Об инвариантных движениях частиц общей трехмерной подгруппы группы всех пространственных переносов [1]

Хабиров С.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Уравнения механики сплошной среды инвариантны относительно группы Галилея расширенной растяжением. Группа содержит абелеву подгруппу переносов по пространству, включая равномерное движение начала отчета (галилеевы преобразования). Изучена алгебра Ли L_{11} этой группы и построена оптимальная система подалгебр с точностью до внутренних автоморфизмов [**?**]. 6-и мерной абелевой подгруппе пространственных переносов соответствует абелева подалгебра, структура которой содержит 13 не подобных подалгебр [**?**]

$$X_j = \partial_{\bar{x}^j}, \quad X_{3+j} = t\partial_{\bar{x}^j} + \partial_{\bar{u}^j}, \quad j = 1, 2, 3,$$

где t — время, векторы положения частицы и ее скорости в декартовом базисе $\vec{k}_j$, $j = 1, 2, 3$, задаются формулами

$$\vec{x} = \bar{x}^j \vec{k}_j, \quad \vec{u} = \bar{u}^j \vec{k}_j.$$

Среди них выделена общая 3-х мерная подалгебра, содержащая операторы всех галилеевых переносов с точностью до внутренних автоморфизмов алгебры L_{11} задается базисом [**?**]

$$\begin{gathered} X_4 - aX_2 + bX_3, \quad X_5 + aX_1 + dX_2 - cX_3, \\ X_6 - bX_1 + cX_2 + eX_3, \end{gathered} \tag{1}$$

где 5 параметров удовлетворяют соотношению

$$a^2(e-d)^2 + b^2e^2 + c^2d^2 = 1. \tag{2}$$

Инвариантные решения для подалгебры L_3 рассматриваются на примере уравнений газовой динамики

$$\begin{gathered} \vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \\ \rho_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\rho + \rho\nabla\cdot\vec{u} = 0, \\ S_t + (\vec{u}\cdot\nabla)S = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

где p — давление, ρ — плотность, S — энтропия, $p = f(\rho, S)$ — уравнение состояния.

Инварианты операторов (**??**) имеют вид

$$t, \quad \rho, \quad S, \quad \vec{u}_1 = \vec{u} + A(t)\vec{x},$$

где матрица A удовлетворяет равенству

$$\begin{gathered} AB^T = -I, \quad B = tI + E\langle\vec{\omega}\rangle + D, \\ D = \mathrm{diag}(0, d, e), \end{gathered} \tag{4}$$

$E\langle\vec{\omega}\rangle$ — антисимметрическая матрица с угловой скоростью $\vec{\omega} = (c, b, a)$: $E\langle\vec{\omega}\rangle\vec{b}$=$\vec{\omega}\times\vec{b}$, $B^T = tI - E\langle\vec{\omega}\rangle + D$, I — единичная матрица.

Дифференцирование по t равенства (**??**) дает $A_t = A^2$. Подстановка представления решения в инвариантах в систему (**??**) приводит к подмодели

$$u_1' = Au_1, \quad \rho' = \rho\,\mathrm{tr}A, \quad S' = 0.$$

Все уравнения подмодели интегрируются

$$B^T\vec{u}_1 = \vec{x}_0, \quad \rho = \rho_0 \exp\int \mathrm{tr}A dt, \quad S = S_0.$$

Скорость определяется равенством

$$\vec{u} = -A(t)(\vec{x} + \vec{x}_0)$$

и с точностью до переносов можно считать $\vec{x}_0 = 0$. Обратная матрица $B^{T^{-1}}$ определяет соотношение

$$\mathrm{tr}A = -\mathrm{tr}B^{T^{-1}} = -|B|^{-1}|B|'.$$

Таким образом, инвариантное решение имеет вид

$$\begin{gathered} \vec{u} = B^{T^{-1}}\vec{x}, \quad \rho = \rho_0|B|^{-1}, \quad S = S_0, \\ p = f(\rho, S_0) = g(V, S_0), \quad V = \rho^{-1} = V_0|B|. \end{gathered} \tag{5}$$

Относительно общей подалгебры рассмотрены все инвариантные решения с линейным полем скоростей для идеальной газовой динамики. Изучены движения частиц в целом. Каждая частица двигается по прямым линиям. В определенные моменты времени частицы собираются на линейных многообразиях коллапсов. В зависимости от значений произвольных параметров могут быть несколько многообразий коллапсов. Рассмотрены движения выделенных объемов частиц в виде параллелепипедов, которые проецируются в параллелограммы на многообразиях коллапсов. На примере уравнений газовой динамики у полученных решений изучено движение звуковых поверхностей в зависимости от уравнений состояния. Выведены уравнения для звуковых характеристик полученных решений. Приведен пример движения звукового коноида простейшего решения.

Список литературы

[1] Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В. Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды. Новосибирск: НГТУ, 2012. 659 с.

[2] Хабиров С.В. Лекции. Аналитические методы в газовой динамике. Уфа: БашГУ, 2013. 224 с.

[1] Финансирование работы госзадание № 0246-2019-0052, грант РФФИ № 18-29-10071