i_1,i_2,i_3}(s) = 0. \tag{24}$$

Здесь через A_{i_1,i_2,i_3} обозначены миноры, составленные из i_1-го, i_2-го, i_3-го столбцов матрицы A соответственно, а через B_{i_1,i_2,i_3} — из i_1-го, i_2-го, i_3-го столбцов матрицы B или, что то же самое, строк транспонированной матрицы B^T.

Обозначим через $P(s)$ сумму первого слагаемого $A_{123}\,B_{123}$ и последнего слагаемого $A_{456}\,B_{456}$ в разложении (24), а через $S(s)$ — сумму всех остальных слагаемых из разложения (24). То есть

$$\Delta(\lambda) = S(s) + P(s).$$

Функция $P(s)$ тождественно равна константе:

$$P(s) \equiv A_{123} \cdot W(0) + A_{456} \cdot W(1) = \\ = A_{123} + A_{456} = \text{const}.$$

Каждое слагаемое суммы $S(s)$ содержит линейные комбинации экспонент $e^{\omega_j\,s\,x}$ или $e^{\sum_j \omega_j\,s\,x}$. Аргументы этих экспоненциальных функций не обращаются в нуль, а коэффициенты-множители перед экспонентами не совпадают. Ниже будет показано, что характеристический определитель (24) тождественно равен константе только в случае, когда $S(s) \equiv 0$, причем эта константа равна $A_{123} + A_{456}$.

Отсюда

$$\Delta(\lambda) = A_{123} + A_{456} + A_{124}\,B_{124} + A_{125}\,B_{125} + \\ + A_{126}\,B_{126} + A_{134}\,B_{134} + A_{135}\,B_{135} + A_{136}\,B_{136} + \\ + A_{145}\,B_{145} + A_{146}\,B_{146} + A_{156}\,B_{156} + A_{234}\,B_{234} + \\ + A_{235}\,B_{235} + A_{236}\,B_{236} + A_{245}\,B_{245} + A_{246}\,B_{246} + \\ + A_{256}\,B_{256} + A_{345}\,B_{345} + A_{346}\,B_{346} + A_{356}\,B_{356}.$$

Из леммы 1 следует, что

$$B_2 = \begin{Vmatrix} y_1(1) & y_1'(1) & y_1''(1) \\ y_2(1) & y_1(1) & y_1'(1) \\ y_3(1) & y_2(1) & y_1(1) \end{Vmatrix}.$$

Кроме того, $y_1'(1)\,y_2(1) = y_1''(1)\,y_3(1)$. Поэтому

$$\Delta(\lambda) = (A_{123} + A_{456}) + A_{124}\,y_3(1) + \\ + (A_{125} - A_{134})\,y_2(1) + (A_{126} - A_{135} + A_{234})\,y_1(1) + \\ + (-A_{136} + A_{235})\,y_1'(1) + (A_{156} - A_{246} + A_{345}) \times \\ \times (y_1^2(1) - y_1'(1)\,y_2(1)) + A_{145}\,(y_2^2(1) - y_1(1)y_3(1)) + \\ + (A_{146} - A_{245})(y_1(1)\,y_2(1) - y_1'(1)\,y_3(1)) + \\ + A_{236}\,y_1''(1) + (-A_{256} + A_{346})\,(y_1(1)\,y_1'(1) - \\ - y_1''(1)\,y_2(1)) + A_{356}\,((y_1'(1))^2 - y_1(1)\,y_1''(1)).$$

где

$$y_1(1) = \frac{1}{3}e^{-s} + \frac{2}{3}e^{\frac{s}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right),$$
$$y_2(1) = -\frac{1}{3s}e^{-s} + \frac{\sqrt{3}}{3s}e^{\frac{s}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}s}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3s}e^{\frac{s}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}s}{2}\right),$$
$$y_3(1) = \frac{1}{3s^2}e^{-s} + \frac{\sqrt{3}}{3s^2}e^{\frac{s}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}s}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3s^2}e^{\frac{s}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}s}{2}\right),$$

$$y_1'(1) = -\frac{s}{3}e^{-s} + \frac{s}{3}e^{\frac{s}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right) - \frac{\sqrt{3}s}{3}e^{\frac{s}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right),$$
$$y_1''(1) = \frac{s^2}{3}e^{-s} - \frac{s^2}{3}e^{\frac{s}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}s}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}s^2}{3}e^{\frac{s}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right),$$
$$y_1^2(1) - y_1'(1)\,y_2(1) = \frac{1}{3}e^{s} + \frac{2}{3}e^{-\frac{s}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right),$$
$$y_1^2(1) - y_1(1)y_3(1) = -\frac{1}{9s^2}\Bigg(-e^{-2s}s^2 - 4e^{-\frac{s}{2}}s^2\times$$
$$\times\cos\left(\frac{s\sqrt{3}}{2}\right) + e^{-2s} + e^{-\frac{s}{2}}\cos\left(\frac{s\sqrt{3}}{2}\right) + e^{-\frac{s}{2}}\times$$
$$\times\sin\left(\frac{s\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{3} - -2e^{s}\cos^2\left(\frac{s\sqrt{3}}{2}\right)(2s^2+1) +$$
$$+2\sqrt{3}e^{s}\cos\left(\frac{s\sqrt{3}}{2}\right)\sin\left(\frac{s\sqrt{3}}{2}\right)\Bigg),$$
$$y_1(1)\,y_2(1) - y_1'(1)\,y_3(1) = \frac{1}{3s}e^{\frac{s}{2}}\Bigg(e^{-s}\sin\left(\frac{s\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{3} -$$
$$-e^{-s}\cos\left(\frac{s\sqrt{3}}{2}\right) + e^{\frac{s}{2}}\Bigg),$$
$$y_1(1)\,y_1'(1) - y_1''(1)\,y_2(1) = -\frac{s}{3}e^{\frac{s}{2}}\Bigg(e^{-s}\cos\left(\frac{s\sqrt{3}}{2}\right) +$$
$$+e^{-s}\sin\left(\frac{s\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{3} - e^{\frac{s}{2}}\Bigg),$$
$$(y_1'(1))^2 - y_1''(1)\,y_1(1) = \frac{s^2}{3}e^{\frac{s}{2}}\Bigg(\sqrt{3}e^{-s}\sin\left(\frac{s\sqrt{3}}{2}\right) -$$
$$-e^{-s}\cos\left(\frac{s\sqrt{3}}{2}\right) + e^{\frac{s}{2}}\Bigg).$$

Из представления характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ видно, что он является целой функцией класса K [29, 30]. А поэтому количество его корней бесконечно и имеет асимптотические представления, выписанные в работах [29, 30]. Это доказывает теорему 1.

3.3. Вид краевых задач с вырожденными краевыми условиями

Далее нам понадобятся следующие три определения:

1. *Характеристической суммой* определителя B_{i_1,i_2,i_3} (а также соответствующего определителя A_{i_1,i_2,i_3}) будем называть сумму всех его индексов и обозначать r_0: $r_0 = i_1 + i_2 + i_3$.

2. Пусть количество индексов i_k определителя B_{i_1,i_2,i_3}, для которых выполняется неравенство $1 \leqslant i_k \leqslant 3$, равно r_1, а количество индексов i_k определителя B_{i_1,i_2,i_3}, для которых выполняется неравенство $4 \leqslant i_k \leqslant 6$, равно r_2. Тогда упорядоченную тройку чисел (r_0, r_1, r_2) будем называть *характеристическим индексом* определителя B_{i_1,i_2,i_3} (A_{i_1,i_2,i_3}).

3. Из разложения характеристического определителя, полученного выше, и леммы 1 видно, что определители B_{i_1,i_2,i_3}, имеющие различные характеристические индексы, линейно независимы и отличаются показателями степеней s^k, определители же B_{i_1,i_2,i_3}, имеющие одинаковые характеристические индексы, совпадают или отличаются только знаком. Определители B_{i_1,i_2,i_3} (A_{i_1,i_2,i_3})), которые имеют одинаковые характеристические индексы, будем называть *подобными*.

