ISSN: 2658–5782

Номер 4 Октябрь–Декабрь 2019

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org

ИМех
им. Р.Р. Мавлютова

ISSN 2658–5782 Том 14 (2019), № 4, с. 274–278

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2019.4.035
DOI: 10.21662/mfs2019.4.035
УДК 517.958

Получена: 22.11.2019
Принята: 25.12.2019

Барохронное сдвиговое движение газа[1]

Юлмухаметова Ю.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Уравнения идеальной газовой динамики допускают 11-мерную алгебру Ли операторов дифференцирования первого порядка. Все подалгебры этой алгебры перечислены. Для всех 48 типов 4-х мерных подалгебр Хабировым С.В. вычислены базисы точечных инвариантов и рассмотрены три 4-х мерные подалгебры, производящие регулярные частично инвариантные решения в декартовых, цилиндрических и сферических координатах соответственно. В настоящей работе ставится задача нахождения решения 3-х мерных уравнений газовой динамики в декартовой системе координат с произвольным уравнением состояния, построенного на инвариантах 4-х мерной подалгебры. Базисные операторы рассматриваемой подалгебры являются комбинациями трансляций и галилеевых переносов. Инварианты этой подалгебры задают представление решения для неизвестных гидродинамических функций. Компоненты скорости являются линейными функциями по части пространственных переменных, при этом плотность и давление зависят только от времени. После подстановки представления решения изучена совместность полученной системы дифференциальных уравнений. Система совместна и имеет точное решение. Такое решение описывает изэнтропическое барохронное сдвиговое движение газа. Найдены уравнения мировых линий движения частиц газа. Установлены моменты коллапса частиц, их оказалось два. Найдены и записаны уравнения поверхностей коллапса. Для плоского случая доказано несколько утверждений о характере движении частиц газа.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, инварианты подалгебры, коллапс, точное решение, Якобиан, мировые линии

1. Введение

Для 3-х мерных уравнений газовой динамики с произвольным уравнением состояния разыскивается точное решение, построенное на инвариантах 4-х мерной подалгебры с номером 4.47 из работы [1]. Базисные операторы подалгебры являются комбинациями трансляций и галилеевых переносов. Инварианты этой подалгебры задают представление решения для уравнений газовой динамики в декартовой системе координат. Компоненты скорости являются линейными функциями по части пространственных переменных, при этом плотность и давление зависят только от времени. После подстановки представления решения изучена совместность полученной системы дифференциальных уравнений. Система совместна и имеет точное решение. Такое решение описывает изэнтропическое барохронное движение газа. Данное решение найдено в диссертационной работе [2], но не исследовано. В настоящей работе будет проведен анализ точных решений, найдены уравнения мировых линий движения частиц газа, определены моменты коллапса частиц газа.

2. Постановка задачи и нахождение точного решения

Уравнения газовой динамики в декартовой системе координат имеют вид:

$$\begin{gathered}
u_t + uu_x + vu_y + wu_z + \rho^{-1}p_x = 0,\\
v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \rho^{-1}p_y = 0,\\
w_t + uw_x + vw_y + ww_z + \rho^{-1}p_z = 0,\\
\rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z + \rho(u_x + v_y + w_z) = 0,\\
S_t + uS_x + vS_y + wS_z = 0,
\end{gathered} \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-29-10071_мк) и по госзаданию на 2019-2022 годы №0246-2019-0052.

© Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН
© Юлмухаметова Ю.В.

где t — время; $\vec{x} = (x, y, z)$ — декартовы независимые переменные; $u = u(t, \vec{x})$, $v = v(t, \vec{x})$, $w = w(t, \vec{x})$ — компоненты вектора скорости; $\rho = \rho(t, \vec{x})$ — плотность; $p = p(t, \vec{x})$ — давление; $S = S(t, \vec{x})$ — энтропия. Систему уравнений газовой динамики замыкает уравнение состояние $p = f(\rho, S)$, которое предполагается произвольным.

Рассмотрим 4-х мерную подалгебру из оптимальной системы с номером 4.47 из [1]. Подалгебру задают четыре оператора $X_1 + aX_3 = \partial_x + a\partial_z$, $X_2 = \partial_y$ (перенос по осям координат), $X_5 = t\partial_y + \partial_v$, $X_6 = t\partial_z + \partial_w$ (преобразование галилея), где a — некоторая постоянная. Инварианты подалгебры задают представление решения, которое записывается в виде:

$$\begin{gathered} u = u(t), \quad v = v(t, x, y, z), \\ w = \frac{z - ax}{t} + w_1, \quad p = p(t), \quad \rho = \rho(t), \end{gathered} \tag{2}$$

