

ISSN: 2658–5782

Номер 3–4

2020

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org





Определение числа членов при усечении рядов для численного решения задачи акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер

Насибуллаева Э.Ш.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Акустическое рассеяние от препятствий малых размеров при внешнем воздействии является одной из важнейших задач в акустике, в первую очередь, из-за практических применений данного явления. Решение данной задачи сводится к решению уравнения Гельмгольца для комплексного потенциала с определенными граничными условиями. При применении методики расчета, основанной на быстром методе мультиполей, потенциалы раскладываются в ряды по специальным сферическим функциям, вид которых зависит от области, в которой данный потенциал вычисляется. В результате, при численной реализации полученной матричной системы возникает вопрос о правильном выборе числа членов рядов при их усечении, поскольку при малом числе членов ряда точность расчетов будет низкой, а при большом — возрастет не только точность, но и время расчета. Анализ научной литературы показал, что существует два подхода к выбору числа членов ряда при усечении для такого рода задач. При первом подходе усечение рядов основывается на сравнении двух последовательных значений суммы искомого ряда до тех пор, пока не будет достигнута нужная степень точности. При втором подходе происходит усечение всех рядов в каждом разложении при фиксированном числе членов ряда, определяемом с помощью эвристических формул. В настоящей работе на примере трех звукопроницаемых сфер разных радиусов в случае их сильного взаимодействия, когда численные расчеты становятся «чувствительными» к числу членов при усечении, было проведено сравнение данных подходов. Анализ полученных данных показал, что для определения значения искомой функции с необходимой точностью оптимально использовать комбинацию рассмотренных подходов.

Ключевые слова: акустическое рассеяние, множество звукопроницаемых сфер, мультиполь, усечение ряда, плоская волна, монополюсный источник излучения

1. Введение

При решении уравнения Гельмгольца для задачи акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер [1] с помощью численной техники [2], основанной на быстром методе мультиполей, возникают бесконечные ряды как результат разложения потенциалов по специальным сферическим функциям (мультиполям). В связи с чем, при численной реализации данного решения возникает вопрос правильного выбора числа членов N_{tr} при усечении полученных рядов, поскольку при малом числе N_{tr} точность расчетов будет низкой, а

при большом — возрастет не только точность, но и время расчета.

Целью настоящей работы является определение наиболее оптимального подхода к выбору числа членов при усечении рядов для решения поставленной задачи.

2. Подходы к определению числа членов при усечении рядов

Анализ научных исследований по данной проблематике показал, что можно выделить два подхода к определению числа членов при усечении бесконечного ряда вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^m S_n^m(r, \theta, \varphi),$$

где A_n^m — коэффициенты разложения; $S_n^m(r, \theta, \varphi)$ — специальные сферические функции, вид которых зависит от вида потенциала, раскладываемого в ряд; (r, θ, φ) — сферические координаты точки, в которой вычисляются потенциалы.

Подход I: усечение рядов основывается на сравнении двух последовательных значений суммы искомого ряда (при $n = N$ и $n = N + 1$) — как только их абсолютная погрешность становится меньше некоторого фиксированного значения, дальнейший расчет суммы ряда прекращается и принимается значение $N_{tr} = N$ [3].

Подход II: происходит усечение всех рядов в каждом разложении при фиксированном числе N_{tr} , определяемом с помощью эвристических формул.

Имеют место две эвристические формулы для расчета числа членов ряда при усечении N_{tr} :

$$N_{tr} = \left[ka_p + \left(\frac{\ln(2\sqrt{2}\pi ka_p \varepsilon^{-1})}{2\sqrt{2}} \right)^{\frac{2}{3}} (ka_p)^{\frac{1}{3}} + 1 \right], \quad (1)$$

вывод которой представлен, например, в работах [4] (для одиночного рассеяния) и [5] (для множественного рассеяния), и

$$N_{tr} = \begin{cases} [ekr_{pq}], & \text{для малых } kr_{pq}, \\ [ekr_{pq}/2], & \text{для больших } kr_{pq}, \end{cases} \quad (2)$$

представленная в работе [2]. В формулах (1) и (2) $[z]$ — целая часть числа z ; k — волновое число; a_p — радиус p -ой сферы; ε — искомая ошибка, связанная с коэффициентами Фурье; e — число Эйлера; r_{pq} — расстояние между центрами p -ой и q -ой сфер.