Если $S(s) \equiv 0$, то один из миноров A_{123} или A_{456} отличен от нуля. Иначе получили бы, что все миноры матрицы A третьего порядка равны нулю, что противоречит тому, что $\operatorname{rank} A = 3$. Действительно, из представления для характеристического определителя, линейной независимости соответствующих функций получаем следующие равенства:

$$\begin{gathered}
A_{124} = A_{145} = A_{236} = A_{356} = 0,\\
A_{126} - A_{135} + A_{234} = A_{156} - A_{246} + A_{345} = 0,\\
A_{125} - A_{134} = A_{235} - A_{136} = A_{146} - A_{245} =\\
= A_{346} - A_{256} = 0.
\end{gathered} \tag{25}$$

Из алгебраической геометрии известно, что числа $A_{i_1i_2i_3}$ являются минорами матрицы A, тогда и только тогда, когда выполняются соотношения Плюккера [23]. Для матрицы A размера 3 на 6 эти соотношения таковы:

$$\begin{gathered}
A_{i_1i_4i_5}A_{i_1i_2i_3} - A_{i_1i_4i_3}A_{i_1i_2i_5} + A_{i_1i_5i_3}A_{i_1i_2i_4} = 0,\\
A_{i_1i_4i_6}A_{i_1i_2i_3} - A_{i_1i_4i_3}A_{i_1i_2i_6} + A_{i_1i_6i_3}A_{i_1i_2i_4} = 0,\\
A_{i_1i_5i_6}A_{i_1i_2i_3} - A_{i_1i_5i_3}A_{i_1i_2i_6} + A_{i_1i_6i_3}A_{i_1i_2i_5} = 0,\\
A_{i_2i_4i_5}A_{i_1i_2i_3} - A_{i_2i_4i_3}A_{i_1i_2i_5} + A_{i_2i_5i_3}A_{i_1i_2i_4} = 0,\\
A_{i_2i_4i_6}A_{i_1i_2i_3} - A_{i_2i_4i_3}A_{i_1i_2i_6} + A_{i_2i_6i_3}A_{i_1i_2i_4} = 0,\\
A_{i_2i_5i_6}A_{i_1i_2i_3} - A_{i_2i_5i_3}A_{i_1i_2i_6} + A_{i_2i_6i_3}A_{i_1i_2i_5} = 0,\\
A_{i_3i_4i_5}A_{i_1i_2i_3} - A_{i_2i_4i_3}A_{i_1i_3i_5} + A_{i_2i_5i_3}A_{i_1i_3i_4} = 0,\\
A_{i_3i_4i_6}A_{i_1i_2i_3} - A_{i_2i_4i_3}A_{i_1i_3i_6} + A_{i_2i_6i_3}A_{i_1i_3i_4} = 0,\\
A_{i_3i_5i_6}A_{i_1i_2i_3} - A_{i_2i_5i_3}A_{i_1i_3i_6} + A_{i_2i_6i_3}A_{i_1i_3i_5} = 0,\\
A_{i_4i_5i_6}A_{i_1i_2i_3} - A_{i_1i_2i_4}A_{i_3i_5i_6} +\\
+A_{i_1i_2i_5}A_{i_3i_4i_6} - A_{i_1i_2i_6}A_{i_3i_4i_5} = 0,
\end{gathered}$$

где $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6)$ такая перестановка, что $A_{i_1,i_2,i_3} \neq 0$. Если $A_{123} = A_{456} = 0$, то из этих соотношений, а также из равенств (25), следует, что все миноры $A_{i_1 i_2 i_3}$ матрицы A обращаются в нуль, что противоречит тому, что $\operatorname{rank} A = 3$. Следовательно, если $S(s) \equiv 0$, то один из миноров A_{123} или A_{456} отличен от нуля.

Пусть $A_{123} \neq 0$. Тогда матрица (18) с точностью до линейных преобразований строк имеет следующий вид:

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{matrix} \right\|.$$

(Здесь a_{ij}, вообще говоря, не совпадают с коэффициентами a_{ij} из (18). Мы не стали обозначать их другими символами, чтобы не загромождать работу обилием обозначений. Из контекста всегда понятно о каких коэффициентах идет речь.)

Покажем, что из условия $S(s) \equiv 0$ вытекает, что матрица A с точностью до линейных преобразований строк имеет вид (20), т.е. подматрица, составленная из последних трех столбцов, имеет диагональный вид.

Заметим, что среди определителей B_{i_1,i_2,i_3} в сумме $S(s)$ определитель $B_{236} = y_1''(1)$ не имеет подобных, а значит, он линейно независим с любым другим слагаемым суммы $S(s)$. Тогда из тождества $S(s) \equiv 0$ вытекает, что $A_{236} = 0$. Разложив этот определитель, получаем:

$$A_{236} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{16} \\ 1 & 0 & a_{26} \\ 0 & 1 & a_{36} \end{vmatrix} = a_{16} = 0. \tag{26}$$

Покажем теперь, что элементы a_{15} и a_{26}, стоящие на второй верхней диагонали матрицы A, также равны нулю.

Среди определителей B_{i_1,i_2,i_3} в сумме $S(s)$ определитель $B_{356} = (y_1'(1))^2 - y_1(1)\, y_1''(1)$ не имеет подобных и линейно независим с любым другим слагаемым суммы $S(s)$. Тогда из тождества $S(s) \equiv 0$ вытекает, что $A_{356} = 0$. Разложив этот определитель, получаем:

$$A_{356} = \begin{vmatrix} 0 & a_{15} & 0 \\ 0 & a_{25} & a_{26} \\ 1 & a_{35} & a_{36} \end{vmatrix} = a_{15}\, a_{26} = 0.$$

Откуда

$$a_{15}\, a_{26} = 0. \tag{27}$$

Далее, определители $B_{235} = y_1'(1)$ и B_{136} подобны. Они не имеют подобных среди остальных определителей B_{i_1,i_2,i_3} в сумме $S(s)$. Поэтому имеем

$$A_{235} + A_{136} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{15} \\ 1 & 0 & a_{25} \\ 0 & 1 & a_{35} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{26} \\ 0 & 1 & a_{36} \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда следует равенство:

$$a_{15} + a_{26} = 0. \tag{28}$$

Из (27) и (28) получаем равенства

$$a_{15} = a_{26} = 0, \tag{29}$$

которые означают, что диагональ, состоящая из элементов a_{15} и a_{26}, состоит из нулей.

Аналогично показывается, что любая диагональ ниже главной состоит из нулей.

Если $A_{456} \neq 0$, то из условия $S(s) \equiv 0$ для всех $\lambda = s^2 \neq 0$ следует, что матрица A имеет вид (21), т.е. подматрица, составленная из первых n столбцов, имеет диагональный вид. Это доказывается также, как и в случае $A_{123} \neq 0$. Таким образом, теорема 2 доказана.

3.4. Описание всех вырожденных краевых условий для оператора дифференцирования третьего порядка

Согласно теореме 2 среди всех краевых задач (16), (17) при $n = 3$ вырожденные краевые условия могут иметь только краевые задачи с матрицами A, которые с точностью до линейных преобразований строк совпадают с матрицами двух видов (20) и (21).

Спектральная задача (16), (17) с матрицей краевых условий A_1 имеет следующий характеристический определитель $\Delta(\lambda)$:

$$\Delta(\lambda) = (a_1 a_2 + a_1\, a_3 + a_2\, a_3)\left((y_3''(1))^2 - y_3'(1)\, y_3'''(1)\right) + \\ + (a_1 + a_2 + a_3)\, y_3''(1) + a_1\, a_2\, a_3 + 1.$$

Тождество

$$\Delta(\lambda) \equiv C = \mathrm{const}$$

выполняется тогда и только тогда, когда числа a_1, a_2 и a_3 являются решениями следующей системы уравнений:

$$\begin{gathered} a_1 + a_2 + a_3 = 0, \quad a_1\, a_2 + a_1\, a_3 + a_2\, a_3 = 0, \\ a_1\, a_2\, a_3 + 1 = C = \mathrm{const}. \end{gathered} \tag{30}$$

Решением системы (30) являются следующие коэффициенты краевых условий:

$$\begin{gathered} a_1 = C_1, \quad a_2 = \frac{C_1}{2}\,(-1 \pm \sqrt{3}\, i), \\ a_3 = -\frac{C_1}{2}\,(1 \pm \sqrt{3}\, i), \end{gathered} \tag{31}$$

где C_1 — произвольное число, являющееся решением уравнения

$$C_1^3 = C - 1.$$

В частности, $\Delta(\lambda) \equiv 0$ для задачи (16), (17) с матрицей коэффициентов (20) тогда и только тогда, когда числа a_1, a_2 и a_3 являются корнями из минус единицы.

Ввиду равноправия концов аналогичные выводы справедливы и для задачи (16), (17) с матрицей коэффициентов (21).