где $w_1(t)$ — произвольная функция времени. После подстановки представления решения (2) в уравнения газовой динамики (1) получим:

$$u = u_0, \quad w = \frac{z - ax + w_0}{t}, \quad S = S_0,$$

где u_0, w_0, S_0 — произвольные постоянные. При помощи преобразований галилеева переноса Γ_1 и Γ_3 из [3] постоянные u_0 и w_0 можно считать равными нулю. Перепишем известные функции, второе и четвертое уравнения из системы (1):

$$\begin{gathered} u = 0, \quad w = \frac{z - ax}{t}, \quad S = S_0, \\ v_t + v v_y + \frac{z - ax}{t} v_z = 0, \\ \rho_t + \rho\left(v_y + t^{-1}\right) = 0. \end{gathered}$$

Последние два уравнения имеют решение:

$$\rho = \frac{\rho_0}{t(t + t_0)}, \quad v = \frac{y + \Phi\left(x, \dfrac{z - ax}{t}\right)}{t + t_0},$$

где t_0, ρ_0 — произвольные постоянные. Ко всем найденным функциям применим преобразования растяжения $t \to t_0 t$, $\vec{x} \to t_0 \vec{x}$. Данные преобразования допускаются уравнениями газовой динамики, а значит могут быть применены и к их решениям. Получим

$$\begin{gathered} u = 0, \ v = \frac{y + \Phi\left(x, \dfrac{z - ax}{t}\right)}{t + 1}, \ w = \frac{z - ax}{t}, \\ \rho = \frac{\rho_0}{t(t + 1)}, \ S = S_0, \ p = f\left(S_0, \frac{\rho_0}{t(t + 1)}\right). \end{gathered} \tag{3}$$

Решение (3) уравнений газовой динамики описывает изэнтропическое барохронное движение частиц газа, для которых давление является функцией только времени. Данный вид движений газа был рассмотрен и изучен в диссертационной работе Чупахина А.П. [2]. Точные решения исследованы для подалгебры с номером 4.44 (нумерация из [4]) и только в двумерном случае с нулевой произвольной функцией. Исследования для данного решения уравнений газовой динамики не проводилось. Перейдем к описанию движения частиц газа.

3. Мировые линии движение частиц газа. Моменты коллапса

Мировые линии движения частиц газа задаются решением системы дифференциальных уравнений [5]:

$$\frac{dx}{dt} = 0, \ \frac{dy}{dt} = \frac{y + \Phi\left(x, \dfrac{z - ax}{t}\right)}{t + 1}, \ \frac{dz}{dt} = \frac{z - ax}{t}.$$

Решение имеет вид

$$x = x_0, \ y = (t + 1)v_0 - \Phi(x_0, w_0), \ z = ax_0 + tw_0,$$

где x_0, v_0, w_0 — лагранжевые координаты; v_0, w_0 — проекции скорости на оси Oy и Oz соответственно. Траектории частиц являются плоскими линиями, лежащими в некоторой плоскости $x = x_0$. Якобиан перехода от эйлеровых к лагранжевым переменным равен:

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\Phi_{x_0} & t + 1 & -\Phi_{w_0} \\ a & 0 & t \end{vmatrix} = t(t + 1).$$

Якобиан принимает нулевые значения при $t = 0$, $t = -1$. Это моменты коллапса частиц газа.

При $t = 0$ ранг матрицы Якоби равен 2. Значит коллапс происходит на поверхности. Уравнение поверхности имеет вид $z = ax$. В этот момент времени положение частиц газа задается равенствами

$$x = x_0, \quad y = v_0 - \Phi(x_0, w_0), \quad z = ax_0.$$

Обозначим через $\vec{q} = (0, v_0, w_0)$ направляющий вектор траекторий, через $\vec{n} = (a, 0, -1)$ — вектор нормали к поверхности коллапса. Заметим, что косинус угла между вектором нормали и направляющим вектором

$$\cos(\vec{q}, \vec{n}) = -\frac{w_0}{\sqrt{a^2 + 1}\sqrt{v_0^2 + w_0^2}}$$

не зависит от x_0. При $w_0 = 0$ частицы движутся в плоскости коллапса.

При $t = -1$ ранг матрицы Якоби также равен 2 и коллапс происходит на поверхности $y = -\Phi(x, ax - z)$. В этот момент времени положение частиц задается равенствами

$$x = x_0, \quad y = -\Phi(x_0, w_0), \quad z = ax_0 - w_0.$$

Таким образом, моменты коллапса частиц разбивают временную ось на три участка $t < -1$, $-1 < t < 0$, $t > 0$. В каждой области существует конкретное решение, отличное от другого.

Задача. Пусть частица газа в момент времени $t = t_1$ находится в точке с координатами (x^1, y^1, z^1). Требуется определить, где будет находиться частица в момент времени $t \neq t_1$.

