

## Точные решения уравнений гидродинамического типа<sup>1</sup>

Сираева Д.Т.\*

\*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Уравнения гидродинамического типа возникают в различных физико-математических науках: газовой динамике, многофазных системах механики сплошной среды и других. Система содержит уравнение сохранения импульса, уравнение неразрывности и уравнение сохранения энергии, вместо которого записано уравнение для давления [1, 2]

$$\begin{aligned} D\mathbf{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \quad D\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ Dp + \rho f_p \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $D = \partial_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$  — оператор полного дифференцирования;  $\nabla = \partial_x$  — градиент по пространственным независимым переменным  $\vec{x}$ ;  $\vec{u}$  — вектор скорости;  $\rho$  — плотность;  $p$  — давление;  $t$  — время. Уравнение состояния имеет специальный вид [1]

$$p = f(\rho) + h(S), \quad (2)$$

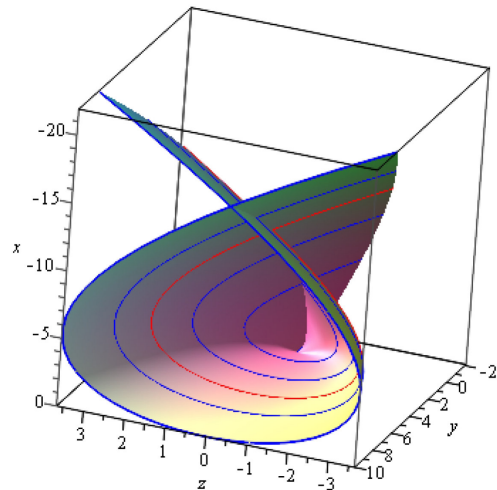
в силу которого последнее уравнение системы (1) может быть записано для энтропии [3]

$$DS = 0.$$

Применение методов группового анализа к дифференциальным уравнениям позволяет систематически получать новые точные решения [4]. Система (1) с учетом уравнения состояния (2) допускает двенадцатимерную алгебру Ли  $L_{12}$ . Алгебра Ли расширяется за счет оператора дифференцирования по давлению  $Y_1 = \partial_p$ . Оптимальная система неподобных подалгебр алгебры Ли  $L_{12}$  построена в работе [5]. По двумерной подалгебре 2.36 [5] построена инвариантная подмодель ранга 2 канонического вида эволюционного типа. В случае переопределенной системы найдены два типа точных решений. В частном случае решение [6] задает движение частиц под действием поршня

$$\begin{aligned} u = z - \frac{1}{6}(t^3 + 3t)\left[\frac{2}{5}k^2t^6 - 12ky\right]^{\frac{1}{2}}, \\ v = \frac{1}{5}kt^5, \\ w = \frac{1}{2}(t^2 - 1)\left[\frac{2}{5}k^2t^6 - 12ky\right]^{\frac{1}{2}}, \\ \rho^{-2} = \frac{2}{5}k^2t^6 - 12ky, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Работа поддержана грантом РФФИ (№ 18-29-10071) и частично средствами государственного бюджета по госзаданию (№ 0246-2019-0052)



$$p = x - tz + \frac{1}{6}t^4\rho^{-1}.$$

С помощью 3-мерных подалгебр [5] вычисляются инвариантные подмодели ранга 1, представляющие собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для пяти построенных подмоделей найдены точные решения. По одному решению инвариантной подмодели ранга 1 описано движение частиц в пространстве: построены траектории, звуковая поверхность и звуковой коноид.

### Список литературы

- [1] Овсянников Л. В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикладная математика и механика. Москва: РАН, 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
- [2] Хабиров С. В. Лекции. Аналитические методы в газовой динамике. Уфа. БГУ, 2013. 224 с.
- [3] Овсянников, Л. В. Лекции по основам газовой динамики. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. — 336 с.
- [4] Овсянников, Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.
- [5] Сираева Д. Т. Оптимальная система неподобных подалгебр суммы двух идеалов // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6, вып. 1. С. 94–107.
- [6] Сираева, Д. Т. Инвариантная подмодель ранга 2 на подалгебре из линейной комбинации переносов для модели гидродинамического типа / Д. Т. Сираева, С. В. Хабиров // Челябинский физико-математический журнал. — 2018. — Т. 3, вып. 1. — С. 38–57.