 DOI: 10.21662/mfs2020.1-2

Соотношения между градиентами перемещения

Дуйшеналиев Т.Б.*, Меркурьев И.В.*, Дуйшембиев А.С.**

* Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва
** Кыргызский государственный технический университет им. И. Раззакова, Бишкек

Векторы перемещения обычно задаются в следующих двух видах [1]:

$$u_i(x_1, x_2, x_3)= x_i-X_i(x_1, x_2, x_3), \; x_i\in v, \qquad (1)$$

$$u_i(X_1, X_2, X_3)= x_i(X_1, X_2, X_3)-X_i, \; X_i\in V, \qquad (2)$$

где X_i и x_i - координаты начала и конца вектора перемещения u_i. Пусть функции u_i однозначны и имеют непрерывные частные производные по координатам. Обозначим, соответственно, через e, g пространственный и материальный градиенты перемещения, и напишем выражения (1), (2) в дифференциальной форме:

$$du=e\cdot dx, \qquad (3)$$

$$du=g\cdot dX. \qquad (4)$$

Уравнения (1), (2) также представим в дифференциальной форме:

$$dX=(\delta-e)\cdot dx, \qquad (5)$$

$$dx=(\delta+g)\cdot dX, \qquad (6)$$

где δ - тензор Кронекера. Последние два уравнения можно написать и так:

$$dx=(\delta-э)^{-1}\cdot dX,$$

$$dX=(\delta+\exists)^{-1}\cdot dx.$$

Подставим это в уравнения (3), (4):

$$du=e\cdot(\delta-e)^{-1}\cdot dX, \qquad (7)$$

$$du=g\cdot(\delta+g)^{-1}\cdot dx. \qquad (8)$$

Из уравнений (3), (8) и (4), (7) следуют:

$$e=g\cdot(\delta+g)^{-1}, \qquad (9)$$

$$g=e\cdot(\delta-e)^{-1}. \qquad (10)$$

Роль этих соотношений неоценима в тех случаях, когда изучаемое преобразование не обращаемо. Допустим, преобразование дано в координатах X_i и не найдено его обращение. В таком случае, пространственный градиент остается не определенным. Неопределимыми становятся и деформации, вычисляемые элементами пространственного градиента перемещения. При таком положении вещей роль соотношения (9) неоценима, ибо оно определяет пространственный градиент, тем самым, делает вычисляемыми те уравнения, в которых фигурируют элементы этого градиента. Рассмотрим преобразование:

$$x_1=\sqrt{(X_1^2+X_2^2+X_3^2)},$$

$$x_2=\arccos(X_3/\sqrt{(X_1^2+X_2^2+X_3^2)}),$$

$$x_3=\mathrm{arctg}(X_2/X_1), \; X_i\in V. \qquad (11)$$

Пусть в области V, где определены уравнения (11), удовлетворено условие однозначности круговых функций. Этому преобразованию соответствуют функции перемещения:

$$u_1=\sqrt{(X_1^2+X_2^2+X_3^2)}-X_1,$$

$$u_2=\arccos(X_3/\sqrt{(X_1^2+X_2^2+X_3^2)})-X_2,$$

$$u_3=\mathrm{arctg}(X_2/X_1)-X_3. \qquad (12)$$

В любой точке области V можно определить материальный градиент перемещения. Вычислим его в точке с координатами:

$$X_1=5, \; X_2=2.5, \; X_3=9 \qquad (13)$$

$$g=\begin{pmatrix} -.528 & .236 & .849 \\ .072 & -.964 & -.05 \\ -.08 & .16 & -1 \end{pmatrix} \qquad (14)$$

Преобразование (11) обратимо:

$$X_1=x_1\sin x_2\cos x_3, \; X_2=x_1\sin x_2\sin x_3, \; X_3=x_1\cos x_2. \qquad (15)$$

Функции перемещения этого преобразования:

$$u_i=x_i-X_i(x_1, x_2, x_3). \qquad (16)$$

Пространственный градиент перемещения:

$$e_{ij}=\partial u_i/\partial x_j. \qquad (17)$$

Определим из преобразования (11) пространственные координаты:

$$x_1=10.595, \; x_2=.555, \; x_3=.464, \qquad (18)$$

соответствующие материальным координатам (13). Непосредственное вычисление пространственного градиента (17) в точке (18) приводит к тензору:

$$e=\begin{pmatrix} .528 & -8.05 & 2.5 \\ -.236 & -3.025 & -5 \\ -.849 & 5.59 & 1 \end{pmatrix}$$

К этому же тензору приходим и из уравнения (9):

$$e=g\cdot(\delta+g)^{-1}=\begin{pmatrix} .528 & -8.05 & 2.5 \\ -.236 & -3.025 & -5 \\ -.849 & 5.59 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычисления пространственного градиента соотношением (9) не требует нахождения поля перемещения (16), а также обращения преобразования (11). Это определение проводимо и для преобразований, обращения которых не известны.

Список литературы:

[1] Дуйшеналиев Т.Б. Неклассические решения механики деформируемого тела. – М.: Издательство МЭИ, 2017. – 400 с.