Решение. В начальный момент времени $t = t_1$ частица находится в точке с координатами

$$x|_{t=t_1} = x^1, \quad y|_{t=t_1} = y^1, \quad z|_{t=t_1} = z^1,$$

где

$$\begin{gathered} x^1 = x_0, \quad y^1 = (t_1 + 1)v_0 - \Phi(x_0, w_0), \\ z^1 = ax_0 + w_0 t_1. \end{gathered} \tag{4}$$

В другой момент времени $t \neq t_1$ частица будет находиться в точке с координатами (x, y, z), где $x = x_0$, $y = (t+1)v_0 - \Phi(x_0, v_0)$, $z = ax_0 + tw_0$. Из последних равенств выразим лагранжевые координаты через эйлеровые:

$$x_0 = x, \quad v_0 = \frac{y + \Phi(x_0, w_0)}{t+1}, \quad w_0 = \frac{z - ax_0}{t}.$$

Подставим значение лагранжевых координат в (4):

$$\begin{gathered} x^1 = x, \ y^1 = \frac{t_1+1}{t+1} y + \frac{t_1 - t}{t+1} \Phi\left(x, \frac{z - ax}{t}\right), \\ z^1 = ax + \frac{t_1}{t}(z - ax). \end{gathered} \tag{5}$$

Формулы (5) задают связь начального положения частицы в момент времени t_1 и положения в момент времени t:

$$\begin{gathered} x = x^1, \ y = \frac{t+1}{t_1+1} y^1 + \Phi\left(x^1, \frac{z^1 - ax^1}{t_1}\right) \frac{t - t_1}{t_1 + 1}, \\ z = ax^1 + t\frac{z^1 - ax^1}{t_1}. \end{gathered}$$

Последние равенства задают поверхность

$$y = \frac{t+1}{t_1+1} y^1 + \frac{t - t_1}{t_1+1} \Phi\left(x, \frac{z - ax}{t_1}\right).$$

Заметим, что моменты времени $t = -1$ и $t = 0$ являются моментами коллапса частиц газа. Они разбивают временную ось на три интервала. В каждом интервале своя картина движения частиц вплоть до момента коллапса. После коллапса движения нет. Поэтому момент времени t_1 нельзя брать в момент коллапса ($t_1 \neq -1$ или 0).

4. Описание движения для положительных времен

Рассмотрим случай, когда $0 \leqslant t < \infty$. Для простоты описания рассмотрим движение в плоскости $x = 0$. В момент времени $t = 0$ все частицы находятся на оси Oy. В точке $y = y_0$ находятся частицы, лагранжевые координаты которых удовлетворяют равенству $y_0 = v_0 - \Phi(0, w_0)$. То есть равенство задает однопараметрическое семейство кривых в пространстве скоростей (v_0, w_0). Для данного случая уравнения мировых линий имеют вид:

$$y = (t+1)v_0 - \Phi(0, w_0), \ z = w_0 t. \tag{6}$$

Траектории частиц на плоскости yOz задаются равенством

$$z = \operatorname{tg} \alpha_0 (y - y_0),$$

где $\operatorname{tg} \alpha_0 = w_0 v_0^{-1}$ — угол наклона траектории к оси Oy. Если постоянную α_0 фиксировать, то траектории есть параллельные прямые.

Утверждение. Частицы с различными начальными данными в момент времени $t = t_1 \neq 0$ не могут находиться в одно и то же время $t > t_1$ в одной и той же точке плоскости yOz.

Доказательство. Рассмотрим две частицы с различными начальными положениями на оси Oy: $y_{01} \neq y_{02}$, где $(y_{01}, 0)$ — положение первой частицы при $t = 0$; $(y_{02}, 0)$ — положение второй частицы при $t = 0$. Траектории этих частиц задаются равенствами:

$$z = (y - y_{01}) \operatorname{tg} \alpha_1, \quad z = (y - y_{02}) \operatorname{tg} \alpha_2,$$

где $\operatorname{tg} \alpha_1 \neq \operatorname{tg} \alpha_2$, иначе траектории параллельны и значит не пересекаются. Предположим, что траектории пересекаются. Значит выполняется равенство

$$\operatorname{tg} \alpha_1 (y - y_{01}) = \operatorname{tg} \alpha_2 (y - y_{02}).$$

Откуда

$$\begin{gathered} y = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 y_{01} - \operatorname{tg} \alpha_2 y_{02}}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}, \\ z = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 (y_{01} - y_{02})}{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}. \end{gathered} \tag{7}$$

Координаты точек пересечения траекторий задаются формулами (7). Из уравнений мировых линий движения частиц (6) определим моменты времени t_1 и t_2:

$$t_1 = \frac{z}{w_{01}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 (y_{01} - y_{02})}{v_{01}(\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2)},$$

$$t_2 = \frac{z}{w_{02}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 (y_{01} - y_{02})}{v_{02}(\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2)},$$

где t_1, t_2 — моменты времени, когда частицы находятся в точке пересечения траекторий. Если $t_1 = t_2$, то $\operatorname{tg}\alpha_2 v_{01}^{-1} = \operatorname{tg}\alpha_1 v_{02}^{-1}$. Откуда $w_{01} = w_{02}$. Из уравнения связи лагранжевых координат $y_0 = v_0 - \Phi(0, w_0)$ следует, что $y_{01} - y_{02} = v_{01} - v_{02}$. Тогда $t_1 = t_2 = -1$, что противоречит рассматриваемому случаю $t \geqslant 0$. Значит $t_1 \neq t_2$ и две различные частицы не могут находиться в одной точке в одно и то же время.

