ISSN: 2658–5782

Номер 3–4

2020

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org

ИМех
им. Р.Р. Мавлютова

ISSN 2658–5782 Том 15 (2020), № 3–4, с. 217–222

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2020.3.133
DOI: 10.21662/mfs2020.3.133
УДК 517.958

Получена: 4.12.2020
Принята: 23.12.2020

Преобразования уравнений газовой динамики и базисных операторов допускаемой 11-мерной алгебры Ли[1]

Сираева Д.Т.[*], **Юлмухаметова Ю.В.**[*,**]

[*]Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа
[**]Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

В статье рассматривается система дифференциальных уравнений газовой динамики, которая замыкается уравнением состояния общего вида. Данная система описывает модель невязкого нетеплопроводного газа, движущегося в отсутствии внешних силовых полей и внешних источников энергии. Система инвариантна относительной 11-параметрической группы с соответствующей ей 11-мерной алгеброй Ли. Уравнения газовой динамики, уравнения движения и базисные операторы алгебры Ли записываются в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. Детально проиллюстрированы шаги, выполняемые при смене системы координат.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, цилиндрическая система координат, сферическая система координат, операторы 11-мерной алгебры Ли

1. Введение

Рассматриваются уравнения газовой динамики [1]:

$$
\begin{gathered}
D\vec{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \quad D\rho + \rho\,\mathrm{div}\vec{u} = 0, \\
Dp + \rho a^2(\rho, p)\,\mathrm{div}\vec{u} = 0,
\end{gathered} \tag{1}
$$

где $D = \partial_t + (\vec{u}\cdot\nabla)$ — оператор полного дифференцирования; t — время; $\nabla = \partial_{\vec{x}}$ — градиент по пространственным независимым переменным $\vec{x}$; $\vec{u}$ — вектор скорости; ρ — плотность; p — давление. В системе (1) первое уравнение есть уравнение сохранения импульса, второе — уравнение сохранения массы, третье — уравнение для давления, записанное вместо уравнения сохранения энергии. Скорость звука $a(\rho, p)$ вычисляется по уравнению состояния общего вида

$$
p = f(\rho, S) \tag{2}
$$

по формуле $a^2 = f_\rho(\rho, S)$, где S — энтропия. Система (1) замыкается уравнением состояния (2).

Уравнения газовой динамики (1) методами группового анализа впервые начал изучать выдающийся ученый XX в. Овсянников Л.В. Им же была объявлена программа «Подмодели», основные концепции которой изложены в [2].

Уравнения идеальной газовой динамики (1) с уравнением состояния общего вида (2) допускают 11-мерную алгебру Ли L_{11} с базисными операторами дифференцирования первого порядка.

Для нахождения решений системы уравнений газовой динамики (1), (2) необходимо вычислять инварианты подалгебр алгебры Ли L_{11}. Инвариант — функция, зануляющаяся при действии операторов подалгебры [3]. Система (1), (2), записанная в инвариантах — инвариантная подмодель.

Для удобства вычисления инвариантов подалгебры, содержащие один оператор вращения, представляются в цилиндрической системе координат

[1]Работа поддержана грантом РФФИ (№ 18-29-10071) и частично средствами государственного бюджета по госзаданию (№ 0246-2019-0052).

C, а подалгебры, содержащие три оператора вращения, представляются в сферической системе координат **S** [4, С. 139–140].

2. Уравнения газовой динамики в декартовой системе координат

В декартовой системе координат **D** векторы перемещения и скорости имеют вид:

$$\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \nabla = \vec{i}\partial_x + \vec{j}\partial_y + \vec{k}\partial_z,$$
$$\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — ортонормированный базис.

Распишем уравнения (1) покоординатно в **D** [5]:

$$u_t + uu_x + vu_y + wu_z + \rho^{-1}p_x = 0,$$
$$v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \rho^{-1}p_y = 0,$$
$$w_t + uw_x + vw_y + ww_z + \rho^{-1}p_z = 0,$$
$$\rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z + \rho\left(u_x + v_y + w_z\right) = 0,$$
$$p_t + up_x + vp_y + wp_z + \rho a^2(\rho, p)(u_x + v_y + w_z) = 0.$$