3. Численный анализ различных подходов к выбору числа членов при усечении рядов

В качестве примера рассмотрим три сферы различных радиусов ($a_1 = 0.9$ мм, $a_2 = 1$ мм и $a_3 = 1.1$ мм), центры которых расположены на одной оси. Расстояния от центра 1-й сферы до остальных сфер определяются как

$$r_{12} = (1 + \chi)a_1 + a_2$$

и

$$r_{13} = (1 + 2\chi)a_1 + 2a_2 + a_3,$$

где χ — параметр, характеризующий расстояние между сферами (наименьшее расстояние между точками поверхности соседних сфер). Отметим, что в рассматриваемом примере соседние сферы отстоят друг от друга на одинаковом расстоянии. Физические параметры системы: плотность и скорость звука в окружающей среде $\rho_0 = 10^3$ кг/м³ и

$c_0 = 1.5 \cdot 10^3$ м/с; плотность и скорость звука в среде внутри сфер $\rho_1 = 1.1\rho_0$ и $c_1 = 0.95c_0$; частота внешнего поля $f = 1350$ кГц. Данные параметры были выбраны, поскольку они позволяют рассмотреть случай сильного взаимодействия в системе, где основные параметры внутренней и внешней сред сопоставимы, что делает численные расчеты «чувствительными» к выбору числа членов при усечении рядов. Для монопольного источника излучения расстояние от него до центра 1-й сферы равно $d = 10a_1$, а углы в сферической системе координат равны $\theta_s = \pi/3$, $\varphi_s = \pi/2$. Для плоской падающей волны единичный вектор нормали к ее фронту имеет координаты $(1, \theta_{in}, \varphi_{in}) = (1, 2\pi/3, 3\pi/2)$. На рис. 1 представлена диаграмма распределения модуля нормированного давления $|p/p_{in}|$ (p — общее давление; p_{in} — давление падающей волны) в плоскости Oyz , где ось Oz — ось, на которой расположены центры сфер, для случая монопольного ис-

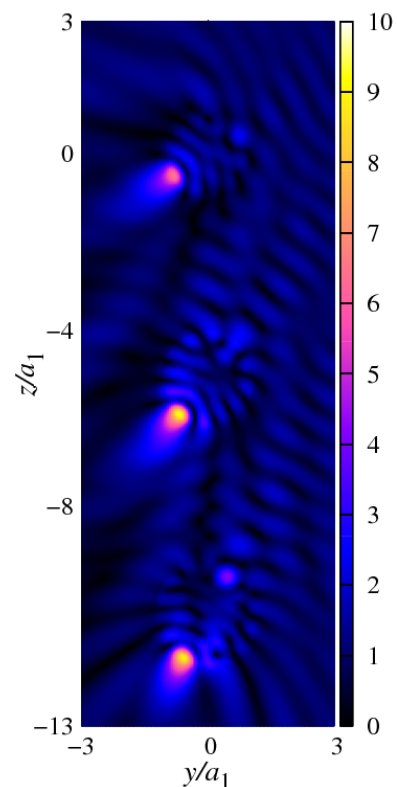


Рис. 1. Диаграмма распределения модуля нормированного давления $|p/p_{in}|$ в плоскости Oyz вокруг и внутри трех звукопроницаемых сфер различных радиусов с центрами, расположенными на одной оси, при воздействии монопольного источника излучения ($d = 10a_1$, $\theta_s = \pi/3$, $\varphi_s = \pi/2$) и значениями параметра $\chi = 3$

точника излучения и параметра $\chi = 3$. Данная диаграмма была получена с помощью численной методики, представленной в работе [1], при $N_{\text{тр}} = 21$.

Как правило, численный анализ эмпирических формул (1) и (2) сводится к определению искомой функции в зависимости от числа членов ряда при усечении только для некоторых расчетных точек. В работе [2] подобный анализ был проведен для обоснования формулы (2). А в работе [6] проведено сравнение результатов, полученных при выборе числа членов при усечении рядов по данным формулам, на примере одной расчетной точки, на основании чего делается вывод, что расчетная величина достигает устойчивого значения раньше при использовании формулы (1), и эта формула применяется в их дальнейших расчетах.

В настоящей работе проведен анализ с применением Подхода I для всех расчетных точек плоскости Oyz , которая разбивалась по оси Oy ($y = [-3a_1, 3a_1]$) прямыми $y = n_y h$, по оси Oz ($z = [-(7 + 2\chi)a_1, 3a_1]$) — прямыми $z = n_z h$, где h — шаг сетки; n_y, n_z — целые числа, а в узлах сетки проводились расчеты нормированного давления $|p/p_{\text{in}}|$.