Таким образом, вырожденными краевыми условиями (17) для уравнения (16) являются только краевые условия с матрицей коэффициентов (20) или (21), где числа a_1, a_2 и a_3 являются тремя различными корнями некоторого числа, а $\Delta(\lambda) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда числа a_1, a_2 и a_3 являются тремя различными корнями из минус единицы.

4. Вырожденные краевые условия для оператора D^4

4.1. Основные результаты

Рассмотрим следующую краевую задачу для оператора D^4:

$$y^{(4)}(x) = \lambda\, y(x) = s^4\, y(x), \qquad x \in [0,1], \tag{32}$$

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{n} a_{jk}\, y^{(k-1)}(0) + \\ + \sum_{k=0}^{n} a_{j\,k+n}\, y^{(k-1)}(1) = 0, \\ j,k = 1,2,3,4. \tag{33}$$

Хорошо известен пример дифференциального оператора четного порядка, спектр которого заполняет всю комплексную плоскость [12] (см. также [13]). В этом примере краевые условия (33) имеют следующий вид:

$$U_j(y) = y^{(j-1)}(0) + (-1)^{j-1}\, y^{(j-1)}(1) = 0, \\ j = 1,2,3,4. \tag{34}$$

Обозначим матрицу, состоящую из коэффициентов a_{lk} краевых условий (33) через A, а через A_{i_1,i_2,i_3,i_4} обозначим минор матрицы A, составленный из i_1-го, i_2-го, i_3-го и i_4-го столбцов матрицы A:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} \end{Vmatrix}. \tag{35}$$

$$A_{i_1,i_2,i_3,i_4} = \begin{vmatrix} a_{1,i_1} & a_{1,i_2} & a_{1,i_3} & a_{1,i_4} \\ a_{2,i_1} & a_{2,i_2} & a_{2,i_3} & a_{2,i_4} \\ a_{3,i_1} & a_{3,i_2} & a_{3,i_3} & a_{3,i_4} \\ a_{4,i_1} & a_{4,i_2} & a_{4,i_3} & a_{4,i_4} \end{vmatrix}. \tag{36}$$

Далее будем предполагать, что ранг матрицы A равен 4:

$$\operatorname{rank} A = 4. \tag{37}$$

Целью этого параграфа является доказательство следующих теорем:

Теорема 1. *Матрица (35) коэффициентов краевых условий (33) имеет следующий вид:*

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & a_4 \end{Vmatrix} \tag{38}$$

или

$$A_2 = \begin{Vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{39}$$

где a_i $(i = 1,2,3,4)$ — некоторые числа.

Теорема 2. *Характеристический определитель задачи (32),(33) тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда матрица (35) коэффициентов краевых условий (33) имеет вид (38) или (39), где $\{a_i\}$ $(i = 1,2,3,4)$ — следующие:*

$$\begin{aligned} &1.\ a_1 = C_1, && a_2 = -1, && a_3 = C_1^{-1}, && a_4 = 1, \\ &2.\ a_1 = C_2, && a_2 = 1, && a_3 = C_2^{-1}, && a_4 = -1, \\ &3.\ a_1 = C_3, && a_2 = -1, && a_3 = 1, && a_4 = -1, \\ &4.\ a_1 = C_4, && a_2 = 1, && a_3 = -1, && a_4 = 1, \\ &5.\ a_1 = -1, && a_2 = C_5, && a_3 = -1, && a_4 = 1, \\ &6.\ a_1 = -1, && a_2 = C_6, && a_3 = 1, && a_4 = C_6^{-1}, \\ &7.\ a_1 = 1, && a_2 = C_7, && a_3 = -1, && a_4 = C_7^{-1}, \\ &8.\ a_1 = 1, && a_2 = C_8, && a_3 = 1, && a_4 = -1, \\ &9.\ a_1 = -1, && a_2 = 1, && a_3 = C_9, && a_4 = 1, \\ &10.\ a_1 = 1, && a_2 = -1, && a_3 = -1, && a_4 = -1, \\ &11.\ a_1 = -1, && a_2 = 1, && a_3 = -1 && a_4 = C_{11}, \\ &12.\ a_1 = 1, && a_2 = -1, && a_3 = 1, && a_4 = C_{12}. \end{aligned} \tag{40}$$

Здесь C_j $(j = 1,2,\ldots,12)$ — произвольные константы.

4.2. Вид вырожденных краевых условий

В настоящем пункте приведено доказательство теоремы 1.

Собственные значения задачи (32), (33) являются корнями целой функции [3, С. 26] $\Delta(\lambda)$:

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4)\\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4)\\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4)\\ U_4(y_1) & U_4(y_2) & U_4(y_3) & U_4(y_4)\end{vmatrix}, \quad (41)$$

где

$$y_1=\frac{1}{4}\exp(s\,x)+\frac{1}{4}\exp(-s\,x)+\frac{1}{2}\cos(s\,x),$$
$$y_2=\frac{1}{4\,s}\exp(s\,x)-\frac{1}{4\,s}\exp(-s\,x)+\frac{1}{2\,s}\sin(s\,x),$$
$$y_3=\frac{1}{4\,s^2}\exp(s\,x)+\frac{1}{4\,s^2}\exp(-s\,x)-\frac{1}{2\,s^2}\cos(s\,x),$$
$$y_4=\frac{1}{4\,s^3}\exp(s\,x)-\frac{1}{4\,s^3}\exp(-s\,x)-\frac{1}{2\,s^3}\sin(s\,x),$$

являются линейно независимыми решениями уравнения (32), удовлетворяющими условиям

$$y_j^{(r-1)}(0,\lambda)=\begin{cases} 0 \text{ при } j\neq r,\\ 1 \text{ при } j=r,\end{cases} \quad j,\,r=1,\,2,\,3,\,4. \quad (42)$$

Через B, B_1 и B_2 обозначим следующие матрицы:

$$B=\left\|\ B_1 \quad B_2\ \right\|,$$

где

$$B_1=\begin{Vmatrix} y_1(0) & y_1'(0) & y_1''(0) & y_1'''(0)\\ y_2(0) & y_2'(0) & y_2''(0) & y_2'''(0)\\ y_3(0) & y_3'(0) & y_3''(0) & y_3'''(0)\\ y_4(0) & y_4'(0) & y_4''(0) & y_4'''(0)\end{Vmatrix},$$

$$B_2=\begin{Vmatrix} y_1(1) & y_1'(1) & y_1''(1) & y_1'''(1)\\ y_2(1) & y_2'(1) & y_2''(1) & y_2'''(1)\\ y_3(1) & y_3'(1) & y_3''(1) & y_3'''(1)\\ y_4(1) & y_4'(1) & y_4''(1) & y_4'''(1)\end{Vmatrix}.$$

Здесь

$$y_1(1)=\frac{1}{4}\left(e^s+e^{-s}+2\cos(s)\right),$$
$$y_1'(1)=\frac{1}{4}\,s\left(e^s-e^{-s}-2\sin(s)\right),$$
$$y_1''(1)=\frac{1}{4}\,s^2\left(e^s+e^{-s}-2\cos(s)\right),$$
$$y_1'''(1)=\frac{1}{4}\,s^3\left(e^s-e^{-s}+2\sin(s)\right),$$
$$y_2(1)=\frac{1}{4\,s}\left(e^s-e^{-s}+2\sin(s)\right),$$
$$y_2'(1)=\frac{1}{4}\left(e^s+e^{-s}+2\cos(s)\right),$$
$$y_2''(1)=\frac{1}{4}\,s\left(e^s-e^{-s}-2\sin(s)\right),$$
$$y_2'''(1)=\frac{1}{4}\,s^2\left(e^s-e^{-s}-2\cos(s)\right),$$
$$y_3(1)=\frac{1}{4\,s^2}\left(e^s-e^{-s}-2\cos(s)\right),$$
$$y_3'(1)=\frac{1}{4\,s}\left(e^s-e^{-s}+2\sin(s)\right),$$
$$y_3''(1)=\frac{1}{4}\left(e^s+e^{-s}+2\cos(s)\right),$$
$$y_3'''(1)=\frac{1}{4}\,s\left(e^s-e^{-s}-2\sin(s)\right),$$
$$y_4(1)=\frac{1}{4\,s^3}\left(e^s-e^{-s}-2\sin(s)\right),$$
$$y_4'(1)=\frac{1}{4\,s^2}\left(e^s+e^{-s}-2\cos(s)\right),$$
$$y_4''(1)=\frac{1}{4\,s}\left(e^s-e^{-s}+2\sin(s)\right),$$
$$y_4'''(1)=\frac{1}{4}\left(e^s+e^{-s}+2\cos(s)\right).$$