3. Уравнения газовой динамики в цилиндрической системе координат

В цилиндрической системе координат **C** координаты точки преобразуются по следующему правилу [4]

$$x = x, \;\; y = r\cos\theta, \;\; z = r\sin\theta, \tag{3}$$

где r, θ — полярные координаты точки. Тогда связь между (x, r, θ) и (x, y, z) записывается формулами

$$r = \sqrt{y^2 + z^2}, \qquad \theta = \operatorname{arctg}\frac{z}{y}. \tag{4}$$

Найдем базис системы **C**. Для этого вектор $\vec{x} = (x, y, z)$ разложим по ортонормированному базису декартовой системы координат с учетом (3):

$$\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x\vec{i} + r\cos\theta\vec{j} + r\sin\theta\vec{k}.$$

Возьмем производные от $\vec{x}$ по координатам системы **C**, то есть по (x, r, θ):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\vec{x}}{\partial x} = \vec{i} = \vec{e}_x, \\ &\frac{\partial\vec{x}}{\partial r} = \cos\theta\vec{j} + \sin\theta\vec{k} = \vec{e}_r, \\ &\frac{\partial\vec{x}}{\partial\theta} = r\left(-\sin\theta\vec{j} + \cos\theta\vec{k}\right) = r\vec{e}_\theta, \end{aligned} \tag{5}$$

где векторы $\vec{e}_x$, $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ — базисные в системе координат **C**.

Определим вид оператора ∇ в новом базисе. Для этого операторы дифференцирования из **D** запишем в **C**, используя связь (4) :

$$\begin{gathered} \partial_x = \partial_x, \quad \partial_y = \cos\theta\partial_r - r^{-1}\sin\theta\partial_\theta, \\ \partial_z = \sin\theta\partial_r + r^{-1}\cos\theta\partial_\theta. \end{gathered} \tag{6}$$

Тогда, с учетом (6), оператор ∇ примет вид:

$$\nabla = \vec{i}\partial_x + \vec{j}\partial_y + \vec{k}\partial_z = \vec{e}_x\partial_x + \vec{e}_r\partial_r + r^{-1}\vec{e}_\theta\partial_\theta. \tag{7}$$

Запишем вектор скорости $\vec{u}$ в новом и старом базисах:

$$\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} = U\vec{e}_x + V\vec{e}_r + W\vec{e}_\theta, \tag{8}$$

где U, V, W — координаты вектора $\vec{u}$ в системе **C**. Из (7) и (8) получаем выражение $\vec{u}\cdot\nabla$ в системе **C**:

$$\vec{u}\cdot\nabla = U\partial_x + V\partial_r + r^{-1}W\partial_\theta. \tag{9}$$

Для нахождения выражения $\nabla\cdot\vec{u}$ в системе **C** понадобятся значения производных от базисных векторов $\vec{e}_x, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta$:

$$\begin{gathered} \partial_x\vec{e}_x = 0, \quad \partial_r\vec{e}_x = 0, \quad \partial_\theta\vec{e}_x = 0, \\ \partial_x\vec{e}_r = 0, \quad \partial_r\vec{e}_r = 0, \quad \partial_\theta\vec{e}_r = \vec{e}_\theta, \\ \partial_x\vec{e}_\theta = 0, \quad \partial_r\vec{e}_\theta = 0, \quad \partial_\theta\vec{e}_\theta = -\vec{e}_r. \end{gathered} \tag{10}$$

Теперь запишем дивергенцию в **C**:

$$\operatorname{div}\vec{u} = \nabla\cdot\vec{u} = U_x + V_r + r^{-1}V + r^{-1}W_\theta. \tag{11}$$

Подставим (8), (9) и (11) в систему (1), учитывая (10). Из первого уравнения (1) получим равенство

$$\begin{gathered} U_t\vec{e}_x + V_t\vec{e}_r + W_t\vec{e}_\theta + UU_x\vec{e}_x + VU_r\vec{e}_x + \frac{WU_\theta}{r}\vec{e}_x + \\ + UV_x\vec{e}_r + VV_r\vec{e}_r + \frac{WV_\theta}{r}\vec{e}_r + UW_x\vec{e}_\theta + \\ + VW_r\vec{e}_\theta + \frac{WW_\theta}{r}\vec{e}_\theta - \frac{W^2}{r}\vec{e}_r + \frac{VW}{r}\vec{e}_\theta + \\ + \rho^{-1}\left(p_x\vec{e}_x + p_r\vec{e}_r + \frac{p_\theta}{r}\vec{e}_\theta\right) = 0. \end{gathered}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных векторах, получим систему из трех уравнений и два уравнения на функции ρ и p [5]:

