Исследование дробно-дифференциальной модели однофазной фильтрации с потенциалом Рисса

Белевцов Н.С., Лукащук С.Ю.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Математическое моделирование фильтрационных процессов с использованием дробного интегро-дифференцирования [1] имеет актуальное значение для моделирования течения флюидов в сложных неоднородных нефтегазоносных пластах с естественной и техногенной трещиноватостью. Результаты такого моделирования играют важную роль при прогнозировании освоения залежей трудноизвлекаемых запасов углеводородов. При этом математические модели фильтрации с дробными производными по пространственным переменным, которые позволяют более естественным образом описывать процессы течения в трещиновато-пористых пластах с эффектами дальнего взаимодействия, существенно менее изучены, чем модели с дробными производными по времени, учитывающие эффекты степенной памяти.

Для построения модели многофазной фильтрации используется дробно-дифференциальное обобщение закона Дарси с потенциалом Рисса:

$$\mathbf{u}_l = -\frac{k_\alpha k_{rl}}{\mu_l}\nabla\left(R^\alpha p_l\right), \quad \alpha \in (0,1),$$

где $\mathbf{u}_l$ – вектор скорости фильтрации фазы l, μ_l – вязкость фазы l, k_α – дробно-дифференциальный аналог проницаемости пористой среды, k_{rl} – относительная фазовая проницаемость для фазы l, p_l – давление фазы l, t – время, а R^α – потенциал Рисса [1]. Подобный закон Дарси используется, например, в работе [2].

Рассматривается частный случай плоского радиального течения $p_l = p_l(t,r)$, актуальный при исследовании особенностей течения флюидов в прискважинной зоне, при котором потенциал Рисса, в соответствии с работой [3], допускает одномерное представление:

$$R^\alpha p_l(t,r) = 2^{-\alpha}\left[I_{0+}^{\alpha/2} s^{-\frac{\alpha}{2}} I_{-}^{\alpha/2} p_l(t,s)\right]\left(r^2\right),$$

где $I_{0+}^{\alpha/2} f(s)$, $I_{-}^{\alpha/2} f(s)$ – левосторонний и правосторонний дробные интегралы Римана-Лиувилля [1].

Подстановка предложенного закона Дарси в уравнения массового баланса приводит к многомерной модели фильтрации с потенциалом Рисса. В данной работе рассматривается случай однофазной фильтрации и модель принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \nabla\left[f(p,r)\nabla\left(R^\alpha p\right)\right] + q,$$

где q – плотность объемных источников.

Рассматриваются различные постановки начально-краевых задач представленной модели, актуальные для практического применения. Обсуждаются вопросы построения аналитических решений соответствующих начально-краевых задач.

Показано, что при $f(p,r) = const$, применение метода разделения переменных $\big(p(t,r) = T(t)w(r)\big)$ к представленной выше модели приводит к задаче типа Штурма-Лиувилля для дробно-дифференциального обобщения модифицированного уравнения Бесселя:

$$r^2\frac{d^2}{dr^2}\big(R^\alpha w(r)\big) - r\frac{\partial}{\partial r}\big(R^\alpha w(r)\big) - \lambda^2 r^2 w(r) = 0.$$

Обсуждаются вопросы построения фундаментального решения рассматриваемой модели. Показано, что для частных случаев модели однофазной фильтрации с потенциалом Рисса, представляющих собой дробно-дифференциальные обобщения уравнений Пуассона и Гельмгольца, фундаментальные решения представляются через функции Фокса [4].

Рассматриваются автомодельные решения предложенной модели, которые могут быть построены с использованием интегрального преобразования Меллина и записаны в виде контурного интеграла Меллина-Барнса, что также допускает их возможное представление через функции Фокса.

Обсуждаются физические особенности фильтрационных течений, соответствующих построенным решениям.

Список литературы

[1] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

[2] Caffarelli L., Vazquez J.L. Nonlinear porous medium flow with fractional potential pressure // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 2011. Vol. 202, No. 2. P. 537–565.

[3] Рубин Б.С. Одномерное представление, обращение и некоторые свойства потенциалов Рисса от радиальных функций // Математические заметки. 1983. Т. 34. С. 521–533.

[4] Kilbas A.A., Saigo M. H-transforms: Theory and Applications. London: CRC Press, 2004. 398 p.