5. Заключение

В работе представлен механизм нахождения точного решения уравнений газовой динамики, построенного на инвариантах 4-х мерной подалгебры. Записаны уравнения мировых линий частиц. Найден Якобиан перехода от эйлеровых к лагранжевым переменным. Установлены моменты коллапса частиц газа. Их оказалось два. Записаны уравнения поверхностей коллапса. Найдена формула связи начального положения частицы и положения в следующий момент времени. Для плоского случая доказано, что две различные частицы не могут находиться в одной точке плоскости.

Список литературы

[1] Хабиров С.В. Простые частично инвариантные решения // Уфимск. матем. журн. 2019. Т. 11, № 1. С. 87–98. http://mi.mathnet.ru/ufa463

[2] Чупахин А.П. Барохронные движения газа : дис. … доктора физ.-мат. наук: 01.02.05 / Чупахин Александр Павлович. Новосибирск, 1999. 171 с.

[3] Хабиров С.В. Аналитические методы в газовой динамике. Уфа: Гилем, 2003. 192 с.

[4] Овсянников Л.В., Чупахин А.П. Регулярные частично инвариантные подмодели уравнений газовой динамики // Прикладная математика и механика. 1996. Т. 60, № 6. С. 990–999.

[5] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003 (Киров: ФГУИПП Вятка). 335 с.

ISSN 2658–5782 14 (2019), **4**, 274–278

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2019.4.035
DOI: 10.21662/mfs2019.4.035

Received: 22.11.2019
Accepted: 25.12.2019

Barochronous shear gas motion

Yulmukhametova Yu.V.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa , Russia

The equations of ideal gas dynamics admit an 11-dimensional Lie algebra of first-order differentiation operators. All subalgebras of this algebra are listed. Khabirov S.V. for all 48 types of 4-dimensional subalgebras, the bases of point invariants are calculated and three 4-dimensional subalgebras are considered that produce regular partially invariant solutions in Cartesian, cylindrical and spherical coordinates, respectively. In this paper, we pose the problem of finding the solution of 3-dimensional equations of gas dynamics in a Cartesian coordinate system with an arbitrary equation of state, built on invariants of a 4-dimensional subalgebra. The basic operators of the considered subalgebra are combinations of translations and Galilean transfers. The invariants of this subalgebra define a representation of the solution for unknown hydrodynamic functions. Speed components are linear functions in terms of spatial variables. Moreover, density and pressure depend only on time. After substituting the solution representation, we studied the compatibility of the resulting system of differential equations. The system is collaborative and has an exact solution. Such a solution describes the isentropic barochronous shear motion of a gas. The equations of the world lines of motion of gas particles are found. The moments of particle collapse are established. There were two of them. The equations of collapse surfaces are found and written. For the flat case, several statements about the nature of the motion of gas particles are proved.

Keywords: equations of gas dynamics, invariants of a subalgebra, collapse, exact solution, Jacobian, world lines

References

[1] Khabirov S.V. Simple partially invariant solutions // Ufa Mathematical Journal. 2019. V. 11, No.1. Pp. 90–99. DOI: 10.13108/2019-11-1-90

[2] Chupakhin A.P. [Barochronous gas movements] *Baroxronnye dvizheniya gaza*: dis. ... doktora fiz.-mat. nauk: 01.02.05 / Chupakhin Aleksandr Pavlovich. Novosibirsk, 1999. 171 p. (in Russian).

[3] Khabirov S.V. [Analytical methods in gas dynamics] *Analiticheskie metody v gazovoj dinamike*. Ufa: Gilem, 2003. 192 p. (in Russian).

[4] Ovsyannikov L.V., Chupakhin A.P. [Regular partially invariant submodels of gas dynamics equations] *Regulyarnye chastichno invariantnye podmodeli uravnenij gazovoj dinamiki* // Prikladnaya matematika i mexanika. 1996. V. 60, No. 6. Pp. 990–999 (in Russian).

[5] Ovsyannikov L.V. [Lectures on the basics of gas dynamics] *Lekcii po osnovam gazovoj dinamiki*. M.; Izhevsk: Institut komputer. issled., 2003 (Kirov: FGUIPP Vyatka). 335 p. (in Russian).