$$\begin{gathered} U_t + UU_x + VU_r + \frac{WU_\theta}{r} + \frac{p_x}{\rho} = 0, \\ V_t + UV_x + VV_r + \frac{WV_\theta}{r} + \frac{p_r}{\rho} = \frac{W^2}{r}, \\ W_t + UW_x + VW_r + \frac{WW_\theta}{r} + \frac{p_\theta}{r\rho} = -\frac{VW}{r}, \\ \rho_t + U\rho_x + V\rho_r + \frac{W\rho_\theta}{r} + \rho\left(U_x + V_r + \frac{W_\theta}{r}\right) = -\frac{\rho V}{r}, \\ p_t + Up_x + Vp_r + \frac{Wp_\theta}{r} + \\ + \rho a^2\left(U_x + V_r + \frac{W_\theta}{r}\right) = -\frac{\rho a^2 V}{r}. \end{gathered}$$

4. Уравнения газовой динамики в сферической системе координат

Теперь определим вид (1) в сферической системе координат **S**. В **S** координаты точки преобразуются по следующему правилу [4, 6]

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\;\; y = r\sin\theta\sin\varphi,\;\; z = r\cos\theta, \quad (12)$$

где r, θ, φ — сферические координаты. Связь между (r, θ, φ) и (x, y, z) осуществляется по формулам

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \quad (13)$$

Найдем базис для системы **S**. Для этого вектор $\vec{x}$ разложим по ортонормированному базису декартовой системы координат с учетом (13):

$$\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = r\sin\theta\cos\varphi\vec{i} + r\sin\theta\sin\varphi\vec{j} + r\cos\theta\vec{k}.$$

Значение производных от $\vec{x}$ по координатам системы **S** определяется формулами

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\vec{x}}{\partial r} &= \sin\theta\cos\varphi\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\vec{j} + \cos\theta\vec{k} = \vec{e}_r,\\
\frac{\partial\vec{x}}{\partial\theta} &= r\left(\cos\theta\cos\varphi\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\vec{j} - \sin\theta\vec{k}\right) = r\vec{e}_\theta, \quad (14)\\
\frac{\partial\vec{x}}{\partial\varphi} &= r\sin\theta\left(-\sin\varphi\vec{i} + cos\varphi\vec{j}\right) = r\sin\theta\vec{e}_\varphi,
\end{aligned}$$

где $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$ образуют базис в **S**.

Найдем вид оператора ∇ в новом базисе. Для этого необходимо операторы дифференцирования из **D** записать в **S**, используя (13):

$$\begin{aligned}
\partial_x &= \sin\theta\cos\varphi\partial_r + r^{-1}\cos\theta\cos\varphi\partial_\theta - {}\\
&\quad - (r\sin\theta)^{-1}\sin\varphi\partial_\varphi,\\
\partial_y &= \sin\theta\sin\varphi\partial_r + r^{-1}\sin\varphi\cos\theta\partial_\theta + {}\\
&\quad + (r\sin\theta)^{-1}\cos\varphi\partial_\varphi,\\
\partial_z &= \cos\theta\partial_r - r^{-1}\sin\theta\partial_\theta.
\end{aligned} \quad (15)$$

Тогда, с учетом (15), оператор ∇ примет вид:

$$\nabla = \vec{i}\partial_x + \vec{j}\partial_y + \vec{k}\partial_z = \vec{e}_r\partial_r + r^{-1}\vec{e}_\theta\partial_\theta + (r\sin\theta)^{-1}\vec{e}_\varphi\partial_\varphi. \quad (16)$$

Разложим вектор скорости $\vec{u}$ в новом и старом базисах:

$$\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} = U\vec{e}_r + V\vec{e}_\theta + W\vec{e}_\varphi, \quad (17)$$

где U, V, W — координаты вектора $\vec{u}$ в системе **S**. Используя (16) и (17) получим выражение $\vec{u}\cdot\nabla$ в системе **S**:

$$\vec{u}\cdot\nabla = U\partial_r + r^{-1}V\partial_\theta + (r\sin\theta)^{-1}W\partial_\varphi. \quad (18)$$