В табл. 1–5 представлены значения $N_{\text{тр}}$, полученные с помощью Подхода I, для различных χ и относительных погрешностей δ , выраженных в %, в случаях монополюсного источника излучения (MS) и плоской волны (PW). В табл. 1 анализируются все точки расчетной плоскости, число которых равно 216600 при $\chi = 0$, 259920 — при $\chi = 1$, 346921 — при $\chi = 3$ и 433561 — при $\chi = 5$; в табл. 2 — точки внутри и на границе 1-ой сферы (11277 точек); в табл. 3 — точки внутри и на границе 2-ой сферы (13959 точек); в табл. 4 — точки внутри и на границе 3-ей сферы (16902 точки); в табл. 5 — точки вне сфер.

Для рассмотренного примера по формуле (1) при $\varepsilon = 10^{-8}$ получим следующие значения числа $N_{\text{тр}} = 12, 13, 14$ соответственно для сфер радиусов a_1, a_2, a_3 . Заметим, что данные значения не зависят от расстояния между соседними сферами, в отличие от формулы (2), которая при $\chi = 0, 1, 3, 5$ дает значения $N_{\text{тр}} = 14, 21, 35, 49$ для r_{12} и $N_{\text{тр}} = 16, 23, 39, 56$ для r_{23} .

На рис. 2 для наглядности представлено изменение функции $H = |p/p_{\text{in}}|$ в зависимости от $N_{\text{тр}}$ при $\chi = 1$ в некоторых точках пространства M с декартовыми координатами (x, y, z) (соответствующие значения приведены над графиками) для различных внешних воздействий: монополюсный источник излучения (MS) и плоская волна (PW). Отметим, что точка $M(0, 0, 0)$ лежит в центре 1-ой сферы; $M(0, 0, 1)$ — на границе 1-й сферы;

$M(0, 0.83, -0.5)$ и $M(0, -0.83, -0.5)$ — внутри 3-ей сферы; $M(0, -1, -2)$ и $M(0, -2, 2)$ — вне сфер.

Отметим, что при превышении значения $N_{\text{тр}}$, определенного уравнением (2), могут возникнуть трудности, связанные с экспоненциальным ростом части членов в разложении, приводящие к переполнению относительных ошибок. Объясняется это наличием сферических функций Ханкеля большого порядка $h_n(kr_{pq})$, входящих в матрицу переразложения системы [1], причем асимптотическое разложение этих функций при больших n и фиксированных kr_{pq} показывает, что рост начинается при $n \approx ekr_{pq}/2$ (см., например, рис. 2 для точек $M(0, 0, 1)$ и $M(0, 0.83, -0.5)$), поэтому данное значение и легло в основу формулы (2) [2]. В случае, когда с некоторого значения $N_{\text{тр}}$ наблюдается рост искомой функции в точках рассматриваемой области, то фиксируется $N_{\text{тр}}$, при котором данное число минимально, а в скобках пишется процент точек от общего количества, где заданная точность не достигнута. Для таких точек необходимо дополнительное исследование.

Заметим также, что экспоненциальный рост с некоторого значения $N_{\text{тр}}$ наблюдается в точке $r = 0$ (центр 1-ой сферы) из-за роста функции $h_n(kr) \equiv h_n(0)$. В рассмотренном примере рост функции в данной точке начинается при $N_{\text{тр}} > 15$ (рис. 2 при $M(0, 0, 0)$), то есть раньше, чем в других точках пространства. В связи с этим «*» около числа $N_{\text{тр}}$ в табл. 1 и 2 обозначает, что в точке $r = 0$ имеет место рост расчетной функции, в то время как относительная погрешность в остальных точках меньше заданного значения δ .

Анализ полученных данных (табл. 1–5 и рис. 2) показал следующее:

- с увеличением расстояния между сферами число $N_{\text{тр}}$ уменьшается, причем для $\delta = 1\%$ данное значение стремится к значению, полученному по формуле (1). Значение же, полученное по формуле (2), с увеличением расстояния, наоборот, растет;
- вне сфер заданная точность достигается при меньшем значении $N_{\text{тр}}$ в случае малых расстояний между сферами;
- тип внешнего воздействия (монополюсный источник или плоская волна) несущественно влияет на значение $N_{\text{тр}}$;
- увеличение точности ведет к росту значения $N_{\text{тр}}$;
- формула (2) позволяет оценить верхнее значение числа $N_{\text{тр}}$, выше которого возможен экспоненциальный рост искомой функции, и требуемая точность может быть не достигнута.