Заметим, что

$$y_{j-1}^{(k-1)}(1,\lambda)\equiv y_j^{(k)}(1,\lambda), \qquad j=2,3,4,5 \quad k=1,2,3,4. \quad (43)$$

Из (42) и (43) следует, что

$$B=\|B_1,B_2\|, \quad (44)$$

где

$$B_1=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{Vmatrix},$$

$$B_2=\begin{Vmatrix} y_1(1) & y_1'(1) & y_1''(1) & y_1'''(1)\\ y_2(1) & y_2'(1) & y_2''(1) & y_2'''(1)\\ y_3(1) & y_3'(1) & y_3''(1) & y_3'''(1)\\ y_4(1) & y_4'(1) & y_4''(1) & y_4'''(1)\end{Vmatrix}.$$

С помощью матриц A и B определитель (41)

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & y_1(1) & y_1'(1) & y_1''(1) & y_1'''(1)\\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_2(1) & y_1(1) & y_1'(1) & y_1''(1)\\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_3(1) & y_2(1) & y_1(1) & y_1'(1)\\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_4(1) & y_3(1) & y_2(1) & y_1(1)\end{Vmatrix}$$

записывается в следующем виде:

$$\Delta(\lambda)\equiv\det(A\cdot B^T).$$

Из формул Бине–Коши [28, 1.14] следует, что

$$\Delta(\lambda)=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3<i_4\leqslant 8} A_{i_1,i_2,i_3,i_4}\,B_{i_1,i_2,i_3,i_4}=0. \quad (45)$$

Здесь через $B_{i_1,i_2,i_3,i_4}=B_{i_1,i_2,i_3,i_4}(\lambda)$ обозначен минор, составленный из i_1-й, i_2-й, i_3-й и i_4-й столбцов матрицы B (строк матрицы B^T).

Через $P(s)$ обозначим $P(s)=A_{1234}\,B_{1234}+A_{5678}\,B_{5678}$. Из формулы Лиувилля–Остроградского, связывающего Вронскиан решений с коэффициентами уравнения, следует что [27, 17.1] $B_{1234} = \det(B_1) = W(0) = 1$, $B_{5678} = \det(B_2) = W(1) = 1$ и $P(s) = A_{1234} + B_{5678} = \text{const}$.

Все другие функции $B_{i_1,i_2,i_3,i_4} = B_{i_1,i_2,i_3,i_4}(s)$ (кроме B_{1234} и B_{5678}) не являются константами.

Поэтому если $\Delta(\lambda) \equiv C = \text{const}$, то $\Delta(\lambda) - P(s) \equiv 0$ и один из миноров A_{1234} or A_{5678} не равен нулю. Предположив противное получим, что все миноры A_{i_1,i_2,i_3,i_4} обращаются в нуль. Это противоречит условию (37).

Предположим $A_{1234} \neq 0$. Тогда матрица (35) имеет следующий вид:

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} \end{matrix} \right\|.$$

(Здесь через a_{ij} обозначены коэффициенты a_{ij}, вообще говоря отличные от коэффициентов (35). Мы не стали обозначать их новыми символами, чтобы не увеличивать количества обозначений.)

Заметим, что определитель $B_{2348} = y_1'''(1)$ и любой другой определитель B_{i_1,i_2,i_3,i_4} являются линейно независимыми. Предположим, что $\Delta(\lambda) \equiv C = \text{const}$, тогда $\Delta(\lambda) - P(s) \equiv 0$ и $A_{2348} = 0$. Отсюда следует, что

$$A_{2348} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{18} \\ 1 & 0 & 0 & a_{28} \\ 0 & 1 & 0 & a_{38} \\ 0 & 0 & 1 & a_{48} \end{vmatrix} = -a_{18} = 0. \tag{46}$$

Покажем, что a_{17} и a_{28} также равны нулю. Действительно, $B_{3478} = y_1'(1)\, y_1'''(1) - (y_1''(1))^2$ и любой другой определитель B_{i_1,i_2,i_3,i_4} являются линейно независимыми. Предположим, что $\Delta(\lambda) \equiv C = \text{const}$, тогда $\Delta(\lambda) - P(s) \equiv 0$ и $A_{3478} = 0$. Отсюда следует, что

$$A_{3478} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{17} & 0 \\ 0 & 0 & a_{27} & a_{28} \\ 1 & 0 & a_{37} & a_{38} \\ 0 & 1 & a_{47} & a_{48} \end{vmatrix} = a_{17} \cdot a_{28} = 0. \tag{47}$$

Кроме того, $B_{2347} = -B_{1348} = -y_1''(1)$ и любой другой определитель B_{i_1,i_2,i_3,i_4} линейно независимы. Отсюда следует, что

$$A_{2347} - A_{1348} = -(a_{17} + a_{28}) = 0. \tag{48}$$

Сочетая (47) и (48), получаем

$$a_{17} = a_{28} = 0.$$

Аналогично,

$$a_{16} = a_{27} = a_{38} = 0.$$

Далее, $B_{1235} = y_4(1)$ и любой другой определитель B_{i_1,i_2,i_3,i_4} линейно независимы. Поэтому если $\Delta(\lambda) - P(s) \equiv 0$, то минор $A_{1235} = a_{45}$ обращается в нуль. Как это было сделано выше, получаем

$$a_{34} = a_{46} = a_{25} = a_{36} = a_{47} = 0.$$

Следовательно, если $A_{1234} \neq 0$, то матрица A имеет вид A_1.

Поступая как это было сделано выше, получим, что если $A_{5678} \neq 0$, то матрица A имеет вид A_2.

Это полностью доказывает теорему 1.

4.3. Краевые задачи для оператора D^4, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость

В этом пункте доказывается, что характеристический определитель тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда матрица коэффициентов краевых условий размера 4×8 состоит из двух квадратных диагональных матриц четвертого порядка. Одна из диагональных матриц является единичной, а диагональ второй диагональной матрицы состоит из чисел (40).

Если $A_{1234} \neq 0$ и $\Delta(\lambda) \equiv 0$, то из теоремы 1 следует, что

$$\begin{aligned} 0 \equiv \Delta(\lambda) = \det(A_1 \cdot B^T) = 1 + \frac{1}{2}\,(a_1 a_2 + a_1 a_4 + \\ + a_2\, a_3 + a_3 a_4) + a_1 a_2 a_3 a_4 + \frac{1}{4}\,(a_1\, a_2 + a_1 a_4 + \\ + a_2 a_3 + a_3 a_4 + 2\, a_1 a_3 + 2 a_2 a_4)\,(e^s + e^{-s}) \cos s + \\ + \frac{1}{4}\,(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_1\, a_2\, a_3 + a_1\, a_2\, a_4 + \\ + a_1\, a_3\, a_4 + a_2\, a_3\, a_4)\ (e^s + e^{-s} + 2\cos s)\,. \end{aligned} \tag{49}$$

Функции 1, $(e^s + e^{-s})\cos s$, and $(e^s + e^{-s} + 2\cos s)$ — линейно независимы. Поэтому характеристический определитель (49) тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_4 являются решениями следующей системы уравнений

$$\begin{aligned} & 2 + a_1 a_2 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 a_4 = 0, \\ & a_1 a_2 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + 2 a_1 a_3 + 2 a_2 a_4 = 0, \\ & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_4 + \\ & \quad + a_2\, a_3\, a_4 = 0. \end{aligned} \tag{50}$$

Решения системы уравнений (50) находятся непосредственными вычислениями. Этими решениями являются (40).

Если $A_{5678} \neq 0$ и $\Delta(\lambda) \equiv 0$, то из теоремы 1 следует, что

$$0 \equiv \Delta(\lambda) = \det(A_2 \cdot B^T). \tag{51}$$

Отсюда получаем систему уравнений (50), решениями которой являются числа (40).

Это доказывает теорему 2.

Замечание. Если

$$2+a_1a_2+a_1a_4+a_2a_3+a_3a_4+2a_1a_2a_3a_4=C\neq 0$$

в (50), то решение новой системы уравнений сводится к решению алгебраического уравнения шестой степени, которое не может быть решено в радикалах. Система уравнений (50) решается в радикалах, т.к. сводится к бикубическому уравнению.