Для нахождения выражения $\nabla\cdot\vec{u}$ в системе **S** понадобятся значения производных от базисных векторов $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$:

$$\begin{gathered}
\partial_r\vec{e}_r = 0, \quad \partial_\theta\vec{e}_r = \vec{e}_\theta, \quad \partial_\varphi\vec{e}_r = \sin\theta\vec{e}_\varphi,\\
\partial_r\vec{e}_\theta = 0, \quad \partial_\theta\vec{e}_\theta = -\vec{e}_r, \quad \partial_\varphi\vec{e}_\theta = \cos\theta\vec{e}_\varphi,\\
\partial_r\vec{e}_\varphi = 0, \quad \partial_\theta\vec{e}_\varphi = 0,\\
\partial_\varphi\vec{e}_\varphi = -\sin\theta\vec{e}_r - \cos\theta\vec{e}_\theta.
\end{gathered} \quad (19)$$

Теперь запишем дивергенцию в **S**:

$$\operatorname{div}\vec{u} = \nabla\cdot\vec{u} = U_r + \frac{V_\theta}{r} + \frac{W_\varphi}{r\sin\theta} + \frac{2U}{r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta V}{r}. \quad (20)$$

Подставим (17), (18) и (20) в систему (1), учитывая (19). Приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных векторах, получим систему [7]:

$$\begin{gathered}
U_t + UU_r + \frac{VU_\theta}{r} + \frac{WU_\varphi}{r\sin\theta} + \frac{p_r}{\rho} = \frac{V^2 + W^2}{r},\\
V_t + UV_r + \frac{VV_\theta}{r} + \frac{WV_\varphi}{r\sin\theta} + \frac{p_\theta}{r\rho} = -\frac{UV - \operatorname{ctg}\theta W^2}{r},\\
W_t + UW_r + \frac{VW_\theta}{r} + \frac{WW_\varphi}{r\sin\theta} + \frac{p_\varphi}{r\rho\sin\theta} = -\frac{W}{r}(U + \operatorname{ctg}\theta V),\\
\rho_t + U\rho_r + \frac{V\rho_\theta}{r} + \frac{W\rho_\varphi}{r\sin\theta} + \rho\left(U_r + \frac{V_\theta}{r} + \frac{W_\varphi}{r\sin\theta}\right) = -\rho\frac{2U + \operatorname{ctg}\theta V}{r},\\
p_t + Up_r + \frac{Vp_\theta}{r} + \frac{Wp_\varphi}{r\sin\theta} + \rho a^2\left(U_r + \frac{V_\theta}{r} + \frac{W_\varphi}{r\sin\theta}\right) = -\rho a^2\frac{(2U + \operatorname{ctg}\theta V)}{r}.
\end{gathered} \quad (21)$$

5. Уравнение движения частиц в цилиндрической и сферической системах координат

Положение частицы определяется ее скоростью и зависит от времени и начального положения [1]:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}(t, \vec{x}), \qquad \vec{x}|_{t=t_0} = \vec{\xi}, \quad (22)$$

где t, $\vec{\xi}$ — лагранжевы переменные; t, $\vec{x}$ — эйлеровы переменные. Связь между эйлеровыми и лагранжевыми переменными дается соотношением $\vec{x} = \vec{x}\left(t, \vec{\xi}\right)$ как решение задачи (22).

Определим вид (22) в цилиндрической и сферической системах координат. Для цилиндрической системы координат справедлива замена переменных (3). Ортонормированный базис задан соотношением (5). Тогда $\vec{x} = x\vec{e}_x + r\vec{e}_r$. Запишем $\vec{u}$ в базисе цилиндрической и декартовой системах координат:

$$\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} = U\vec{e}_x + V\vec{e}_r + W\vec{e}_\theta. \tag{23}$$

Следовательно, справедлива цепочка равенств

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = U\vec{e}_x + V\vec{e}_r + W\vec{e}_\theta.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных векторах, получим уравнения движения в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= U, & x|_{t=t_0} &= x_0, \\ \dot{r} &= V, & r|_{t=t_0} &= r_0, \\ r\dot{\theta} &= W, & \theta|_{t=t_0} &= \theta_0, \end{aligned}$$

где x_0, r_0, θ_0 вычисляются по формулам (4).