Таблица 1. Число членов $N_{\text{ГТ}}$ при усечении рядов для различных значений относительной погрешности δ и параметра χ (все точки расчетной области)

$\delta, \%$	χ							
	0		1		3		5	
	MS	PW	MS	PW	MS	PW	MS	PW
1	24*	23* (0.001%)	15*	14	13	13	13	13
10^{-1}	24 (0.015%)	23 (0.323%)	16*	17*	14	15	14	15
10^{-2}	24 (0.589%)	24 (0.732%)	19*	19*	16*	16*	16*	17*
10^{-3}	24 (3.181%)	25 (3.479%)	19 (0.001%)	19 (0.003%)	17*	17*	17*	17*

Таблица 2. Число членов $N_{\text{ГТ}}$ при усечении рядов для различных значений относительной погрешности δ и параметра χ (расчетные точки внутри и на границе 1-ой сферы)

$\delta, \%$	χ							
	0		1		3		5	
	MS	PW	MS	PW	MS	PW	MS	PW
1	19*	23*	12	13	12	12	12	12
10^{-1}	23*	23 (0.089%)	14	13	14	14	13	13
10^{-2}	23 (2.075%)	23 (2.891%)	15*	15*	15	14	14	15
10^{-3}	24 (11.448%)	23 (13.825%)	17*	17*	16*	16*	15	16*

Таблица 3. Число членов $N_{\text{ГТ}}$ при усечении рядов для различных значений относительной погрешности δ и параметра χ (расчетные точки внутри и на границе 2-ой сферы)

$\delta, \%$	χ							
	0		1		3		5	
	MS	PW	MS	PW	MS	PW	MS	PW
1	22	20	12	13	12	13	12	12
10^{-1}	26 (0.029%)	26 (0.021%)	14	15	14	14	14	14
10^{-2}	24 (2.278%)	25 (1.605%)	16	17	15	16	15	15
10^{-3}	24 (13.095%)	25 (11.505%)	18	19	16	17	16	17

Таблица 4. Число членов $N_{\text{ГТ}}$ при усечении рядов для различных значений относительной погрешности δ и параметра χ (расчетные точки внутри и на границе 3-ей сферы)

$\delta, \%$	χ							
	0		1		3		5	
	MS	PW	MS	PW	MS	PW	MS	PW
1	24	26	15	14	13	13	13	13
10^{-1}	26 (0.006%)	26 (0.018%)	16	17	14	15	14	14
10^{-2}	26 (1.651%)	26 (1.438%)	19	19	16	16	16	17
10^{-3}	26 (12.667%)	26 (10.549%)	20	20	17	17	17	17

Таблица 5. Число членов N_{tr} при усечении рядов для различных значений относительной погрешности δ и параметра χ (расчетные точки вне всех сфер)

$\delta, \%$	χ							
	0		1		3		5	
	MS	PW	MS	PW	MS	PW	MS	PW
1	18	18	12	13	12	12	13	13
10^{-1}	22	23	14	14	13	14	13	13
10^{-2}	24 (0.008%)	23 (0.012%)	15	16	14	16	15	15
10^{-3}	24 (0.376%)	24 (0.542%)	17	18	16	16	16	17

