Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения, моделирующего электромагнитные колебания[1]

Сидоров С.Н.

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований РБ, Стерлитамак

Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = F(x, y, t), \tag{1}$$

здесь

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} - u_{yy} + bu, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} + bu, & t < 0, \end{cases}$$

$$F(x, y, t) = \begin{cases} F_1(x, y, t), & t > 0, \\ F_2(x, y, t), & t < 0, \end{cases}$$

в области $Q = \{(x, y, t) |\, (x, y) \in D,\, t \in (-\alpha, \beta)\}$, где $D = \{(x, y) |\, 0 < x < p,\, 0 < y < q\}$, α, β, p, q – заданные положительные действительные числа, b – заданное любое действительное число, $F_i(x, y, t)$ $(i = 1, 2)$ – заданные функции, и поставим следующую задачу.

Задача. *Найти функцию $u(x, y, t)$, определенной в области Q и удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x, y, t) \in C(\overline{Q}) \cap C_t^1(Q) \cap C_{x,y}^1(\overline{Q}) \cap C_{x,y}^2(Q_+) \cap C^2(Q_-); \tag{2}$$

$$Lu(x, y, t) \equiv F(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Q_+ \cup Q_-; \tag{3}$$

$$u(x, y, t)\big|_{x=0} = u(x, y, t)\big|_{x=p} = 0, \quad -\alpha \leqslant t \leqslant \beta; \tag{4}$$

$$u(x, y, t)\big|_{y=0} = u(x, y, t)\big|_{y=q} = 0, \quad -\alpha \leqslant t \leqslant \beta; \tag{5}$$

$$u(x, y, t)\big|_{t=-\alpha} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}, \tag{6}$$

где $F(x, y, t)$ и $\psi(x, y)$ – заданные достаточно гладкие функции, $Q_- = Q \cap \{t < 0\}$, $Q_+ = Q \cap \{t > 0\}$.

Отметим, что подобная задача имеет практический интерес в электродинамике. Я.С. Уфлянд [1] задачу о распространении электрических колебаний в составных линиях, когда на участке полубесконечной линии пренебрегается потерями, а остальная часть линии рассматривается как кабель без утечки, свел к решению уравнения смешанного параболо-гиперболического типа.

О.А. Ладыженская и Л. Ступялис [2] в многомерном пространстве рассмотрели начально-граничные краевые задачи на сопряжения для параболо-гиперболических уравнений, которые возникают при изучении задачи о движении проводящей жидкости в электромагнитном поле.

В отличие от указанных выше статей в данной работе в задаче условия сопряжения заданы не по пространственной переменной, а по временной переменной, т.е. на прямой $t = 0$.

Начально-граничные задачи для двумерного однородного и неоднородного уравнений смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области были изучены в работах К.Б. Сабитова [3 – 8].

Используя идеи работ [3, 8], установлен критерий единственности решения задачи задачи (2) – (6). Решение задачи построено в явной форме в виде суммы ортогонального двумерного ряда. При обосновании сходимости ряда впервые возникла проблема малых знаменателей от двух натуральных аргументов, затрудняющая сходимость построенного ряда. В связи с этим для доказательства равномерной сходимости рядов установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей, которые позволили доказать существование регулярного решения.

Список литературы

[1] Уфлянд Я.С. К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях // Инженер.-физ. журн. 1964. Т. 7. № 1. С. 89–92.

[2] Ладыженская О.А., Ступялис Л. Об уравнениях смешанного типа // Вестник ЛГУ. Серия мат., мех. и астр. 1965. Т. 19. № 4. С. 38–46.

[3] Сабитов К.Б. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. М: Наука, 2016. 272 с.

[4] Сабитов К.Б. Начально-граничная и обратные задачи для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического уравнения // Матем. заметки. 2017. Т. 102. Вып. 3. С. 415–435.

[5] Сидоров С.Н. Нелокальная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // Доклады АМАН. 2012. Т. 14. № 3. С. 34–44.

[6] Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. Об одной нелокальной задаче для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 3. С. 356–365.

[7] Сидоров С.Н. Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа со степенным вырождением // Известия вузов. Математика. 2015. № 12. С. 55–64.

[8] Sabitov K.B., Sidorov S.N. Initial-Boundary-Value Problem for Inhomogeneous Degenerate Equations of Mixed Parabolic-Hyperbolic Type // Journal of Mathematical Sciences. 2019. V. 236, Issue 6. P. 603–640.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-31-60016)