Связь декартовых и сферических координат осуществляется по формулам (13), а базис системы имеет вид (14). Следовательно, $\vec{x} = r\vec{e}_r$. Вектор $\vec{u}$ запишем в базисе сферической и декартовой системах координат:

$$\vec{u} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} = U\vec{e}_r + V\vec{e}_\theta + W\vec{e}_\varphi. \tag{24}$$

Тогда справедлива цепочка равенств

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \\ = U\vec{e}_r + V\vec{e}_\theta + W\vec{e}_\varphi.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных векторах, получим уравнения движения в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= U, & r|_{t=t_0} &= r_0, \\ r\dot{\theta} &= V, & \theta|_{t=t_0} &= \theta_0, \\ r\dot{\varphi}\sin\theta &= W, & \varphi|_{t=t_0} &= \varphi_0, \end{aligned}$$

где r_0, θ_0, φ_0 вычисляются по формулам (13).

6. Базисные операторы алгебры Ли L_{11}

Замена координат $\overline{x} = \overline{x}(x,u)$, $\overline{u} = \overline{u}(x,u)$ в инфинитезимальном операторе $X = \xi\partial_x + \eta\partial_u$ имеет вид [8]:

$$\overline{X} = X\overline{x}(x,u)\partial_{\overline{x}} + X\overline{u}(x,u)\partial_{\overline{u}}. \tag{25}$$

Базисные операторы алгебры Ли L_{11} в декартовой системе координат таковы:

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z,\ X_4 = t\partial_x + \partial_u, \\ X_5 = t\partial_y + \partial_v,\ X_6 = t\partial_z + \partial_w, \\ X_7 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v, \\ X_8 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w, \\ X_9 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u, \\ X_{10} = \partial_t,\ X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z, \end{gathered}$$

где X_1, X_2, X_3 — операторы переноса по осям координат Ox, Oy, Oz соответственно; X_4, X_5, X_6 — операторы преобразования Галилея; X_7, X_8, X_9 — операторы вращения; X_{10} — оператор переноса по времени; X_{11} — оператор равномерного растяжения.

При расчете операторов в **C** нужны формулы связи координат вектора скорости $\vec{u}$ в **D** и **C**. Для этого необходимо в уравнение (23) подставить формулы (5) и приравнять коэффициенты при базисных векторах $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Получаются следующие формулы связи:

$$\begin{aligned} u &= U, \\ v &= V\cos\theta - W\sin\theta, \\ w &= V\sin\theta + W\cos\theta. \end{aligned}$$

Из этих равенств следуют соотношения для координат вектора скорости в **C**. Выразим их еще и в **D**:

$$\begin{aligned} U &= u, \\ V &= v\cos\theta + w\sin\theta = \frac{vy + wz}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \\ W &= w\cos\theta - v\sin\theta = \frac{-vz + wz}{\sqrt{y^2 + z^2}}. \end{aligned} \tag{26}$$

Приведем пример вычисления базисного оператора алгебры Ли L_{11} в **C**:

$$X_7 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v. \tag{27}$$

По формуле (25) требуется оператором (27) поочередно подействовать на x, r, θ (3), (4) и U, V, W (26) в **D**:

$$\begin{aligned} X_7 &= r\cos\theta\left(\sin\theta\partial_r + \frac{\cos\theta}{r}\left(\partial_\theta + W\partial_V - V\partial_W\right)\right) - \\ &- r\sin\theta\left(\cos\theta\partial_r - \frac{\sin\theta}{r}\left(\partial_\theta + W\partial_V - V\partial_W\right)\right) + \\ &+ \left(V\cos\theta - W\sin\theta\right)\left(\sin\theta\partial_V + \cos\theta\partial_W\right) - \\ &- \left(V\sin\theta + W\cos\theta\right)\left(\cos\theta\partial_V - \sin\theta\partial_W\right) = \\ &= \partial_\theta + W\partial_V - V\partial_W + V\partial_W - W\partial_V = \partial_\theta. \end{aligned}$$