Известно, что спектральные задачи, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость, существуют для дифференциальных уравнений любого четного порядка. Джоном Локкером поставлена следующая проблема (одиннадцатая проблема): существуют ли подобные задачи для дифференциальных уравнений нечетного порядка? В настоящем параграфе дается положительный ответ на этот вопрос. Доказано, что спектральные задачи, спектр которых заполняет всю комплексную плоскость, существуют для дифференциальных уравнений любого нечетного порядка. Параграф представляет собой изложение статьи [17].

В одиннадцатой главе своей монографии [13] Джон Локкер (John Locker) сформулировал 15 нерешенных проблем спектрального анализа двухточечных краевых задач. Одиннадцатая проблема [13, С. 296] представляет собой следующий вопрос: существует ли спектральная задача с дифференциальным уравнением

$$i^{-n}\,y^{(n)}(x)=\lambda\,y(x)=s^n\,y(x),\qquad x\in[0,1]\tag{52}$$

нечетного порядка n, краевыми условиями

$$U_j(y)=\sum_{k=0}^{n}a_{jk}\,y^{(k)}(0)+\sum_{k=0}^{n}a_{j\,k+n}\,y^{(k)}(1)\tag{53}$$
$$j=1,\ldots,n$$

и спектром, состоящим из конечного числа собственных значений?

В настоящей работе дан положительный ответ на этот вопрос. Доказана следующая

Теорема. *Спектр задачи с дифференциальным уравнением (52) порядка n и краевыми условиями (53) не может состоять из конечного числа собственных значений.*

Доказательство. Спектральная задача (52), (53) имеет следующий характеристический определитель $\Delta(\lambda)$:

$$\begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \ldots & U_1(y_n)\\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \ldots & U_2(y_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \ldots & U_n(y_n)\end{vmatrix},\tag{54}$$

где

$$y_j(x)=y_j(x,\lambda)=\begin{cases} x^{j-1}, & \text{если } \lambda=0,\\ e^{\omega_j s x}, & \text{если } \lambda\neq 0,\end{cases}$$
$$\omega_j=e^{\frac{\pi i}{2}+\frac{\pi i(j-1)}{2}},\qquad j=1,2,\ldots,n.$$

Разложив определитель (54) в сумму, получим:

$$\Delta(\lambda)=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_n\leqslant 2n}M_{ijk}\,Z_{ijk}(\lambda)=0.\tag{55}$$

Здесь через $M_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ обозначены миноры, составленные из i_1-го, i_2-го, …, i_n-го столбцов матрицы

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\,n+2} & \ldots & a_{1\,2n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\,n+2} & \ldots & a_{2\,2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n\,n+2} & \ldots & a_{n\,2n}\end{Vmatrix}$$

соответственно, а через $Z_{i_1,i_2,\ldots,i_n}$ — миноры, составленные из i_1-го, i_2-го, …, i_n-го столбцов матрицы

$$B=\|\ B_1\quad B_2\ \|,$$

где

$$B_1=\begin{Vmatrix} y_1(0) & y_1'(0) & y_1''(0) & y_1'''(0)\\ y_2(0) & y_2'(0) & y_2''(0) & y_2'''(0)\\ y_3(0) & y_3'(0) & y_3''(0) & y_3'''(0)\\ y_4(0) & y_4'(0) & y_4''(0) & y_4'''(0)\end{Vmatrix},$$

$$B_2=\begin{Vmatrix} y_1(1) & y_1'(1) & y_1''(1) & y_1'''(1)\\ y_2(1) & y_2'(1) & y_2''(1) & y_2'''(1)\\ y_3(1) & y_3'(1) & y_3''(1) & y_3'''(1)\\ y_4(1) & y_4'(1) & y_4''(1) & y_4'''(1)\end{Vmatrix}.$$

Пусть $\lambda\neq 0$. Тогда только первое и последнее слагаемые этой суммы представляют собой полиномы. Обозначим эти полиномы через $P(s)$:

$$P(s)\equiv\begin{vmatrix} y_1(0) & y_1'(0) & \ldots & y_1^{(n-1)}(0)\\ y_2(0) & y_2'(0) & \ldots & y_2^{(n-1)}(0)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_n(0) & y_n'(0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(0)\end{vmatrix}\equiv$$

$$\equiv\begin{vmatrix} y_1(1) & y_1'(1) & \ldots & y_1^{(n-1)}(1)\\ y_2(1) & y_2'(1) & \ldots & y_2^{(n-1)}(1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_n(1) & y_n'(1) & \ldots & y_n^{(n-1)}(1)\end{vmatrix}\equiv$$

$$\equiv\begin{vmatrix} 1 & \omega_1 s & \ldots & \omega_1^{n-1}s^{n-1}\\ 1 & \omega_2 s & \ldots & \omega_2^{n-1}s^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \omega_n s & \ldots & \omega_n^{n-1}s^{n-1}\end{vmatrix}\equiv P_0\,s^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

где

$$P_0 = \begin{vmatrix} 1 & \omega_1 & \dots & \omega_1^{n-1} \\ 1 & \omega_2 & \dots & \omega_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n & \dots & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix} = \text{const} \neq 0.$$

Обозначим сумму всех остальных слагаемых в (55) через $S(s)$. Функции $S(s)$ и $P(s)$ линейно независимы как функции от s. Каждое слагаемое суммы $S(s)$ содержит экспоненты $e^{\omega_j s x}$. Поэтому, если $S(s)$ не обращается в нуль тождественно, то характеристическая функция

$$\Delta(\lambda) = S(s) + (M_{1,2,\dots,n-1,n} + \\ + M_{n+1,n+2,\dots,2n-1,2n})\, P_0\, s^{\frac{n(n-1)}{2}} \tag{56}$$

имеет бесконечное число нулей (собственных значений задачи (52), (53)). Отсюда следует, что характеристический определитель (56) имеет конечное число собственных значений только в случае $S(s) \equiv 0$. А в этом случае характеристический определитель (56) тождественно равен функции

$$(M_{1,2,\dots,n-1,n} + M_{n+1,n+2,\dots,2n-1,2n})\, P_0\, s^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

которая не имеет ненулевых корней. Следовательно, задача (52), (53) не может иметь конечное число ненулевых собственных значений.

Покажем, что спектральная задача (52), (53) не может иметь и единственного собственного значения, равного нулю.

Предположим противное. Пусть задача (52), (53) имеет и единственное собственное значение, равное нулю. Поскольку у задачи (52), (53) нет ненулевых собственных значений, то $S(s) \equiv 0$. Кроме того,

$$(M_{1,2,\dots,n-1,n} + M_{n+1,n+2,\dots,2n-1,2n})\, P_0\, s^{\frac{n(n-1)}{2}} \not\equiv 0. \tag{57}$$

Иначе имели бы тождество $\Delta(\lambda) \equiv 0$, означающее, что каждое значение задачи (52), (53) является собственным. Из (57) следует, что хотя бы один из двух миноров $M_{1,2,\dots,n-1,n}$ или $M_{n+1,n+2,\dots,2n-1,2n}$ отличен от нуля.

Пусть $M_{1,2,\dots,n-1,n} \neq 0$. Тогда матрица с точностью до линейных преобразований строк имеет следующий вид:

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1\,n+1} & a_{1\,n+2} & \dots & a_{1\,2n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2\,n+1} & a_{2\,n+2} & \dots & a_{2\,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n\,n+1} & a_{n\,n+2} & \dots & a_{n\,2n} \end{matrix} \right\|.$$

Функция $S(s)$ имеет следующий вид:

$$S(\lambda) = M_{1,2,\dots n-1,n+1} \times \\ \times \begin{vmatrix} y_1(0) & \dots & y_{n-1}(0) & y_1(1) \\ y_1'(0) & \dots & y_{n-1}'(0) & y_1'(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(0) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(0) & y_1^{(n-1)}(1) \end{vmatrix} + \\ + M_{1,2,\dots n-1,n+2} \times \\ \times \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) & \dots & y_{n-1}(1) & y_n(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) & \dots & y_{n-1}'(1) & y_n'(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(0) & y_2^{(n-1)}(0) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(1) & y_n^{(n-1)}(0) \end{vmatrix} + \\ + \dots + \\ + M_{n+1,n+2,\dots,2n-1,2n} \times \\ \times \begin{vmatrix} y_1(1) & y_2(1) & \dots & y_n(1) \\ y_1'(1) & y_2'(1) & \dots & y_n'(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(1) & y_2^{(n-1)}(1) & \dots & y_n^{(n-1)}(1) \end{vmatrix}. \tag{58}$$

Известно, что любые две функции $f_{b_1,b_2}(s) = s^{b_1} e^{b_2 s}$, которые имеют либо различные b_1, либо различные b_2, являются линейно независимыми [31, C.101]. Отсюда следует, что все слагаемые в (58), стоящие перед $M_{i_1,i_2,\dots i_{n-1},i_n}$ линейно независимы.