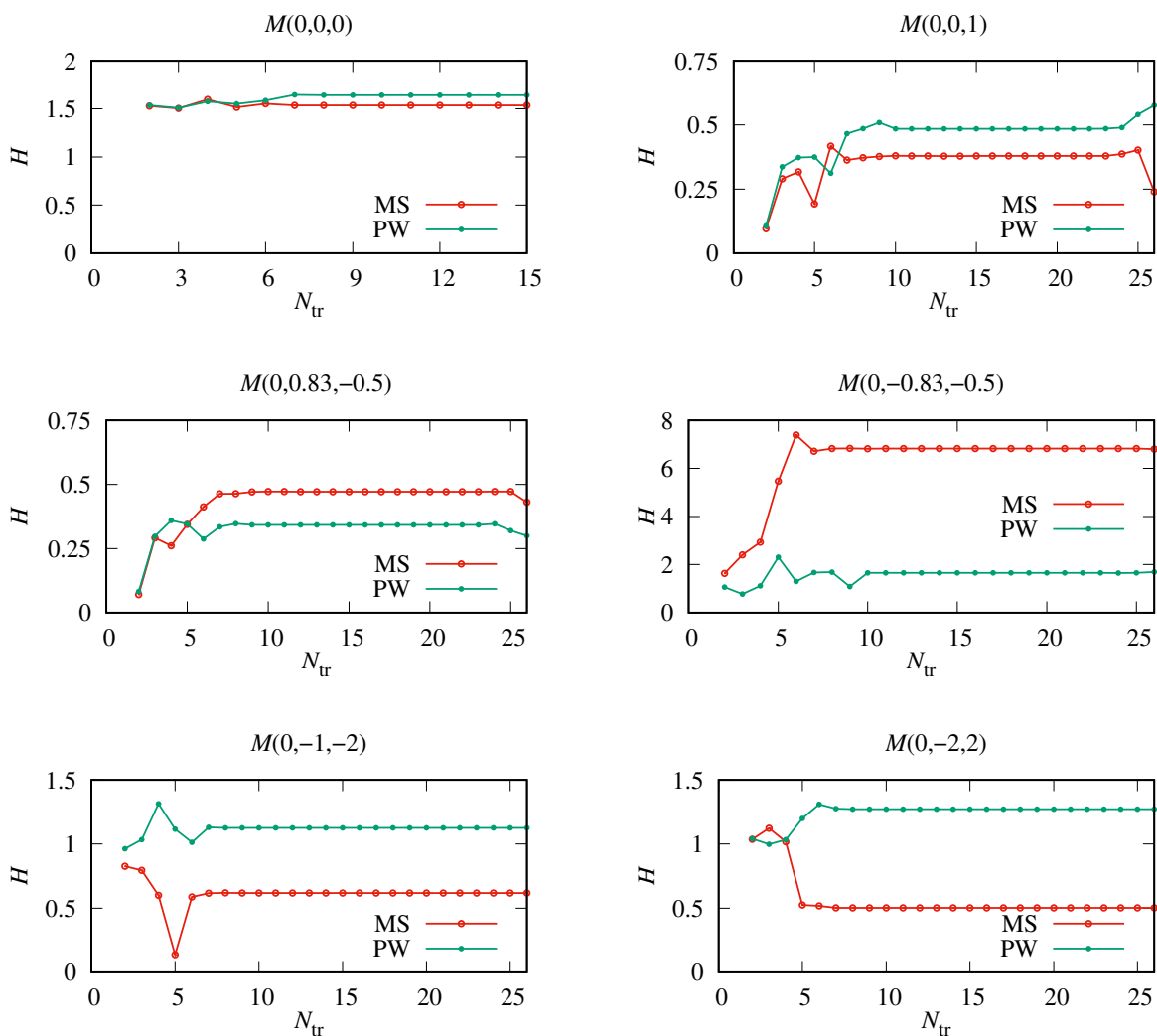


Рис. 2. Расчетная функция H от числа членов N_{tr} при усечении рядов для шести точек расчетной плоскости $M(x, y, z)$ (соответствующие значения приведены над графиками) при значении параметра $\chi = 1$ в случаях монополюсного источника излучения (MS) и плоской волны (PW)

4. Заключение

В настоящей работе проведено сравнение различных подходов к усечению рядов при численном решении задачи рассеяния акустических волн от множества звукопроницаемых сфер при внешнем воздействии. Анализ полученных данных показывает, что для определения числа членов при усечении рядов, позволяющего вычислить искомую функцию с заданной точностью, оптимальным является применение комбинированного подхода. А, именно, с помощью *Подхода II* (формулы (1) и (2)) определяется минимальное значение N_{tr} . Затем, начиная с этой минимальной величины, применяется *Подход I* до достижения необходимой точности. Заметим, что в рассмотренном примере минимальное значение N_{tr} определяется по формуле (1), однако при других значениях параметров системы N_{tr} можно получить по формуле (2). Для предотвращения накопления ошибок, связанных с экспоненциальным ростом сферических функций Ханкеля большого порядка, которые входят в матрицу переразложения системы, необходимо контролировать результат при превышении значений N_{tr} , полученных по формуле (2). В этом случае решение для

точки определяется в момент его стабилизации до начала экспоненциального роста, даже если заданная точность не достигается.