Базисные операторы L_{11} в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$X_1 = \partial_x,\ X_2 = \cos\theta\partial_r - \frac{\sin\theta}{r}\left(\partial_\theta + W\partial_V - V\partial_W\right),$$

$$X_3 = \sin\theta\partial_r + \frac{\cos\theta}{r}(\partial_\theta + W\partial_V - V\partial_W),$$

$$X_4 = t\partial_x + \partial_U,$$

$$X_5=\cos\theta\,[t\partial_r+\partial_V]-t\frac{\sin\theta}{r}\left[\partial_\theta+W\partial_V-\left(V-\frac{r}{t}\right)\partial_W\right],$$

$$X_6=\sin\theta[t\partial_r+\partial_V]+t\frac{\cos\theta}{r}\left[\partial_\theta+W\partial_V-\left(V-\frac{r}{t}\right)\partial_W\right],$$

$$X_7 = \partial_\theta,$$

$$X_8 = \sin\theta(r\partial_x - x\partial_r + V\partial_U - U\partial_V)+ \\ +\cos\theta\left[W\partial_U - U\partial_W - \frac{x}{r}(\partial_\theta + W\partial_V - V\partial_W)\right],$$

$$X_9 = \cos\theta[x\partial_r - r\partial_x + U\partial_V - V\partial_U]+ \\ +\sin\theta\left[W\partial_U - U\partial_W - \frac{x}{r}(\partial_\theta + W\partial_V - V\partial_W)\right],$$

$$X_{10} = \partial_t, \quad X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + r\partial_r.$$

При расчете операторов в **S** нужны формулы связи координат вектора скорости $\vec{u}$ в **D** и **S**. Для этого необходимо в уравнение (23) подставить формулы (14) и приравнять коэффициенты при базисных векторах $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Получаются следующие формулы связи:

$$u = U\sin\theta\cos\varphi + V\cos\theta\cos\varphi - W\sin\varphi,$$
$$v = U\sin\theta\sin\varphi + V\cos\theta\sin\varphi + W\cos\varphi,$$
$$w = U\cos\theta - V\sin\theta.$$

Из этих равенств следуют соотношения для координат вектора скорости в **C**:

$$\begin{aligned} U &= u\sin\theta\cos\varphi + v\sin\theta\sin\varphi + w\cos\theta, \\ V &= u\cos\theta\cos\varphi + v\cos\theta\sin\varphi - w\sin\theta, \\ W &= v\cos\varphi - u\sin\varphi. \end{aligned} \tag{28}$$

При расчете базисных операторов L_{11} в **S** по формуле (25) нужно дифференцировать (28) как сложные функции с учетом (12), (13). Тогда базисные операторы L_{11} в сферической системе координат примут вид:

$$X_1 = \cos\varphi\sin\theta\left[\partial_r + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}(\partial_\theta + V\partial_U - U\partial_V)\right]+ \\ +\frac{\sin\varphi}{r}\left[U\partial_W-W\partial_U-\frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi-\operatorname{ctg}\theta(V\partial_W-W\partial_V)\right],$$

$$X_2 = \sin\varphi\sin\theta\left[\partial_r + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}(\partial_\theta + V\partial_U - U\partial_V)\right]- \\ -\frac{\cos\varphi}{r}\left[U\partial_W-W\partial_U-\frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi+\operatorname{ctg}\theta(V\partial_W-W\partial_V)\right],$$

$$X_3 = \cos\theta\partial_r - \frac{\sin\theta}{r}(\partial_\theta + V\partial_U - U\partial_V),$$

$$X_4 = \cos\varphi\sin\theta\left[\frac{t\operatorname{ctg}\theta}{r}(\partial_\theta + V\partial_U - U\partial_V) + t\partial_r+ \right. \\ \left. +\partial_U + \operatorname{ctg}\theta\partial_V\right] + \frac{t\sin\varphi}{r}\left[U\partial_W - W\partial_U - \frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi+ \right. \\ \left. +\operatorname{ctg}\theta(V\partial_W - W\partial_V) + \frac{r}{t}\partial_W\right],$$

$$X_5 = \sin\varphi\sin\theta\left[\frac{t\operatorname{ctg}\theta}{r}(\partial_\theta + V\partial_U - U\partial_V) + t\partial_r+ \right. \\ \left. +\partial_U + \operatorname{ctg}\theta\partial_V\right] - \frac{t\cos\varphi}{r}\left[U\partial_W - W\partial_U - \frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi+ \right. \\ \left. +\operatorname{ctg}\theta(V\partial_W - W\partial_V) + \frac{r}{t}\partial_W\right],$$

$$X_6 = \cos\theta\,[t\partial_r+\partial_U]-\frac{t\sin\theta}{r}\left[\partial_\theta+V\partial_U-U\partial_V+\frac{r}{t}\partial_V\right],$$

$$X_7 = -\sin\varphi\partial_\theta + \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\left[V\partial_W - W\partial_V - \cos\theta\partial_\varphi\right],$$

$$X_8 = \cos\varphi\partial_\theta + \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\left[V\partial_W - W\partial_V - \cos\theta\partial_\varphi\right],$$

$$X_9 = \partial_\varphi, \quad X_{10} = \partial_t, \quad X_{11} = r\partial_r + t\partial_t.$$