Рассмотрим только те слагаемые в $S(\lambda)$, где в определителе $Z_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ есть только один столбец со значениями линейно независимых решений в точке $x = 1$, причем этот столбец есть

$$(y_1(1), y_1'(1), \dots, y_1^{(n-1)}(1))^T,$$

т.е. столбец со значениями первой функции $y_1(x)$ и ее производных:

$$M_{2,3,\dots,n-1,n,n+1} Z_{2,3,\dots,n-1,n\,n+1} + \\ + M_{1,3\dots,n-1,n,n+1} Z_{1,3,\dots,n-1,n\,n+1} + \\ + \dots + M_{1,2,\dots,n-1,n+1} Z_{1,2,\dots,n-1,n+1} = \\ = \left(\begin{vmatrix} y_2(0) & \dots & y_n(0) & y_1(1) \\ y_2'(0) & \dots & y_n'(0) & y_1'(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_2^{(n-1)}(0) & \dots & y_n^{(n-1)}(0) & y_1^{(n-1)}(1) \end{vmatrix} + \right. \\ + \begin{vmatrix} y_1(0) & \dots & y_1(1) & \\ y_1'(0) & \dots & yy_n'(0) & y_1'(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(0) & \dots & y_n^{(n-1)}(0) & y_1^{(n-1)}(1) \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} y_1(0) & \dots & y_{n-1}(0) & y_1(1) \\ y_1'(0) & \dots & y_{n-1}'(0) & y_1'(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(0) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(0) & y_1^{(n-1)}(1) \end{vmatrix}\Bigg) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \omega_2 & \omega_3 & \dots & \omega_{n-1} & \omega_n & \omega_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_2^{n-1} & \omega_3^{n-1} & \dots & \omega_{n-1}^{n-1} & \omega_n^{n-1} & \omega_1^{n-1} \end{vmatrix} + \right.$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_3 & \dots & \omega_{n-1} & \omega_n & \omega_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_1^{n-1} & \omega_3^{n-1} & \dots & \omega_{n-1}^{n-1} & \omega_n^{n-1} & \omega_1^{n-1} \end{vmatrix} + \\ + \dots +$$

$$\left. + \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \dots & \omega_{n-1} & \omega_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \dots & \omega_{n-1}^{n-1} & \omega_1^{n-1} \end{vmatrix} \right) s^{\frac{n(n-1)}{2}} e^{\omega_1 s}.$$

Как видим, во всех определителях–слагаемых, кроме первого, есть два совпадающих столбца. Поэтому, имеем:

$$M_{2,3,\dots,n-1,n,n+1} Z_{2,3,\dots,n-1,n\,n+1} + \\ + M_{1,3\dots,n-1,n,n+1} Z_{1,3,\dots,n-1,n\,n+1} + \\ + \dots + M_{1,2,\dots,n-1,n+1} Z_{1,2,\dots,n-1,n+1} = \\ = M_{2,3,\dots,n-1,n,n+1} Z_{2,3,\dots,n-1,n\,n+1} = \\ = M_{2,3,\dots,n-1,n,n+1} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} y_2(0) & \dots & y_n(0) & y_1(1) \\ y_2'(0) & \dots & y_n'(0) & y_1'(1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_2^{(n-1)}(0) & \dots & y_n^{(n-1)}(0) & y_1^{(n-1)}(1) \end{vmatrix} \times \\ \times s^{\frac{n(n-1)}{2}} e^{\omega_1 s}.$$

5. О конечном спектре

Рассмотрим краевую задачу с дифференциальным уравнением

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + \\ + a_n(x)\, y = \lambda\, y(x), \quad x \in [0,1] \tag{59}$$

и краевыми условиями

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{n} b_{jk}\, y^{(k)}(0) + \\ + \sum_{k=0}^{n} b_{jk+n} y^{(k)}(1) = 0, \; j = 1, 2, \ldots, n, \tag{60}$$

где $\operatorname{rank} ||b_{jk}||_{n\times 2n} = n$, $b_{jk} \in \mathbb{C}$.

Прямые и обратные задачи для краевых задач с бесконечным счетным спектром достаточно хорошо изучены. Случаи конечного спектра и спектра, который заполняет всю плоскость, изучены меньше. Примеры краевых задач, спектр которых полностью заполнят всю плоскость, для дифференциальных операторов любого четного порядка приведены В.А. Садовничим и Б.Е. Кангужиным [12], а для дифференциальных уравнений любого нечетного порядка приведены в работе [17]. Краевые задачи с конечным спектром изучены еще меньше. В [9, с. 556] и [13] показано, что конечного спектра для операторов дифференцирования второго и четвертого порядка с соответствующими краевыми условиями (60) быть не может. В 2008 году для уравнений Джон Локкер поставил проблему [13]: может ли краевая задача (59), (60) иметь конечный спектр? В том же году Т.Ш. Кальменовым и Д. Сураганом [32] для регулярных краевых задач с частными производными, в том числе и для задач (59), (60), было доказано, что их спектр либо пустое, либо бесконечное множество.

В [33] показано, что задача (59), (60) не может иметь иметь конечного вещественного спектра. Доказана более общая теорема для уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x,\lambda) y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x,\lambda) y' + \\ + a_n(x,\lambda) y = 0, \; x \in [0,1], \tag{61}$$

где функции $a_q(x,\lambda)$ $(q = 1, \ldots, n)$ являются непрерывными от x на отрезке [0,1] и полиномами от параметра λ.

Теорема 1. *Если функции $a_q(x,\lambda)$ имеют вид:*

$$a_q(x,\lambda) = \lambda^q \sum_{j=0}^{q} \lambda^{-j} a_{qj}(x), a_{q0}(x) = a_{q0} \cdot r(x), \\ r(x) > 0, \quad q = 1, 2, \ldots, n,$$

а полином $\pi(\omega) = \omega^n + a_{10}\, \omega^{n-1} + \cdots + a_{q0}$ не имеет кратных корней, то спектр краевой задачи (61), (60) представляет собой либо пустое, либо бесконечное множество.

Доказательство этой теоремы вытекает из работ В.Б. Лидского и В.А. Садовничего [29, 30], где показано, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (61), (60), удовлетворяющей условиям теоремы 1, является целой функцией класса K, а количество его корней (если они есть) бесконечно и, если характеристический определитель не тождественен нулю, имеет асимптотические представления, выписанные в работах [29, 30].

Для случая, когда в уравнении (62) кратность корня полинома $\pi(\lambda)$ равна его степени (порядку дифференциального уравнения), доказано, что конечный спектр может существовать. Было показано следующее: *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — некоторые вещественные числа. Существует краевая задача (61), (60), такая, что спектр этой задачи состоит только из наперед заданных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.*

Обозначим $(\lambda-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(\lambda-\lambda_n)$ через $p(\lambda)$, а $p(\lambda)-1$ — через d. Тогда характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи с дифференциальным уравнением

$$y''-2\,d\,y'+d^2\,y=0 \tag{62}$$

и краевыми условиями

$$U_1(y)=y(0)=0,\quad U_2(y)=y'(1)=0 \tag{63}$$

равен $p(\lambda)\,e^{d(\lambda)}$.

В этой же статье [33] был задан вопрос: может ли краевая задача (61), (60) иметь конечный спектр в случае, когда полином $\pi(\lambda)$ имеет кратные корни, но кратность корней меньше степени полинома. Покажем, что такое может быть.