Список литературы

- [1] Насибуллаева Э.Ш. Численное моделирование акустического рассеяния от коаксиальных звукопроницаемых сфер // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 2. С. 115–124. DOI: [10.21662/mfs2019.2.016](https://doi.org/10.21662/mfs2019.2.016)
- [2] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // J. Acoust. Soc. Am. 2002. Vol. 112, No. 6. P. 2688–2701. DOI: [10.1121/1.1517253](https://doi.org/10.1121/1.1517253)
- [3] Duda R.O., Martens W.L. Range dependence of the response of a spherical head model // J. Acoust. Soc. Am. 1998. Vol. 104. P. 3048–3058. DOI: [10.1121/1.423886](https://doi.org/10.1121/1.423886)
- [4] Antoine X., Chniti C., Ramdani K. On the numerical approximation of high-frequency acoustic multiple scattering problems by circular cylinders // J. Comput. Phys. 2008. Vol. 227, No. 3. P. 1754–1771. DOI: [10.1016/j.jcp.2007.09.030](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.09.030)
- [5] Chew W.C., Jin J.M., Michielssen E., Song J. Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics. Norwood: Artech House Antennas and Propagation Library, 2001. 932 p.
- [6] Amamou M.L. A theoretical and numerical resolution of an acoustic multiple scattering problem in three-dimensional case // Acoustical Physics. 2016. Vol. 62, No. 3. P. 280–291. DOI: [10.1134/S1063771016030015](https://doi.org/10.1134/S1063771016030015)



Terms number determination at the series truncation for the numerical solution of the problem of acoustic scattering from a sound-permeable spheres set

Nasibullaeva E.Sh.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

Acoustic scattering from small-sized obstacles under external influence is one of the most important problems in acoustics, primarily because of the practical applications of this phenomenon. The solution of this problem is reduced to solving the Helmholtz equation for a complex potential with certain boundary conditions. When using the calculation method based on the fast multipole method, the potentials are decomposed into series according to special spherical functions, the form of which depends on the region in which this potential is calculated. As a result, the numerical implementation of the resulting matrix system raises the question of the correct choice of the number of series members when truncating them, since with a small number of series members, the calculation accuracy will be low, and with a large one will be increase not only the accuracy, but also the calculation time. An analysis of the scientific literature has shown that there are two approaches to choosing the number of terms of a series when truncating for such problems. In the first approach, truncation of the series is based on comparing two consecutive values of the sum of the sought series until the required degree of accuracy is achieved. In the second approach, all series in each expansion are truncated for a fixed number of series terms determined using heuristic formulas. In this paper, using the example of three sound-permeable spheres of different radii in the case of their strong interaction, when numerical calculations become «sensitive» to the number of terms during truncation, we compared these approaches. The analysis of the obtained data showed that to determine the value of the desired function with the necessary accuracy, it is optimal to use a combination of the considered approaches.

Keywords: acoustic scattering, sound-permeable spheres set, multipole, series truncation, plane wave, monopole radiation source

References

- [1] Nasibullaeva E.Sh. [Numerical simulation of acoustic scattering from coaxial sound-penetrable spheres]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2019. V. 14, No. 2. Pp. 115–124 (in Russian).
DOI: 10.21662/mfs2019.2.016
- [2] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // *J. Acoust. Soc. Am.* 2002. Vol. 112, No. 6. P. 2688–2701.
DOI: 10.1121/1.1517253
- [3] Duda R.O., Martens W.L. Range dependence of the response of a spherical head model // *J. Acoust. Soc. Am.* 1998. Vol. 104. P. 3048–3058.
DOI: 10.1121/1.423886
- [4] Antoine X., Chniti C., Ramdani K. On the numerical approximation of high-frequency acoustic multiple scattering problems by circular cylinders // *J. Comput. Phys.* 2008. Vol. 227, No. 3. P. 1754–1771.
DOI: 10.1016/j.jcp.2007.09.030
- [5] Chew W.C., Jin J.M., Michielssen E., Song J. *Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics*. Norwood: Artech House Antennas and Propagation Library, 2001. 932 p.
- [6] Amamou M.L. A theoretical and numerical resolution of an acoustic multiple scattering problem in three-dimensional case // *Acoustical Physics*. 2016. Vol. 62, No. 3. P. 280–291.
DOI: 10.1134/S1063771016030015