7. Заключение

Уравнения газовой динамики удобно использовать в различных системах координат. Если в подалгебре есть один оператор вращения, то следует выбрать цилиндрическую систему координат. Если подалгебра содержит три оператора вращения, то уравнения газовой динамики представляются в сферической системе координат. Упрощение подмодели рассматриваемой системы уравнений иногда может достигаться с помощью введения дополнительной замены [5].

Список литературы

[1] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 335 с.
eLIBRARY ID: 19448621

[2] Овсянников Л.В. Программа «Подмодели». Газовая динамика // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.

[3] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

[4] Хабиров С.В. Аналитические методы в газовой динамике. Уфа: БГУ. 2013. 224 с.

[5] Хабиров С.В. Простые частично инвариантные решения // Уфимский математический журнал. 2019. Т. 11, № 1. С. 87–98.
MathNet: ufa463

[6] Космодемьянский А.А. Курс теоретической механики. Ч. 1. М.: Просвещение, 1965. 539 с.

[7] Овсянников Л.В. Особый вихрь // Прикладная механика и техническая физика. 1995. Т. 36, вып. 3. С. 45–52.
eLIBRARY ID: 35253156

[8] Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В. Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды: монография. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. 659 с.
eLIBRARY ID: 21714062

ISSN 2658–5782 15 (2020), **3–4**, 217–222

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2020.3.133
DOI: 10.21662/mfs2020.3.133

Received: 4.12.2020
Accepted: 23.12.2020

Transformations of gas dynamics equations and basis operators of a admitted 11-dimensional Lie algebra

Siraeva D.T.[*], **Yulmukhametova Y.V.**[*,**]

[*]Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia
[**]Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia

In this paper, the gas dynamics equations are considered. The system is closed by a general equation of state. This equations describe a model of an inviscid non-heat-conducting gas motion in the absence of external force fields and external energy sources. The system is invariant under the 11-parameter group with the corresponding 11-dimensional Lie algebra. The gas dynamics equations, equations of motion, and basis operators of the Lie algebra are written in Cartesian, Cylindrical, and Spherical coordinate systems. The steps involved when changing the coordinate system are illustrated in detail.

Keywords: gas dynamics equations, cylindrical coordinate system, spherical coordinate system, operators of 11-dimensional Lie algebra

References

[1] Ovsyannikov L.V. [Lectures on the fundamentals of gas dynamics] *Lektsii po osnovam gazovoy dinamiki.* M.-Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2003. P. 336 (in Russian).
eLIBRARY ID: 19448621

[2] Ovsyannikov L.V. The "podmodeli" program. Gas dynamics // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1994. V 58, No. 4. Pp. 601–627.
DOI: 10.1016/0021-8928(94)90137-6

[3] Ovsyannikov L.V. Group analysis of differential equations. Academic press, 1982.

[4] Khabirov S.V. [Lectures Analytical methods in gas dynamics] *Lektsii Analiticheskiye metody v gazovoy dinamike.* Ufa: BSU, 2013. P. 224 (in Russian).

[5] Khabirov S.V. Simple partially invariant solutions // Ufa Mathematical Journal. 2019. V. 11, No. 1. Pp. 90–99.
DOI: 10.13108/2019-11-1-90

[6] Kosmodemyanskii A.A. [Theoretical mechanics course] *Kurs teoreticheskoi mehaniki* M.: Prosveshenie. 1965. P. 539. (in Russian).

[7] Ovsyannikov L.V. Singular vortex // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1995. Vol. 36, No. 3. Pp. 360–366.
DOI: 10.1007/BF02369772

[8] Chirkunov Yu.A., Khabirov S.V. Elements of Symmetry Analysis of Differential Equations of Continuum Mechanics: monograph, Novosibirsk: NSTU publisher, 2012. 659 pp. (in Russian).
eLIBRARY ID: 21714062