Теорема 2. *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — некоторые комплексные числа. Существует краевая задача (61), (60), у которой полином $\pi(\lambda)$ имеет кратные корни, такая, что спектр этой задачи состоит только из наперед заданных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.*

Доказательство. Обозначим

$$(\lambda-\lambda_1)\,(\lambda-\lambda_2)\,\ldots\,(\lambda-\lambda_n)$$

через $p(\lambda)$, а $\dfrac{p(\lambda)-\pi}{2-\pi}$ — через a. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered} y^{(4)}-4\,a\,y'''+\left(6\,a^2+\frac{\pi^2}{2}\right)\,y''+\\ +\left(4a^3+a\pi^2\right)y'+\left(a^4+\frac{a^2\pi^2}{2}+\frac{\pi^4}{16}\right)y=0 \end{gathered} \tag{64}$$

с краевыми условиями

$$y(0)=0,\ \ y'(0)=0,\ \ y''(0)=0,\ \ y(1)=0. \tag{65}$$

Фундаментальная система решений такова ($b=\pi/2$):

$$y_1(x,\lambda)=e^{a\,x}\cdot\cos bx,\quad y_2(x,\lambda)=e^{a\,x}\cdot\sin bx,$$
$$y_3(x,\lambda)=x\cdot e^{a\,x}\cdot\cos bx,\quad y_4(x,\lambda)=x\cdot e^{a\,x}\cdot\sin bx.$$

Если $a=0$, то характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (64), (65) равен

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ a & \dfrac{\pi}{2} & 1 & 0\\ a^2-\dfrac{\pi^2}{4} & a\,\pi & 2\,a & \pi\\ 0 & e^a & 0 & e^a \end{vmatrix}=$$
$$=\Big(a(2-\pi)+\pi\Big)\,e^a.$$

Таким образом, если $a=0$, то характеристический определитель равен π (не обращается в нуль), а поэтому в случае $a=0$ задача (64), (65) не имеет собственных значений.

Если $a\neq 0$, то характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ задачи (64), (65) равен $\Delta(\lambda)=\Big(a(2-\pi)+\pi\Big)\,e^a$. Чтобы найти собственные значения, приравняем характеристический определитель к нулю. Так как $e^a\neq 0$, то $p(\lambda)=0$. Следовательно собственными значениями задачи (64), (65) являются только комплексные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Что и требовалось доказать.

Список литературы

[1] Марченко В.А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977. 329 с.

[2] Stone M.H. Irregular differential systems of order two and the related expansion problems // Trans. Amer. Math. Soc. 1927. V. 29. Pp. 23–53. DOI: 10.2307/1989277

[3] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.

[4] Ширяев Е.А., Шкаликов А.А. Регулярные и вполне регулярные дифференциальные операторы // Матем. заметки. 2007. Т. 81, № 4. С. 636–640. DOI: 10.4213/mzm3708

[5] Sadovnichii V.A., Sultanaev Ya.T., Akhtyamov A.M. General Inverse Sturm–Liouville Problem with Symmetric Potential // Azerbaijan Journal of Mathematics. 2015. V. 5, No. 2. Pp. 96–108. https://www.azjm.org/volumes/0502/0502-8.pdf

[6] Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Спектральные операторы. М.: Мир, 1974. 664 с.

[7] Дезин А.А. Спектральные характеристики общих граничных задач для оператора D^2 // Матем. заметки. 1985. Т. 37, № 2. С. 249–256. http://mi.mathnet.ru/mz5301

[8] Бияров Б.Н., Джумабаев С.А. Критерий вольтерровости краевых задач для уравнения Штурма–Лиувилля // Матем. заметки. 1994. Т. 56, № 1. С. 143–146. http://mi.mathnet.ru/mz2233

[9] Lang P., Locker J. Spectral theory of two-point differential operators determined by D^2. I. Spectral properties // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1989. V. 141, No. 2. Pp. 538–558. DOI: 10.1016/0022-247X(89)90196-0

[10] Ахтямов А.М. О вырожденных краевых условиях в задаче Штурма–Лиувилля // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 8. С. 1121–1123. DOI: 10.1134/S0374064116080148

[11] Ахтямов А.М. Вырожденные краевые условия оператора диффузии // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 11. С. 1546–1549. DOI: 10.1134/S0374064117110140

[12] Садовничий В.А., Кангужин Б.Е. О связи между спектром дифференциального оператора с симметрическими коэффициентами и краевыми условиями // ДАН СССР. 1982. Т. 267, № 2. С. 310–313. http://mi.mathnet.ru/dan45727

[13] Locker J. Eigenvalues and completeness for regular and simply irregular two-point differential operators. American Mathematical Society, 2006. P. 315.

[14] Locker J. Eigenvalues and completeness for regular and simply irregular two–point differential operators. American Mathematical Society, 2008. P. 177.

[15] Makin A.S. Two–point boundary–value problems with nonclassical asymptotics on the spectrum // Electronic Journal of Differential Equations. 2018. No. 95. P. 1–7. http://ejde.math.unt.edu/Volumes/2018/95/makin.pdf

[16] Akhtyamov A.M. On Degenerate Boundary Conditions for Operator D^4 // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2017. V. 216. P. 195–203. DOI: 10.1007/978-3-319-67053-9_18

[17] Ахтямов А.М. О спектре дифференциального оператора нечетного порядка // Матем. заметки. 2017. Т. 101, № 5. С. 643–646. DOI: 10.4213/mzm11549

[18] Ахтямов А.М. Вырожденные краевые условия для дифференциального уравнения третьего порядка // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 4. С. 427–434. DOI: 10.1134/S0374064118040015

[19] Джумабаев С.А., Кангужин Б.Е. Об одной нерегулярной задаче на конечном отрезке // Известия АН КазССР. Сер. физ.–мат.. 1988. № 1. С. 14–18.

[20] Маламуд М.М. О полноте системы корневых векторов оператора Штурма–Лиувилля с общими краевыми условиями // Функ. анализ. 2008. Т. 42, № 3. С. 45–52. DOI: 10.4213/faa2911

[21] Макин А.С. Об обратной задаче для оператора Штурма–Лиувилля с вырожденными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, №. 10. С. 1408–1411. DOI: 10.1134/S0374064114100173

[22] Юрко В.А. Обратная задача для дифференциальных операторов второго порядка с регулярными краевыми условиями // Матем. заметки. 1975. Т. 18, № 4. С. 569–576. http://mi.mathnet.ru/mz9971

[23] Akhtyamov A., Amram M., Mouftakhov A. On reconstruction of a matrix by its minors // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 2018. V. 49, No. 2. Pp. 268–321. DOI: 10.1080/0020739X.2017.1383526

[24] Гусейнов Г.Ш. Обратные спектральные задачи для квадратичного пучка операторов Штурма–Лиувилля на конечном интервале // Спектральная теория операторов и ее приложения. Баку. 1986. № 7. С. 51–101.

[25] Гусейнов И.М., Набиев И.М. Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов // Математический сборник. 2007. Т. 198, № 11. С. 47–66. DOI: 10.4213/sm1491

[26] Набиев И.М., Шукюров А.Ш. Решение обратной задачи для оператора диффузии в симметрическом случае // Изв. Сарат. ун–та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, № 4, ч. 1. С. 36–40. https://elibrary.ru/item.asp?id=13032931

[27] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с. http://elibrary.bsu.az/kitablar/1019.pdf

[28] Ланкастер П. Теория матриц / Пер. с англ. М.: Наука, 1982. 272 с.

[29] Лидский В.Б., Садовничий В.А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // Функциональный анализ и его приложения. 1967. Т. 1, № 2. С. 52–59. http://mi.mathnet.ru/faa2816

[30] Лидский В.Б., Садовничий В.А. Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций // Математический сборник. 1968. Т. 75, № 4. С. 558–566. http://mi.mathnet.ru/msb4001

[31] Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд.-во иностр. литературы, 1958. 474 с.

[32] Кальменов Т.Ш., Сураган Д. Определение структуры спектра регулярных краевых задач для дифференциальных уравнений методом антиаприорных оценок В.А. Ильина // Доклады Академии Наук. 2008. Т. 423, № 6. С. 730–732. https://elibrary.ru/item.asp?id=11634292

[33] Ахтямов А.М. О конечности спектра краевых задач // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 1. С. 138–140. DOI: 10.1134/S0374064119010151

ISSN 2658–5782 14 (2019), **3**, 184–201

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2019.3.025
DOI: 10.21662/mfs2019.3.025

Received: 24.11.2019
Accepted: 24.12.2019

Survey of studies on degenerate boundary conditions and finite spectrum

Akhtyamov A.M.

Mavlutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa, Russia
Bashkir State University, Ufa, Russia

It is shown that for the asymmetric diffusion operator the case when the characteristic determinant is identically equal to zero is impossible and the only possible degenerate boundary conditions are the Cauchy conditions. In the case of a symmetric diffusion operator, the characteristic determinant is identically equal to zero if and only if the boundary conditions are false–periodic boundary conditions and is identically equal to a constant other than zero if and only if its boundary conditions are generalized Cauchy conditions. All degenerate boundary conditions for a spectral problem with a third–order differential equation $y'''(x) = \lambda\, y(x)$ are described. The general form of degenerate boundary conditions for the fourth–order differentiation operator D^4 is found. 12 classes of boundary value eigenvalue problems are described for the operator D^4, the spectrum of which fills the entire complex plane. It is known that spectral problems whose spectrum fills the entire complex plane exist for differential equations of any even order. John Locker posed the following problem (eleventh problem): are there similar problems for odd–order differential equations? A positive answer is given to this question. It is proved that spectral problems, the spectrum of which fills the entire complex plane, exist for differential equations of any odd order. Thus, the problem of John Locker is resolved. John Locker posed a problem (tenth problem): can a spectral boundary–value problem have a finite spectrum? Boundary value problems with a polynomial occurrence of a spectral parameter in a differential equation are considered. It is shown that the corresponding boundary–value problem can have a predetermined finite spectrum in the case when the roots of the characteristic equation are multiple. If the roots of the characteristic equation are not multiple, then there can be no finite spectrum. Thus, John Locker's tenth problem is resolved.

Keywords: degenerate boundary conditions, finite spectrum, tenth and eleventh John Locker problems

References

[1] Marchenko V.A. [Sturm–Liouville operators and their applications] *Operatory Shturma–Liuvillya i ix prilozheniya*. Kiev: Naukova dumka, 1977. P. 329 (In Russian).

[2] Stone M.H. Irregular differential systems of order two and the related expansion problems. Trans. Amer. Math. Soc.. 1927. V. 29. Pp. 23–53.
DOI: 10.2307/1989277

[3] Naimark M.A. [Linear Differential Operators] *Linejnye differencial'nye operatory*. M.: Nauka, 1969. P. 526 (In Russian).

[4] Shiryaev E.A., Shkalikov A.A. Regular and completely regular differential operators. Mathematical Notes. 2007. V. 81, No. 4. Pp. 566–570.
DOI: 10.1134/S0001434607030352

[5] Sadovnichii V.A., Sultanaev Ya.T., Akhtyamov A.M. General Inverse Sturm–Liouville Problem with Symmetric Potential. Azerbaijan Journal of Mathematics. 2015. V. 5, No. 2. Pp. 96–108.
https://www.azjm.org/volumes/0502/0502-8.pdf

[6] Danford N., Shvarts Dzh.T. [Linear operators. Spectral Operators] *Linejnye operatory. Spektral'nye operatory*. M.: Mir, 1974. P. 664 (In Russian).

[7] Dezin A.A. Spectral characteristics of general boundary–value problems for operator D^2. Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR. 1985. V. 37, No. 2. Pp. 142–146.
DOI: 10.1007/BF01156759

[8] Biyarov B.N., Dzhumabaev S.A. A criterion for the Volterra property of boundary value problems for Sturm–Liouville equations. Mathematical Notes. 1994. V. 56, No. 1. Pp. 751–753.
DOI: 10.1007/BF02110567

[9] Lang P., Locker J. Spectral theory of two-point differential operators determined by D^2. I. Spectral properties. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1989. V. 141, No. 2. Pp. 538–558.
DOI: 10.1016/0022-247X(89)90196-0

[10] Akhtyamov A.M. On degenerate boundary conditions in the Sturm–Liouville problem. Differential Equations. 2016. V. 52, No. 8. C. 1085–1087.
DOI: 10.1134/S0012266116080140

[11] Akhtyamov A.M. Degenerate boundary conditions for the diffusion operator. Differential Equations. 2017. V. 53, No. 11. Pp. 1515–1518.
DOI: 10.1134/S0012266117110143

[12] Sadovnichii V.A.; Kanguzhin B.E. A connection between the spectrum of a differential operator with symmetric coefficients and the boundary conditions. Sov. Math.,Dokl.. 1982. V. 26. Pp. 614–618.
https://zbmath.org/?q=an:0521.34031

[13] Locker J. Eigenvalues and completeness for regular and simply irregular two–point differential operators. American Mathematical Society, 2006. P. 315.

[14] Locker J. Eigenvalues and completeness for regular and simply irregular two–point differential operators. American Mathematical Society, 2008. P. 177.

[15] Makin A.S. Two–point boundary–value problems with nonclassical asymptotics on the spectrum. Electronic Journal of Differential Equations. 2018. No. 95. P. 1–7.
http://ejde.math.unt.edu/Volumes/2018/95/makin.pdf

[16] Akhtyamov A.M. On Degenerate Boundary Conditions for Operator D^4. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2017. V. 216. Pp. 195–203.
DOI: 10.1007/978-3-319-67053-9_18

[17] Akhtyamov A.M. On the spectrum of an odd–order differential operator. Mathematical Notes. 2017. V. 101, No. 5. Pp. 755–758.
DOI: 10.1134/S0001434617050017

[18] Akhtyamov A.M. Degenerate Boundary Conditions for a Third–Order Differential Equation. Differential Equations. 2018. V. 54, No. 4. Pp. 419–426.
DOI: 10.1134/S0012266118040018

[19] Dzhumabaev S.A., Kanguzhin B.E. [On an irregular problem on a finite interval]. *Izvestiya AN KazSSR. Ser. fiz.–mat.* [Bulletin of the Academy of Sciences of the KazSSR. Ser. Fiz.–Mat.]. No. 1. Pp. 14–18 (In Russian).

[20] Malamud M.M. On the completeness of the system of root vectors of the Sturm–Liouville operator with general boundary conditions. Functional Analysis and Its Applications. 2008. V. 42, No. 3. Pp. 198–204.
DOI: 10.1007/s10688-008-0028-0

[21] Makin A.S. On an inverse problem for the Sturm–Liouville operator with degenerate boundary conditions. Differential Equations. 2014. V. 50, No. 10. Pp. 1402–1406.
DOI: 10.1134/S0012266114100176

[22] Yurko V.A. The inverse problem for differential operators of second order with regular boundary conditions.Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR. 1975. V. 18, No. 4. Pp. 928–932.
DOI: 10.1007/BF01153046

[23] Akhtyamov A., Amram M., Mouftakhov A. On reconstruction of a matrix by its minors. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 2018. V. 49, No. 2. Pp. 268–321.
DOI: 10.1080/0020739X.2017.1383526

[24] Guseinov I.M. [Inverse spectral problems for a quadratic pencil of Sturm–Liouville operators on a finite interval]. *Spektral'naya teoriya operatorov i ee prilozheniya. Baku* [Spectral theory of operators and its applications. Baku]. 1986. No. 7. Pp. 51–101 (In Russian).

[25] Guseinov I.M., Nabiev I.M. The inverse spectral problem for pencils of differential operators. Sb. Math. 2007. V. 198, No. 11. Pp. 1579–1598.
DOI: 10.1070/SM2007v198n11ABEH003897

[26] Nabiev I.M., Shukurov A.Sh. Solution of inverse problem for the diffusion operator in a symmetric case. Izv. Saratov Univ. (N.S.) Ser. Math. Mech. Inform. 2009. V. 9, No. 4. Pp. 36–40.
http://mi.mathnet.ru/eng/isu73

[27] Kamke E. [Handbook of Ordinary Differential Equations] *Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravneniyam*. M.: Nauka, 1976. P. 576 (in Russian).
http://elibrary.bsu.az/kitablar/1019.pdf

[28] Lankaster P. Theory of matrices. New York–London: Academic Press, 1969. P. 316.

[29] Lidskii V.B., Sadovnichii V.A. Regularized sums of zeros of a class of entire functions. Functional Analysis and Its Applications. 1967. V. 1, No. 2. Pp. 133–139.
DOI: 10.1007/BF01076085

[30] Lidskii V.B., Sadovnichii V.A. Asymptotic formulas for the zeros of a class of entire functions. Mathematics of the USSR–Sbornik. 1968. V. 4, No. 4. Pp. 519–530.
DOI: 10.1070/SM1968v004n04ABEH002812

[31] Kodington E.A., Levinson N. [Theory of ordinary differential equations] *Teoriya obyknovennyx differencial'nyx uravnenij*. M.: Izd.–vo inostr. literatury, 1958. P. 474 (In Russian).

[32] Kalmenov T.Sh., Suragan D. [Determining the structure of regular boundary value problems for differential equations by the method of non–a priori estimates V.A. Ilyina]. *Doklady Akademii Nauk* [Doklady Mathematics]. 2008. No. 6. Pp. 730–732 (In Russian).
https://elibrary.ru/item.asp?id=11634292

[33] Akhtyamov A.M. Finiteness of the Spectrum of Boundary Value Problems. Differential Equations. 2019. V. 55, No. 1. Pp. 142–142.
DOI: 10.1134/S0012266119010154