ISSN: 2658–5782

Номер 3–4

2020

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org

ИМех им. Р.Р. Мавлютова

ISSN 2658–5782 Том 15 (2020), № 3–4, с. 232–237

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2020.3.136
DOI: 10.21662/mfs2020.3.136
УДК 517.958

Получена: 21.10.2020
Принята: 28.12.2020

Групповая классификация цепочки нелинейных волновых уравнений третьего порядка

Бабков О.К., Мухаметова Г.З.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

В работе приводятся результаты вычисления алгебр точечных симметрий для нелинейных волновых уравнений третьего порядка, связанных в цепочку преобразованиями Бэклунда. Методом Ли–Овсянникова [1–3] найдены основные алгебры точечных симметрий указанных уравнений, выявлены все возможные случаи их расширения и вычислены таблицы коммутаторов найденных алгебр.

Ключевые слова: цепочка дифференциальных уравнений, групповая классификация, допустимый оператор, алгебра Ли, таблица коммутаторов

Всюду и далее $K(s)$ — некоторая достаточно гладкая функция одной переменной, отличная от линейной.

Рассматривается цепочка из четырех уравнений:

$$u_{tt} = \frac{\partial^3}{\partial x^3} K(u), \quad u = u(t,x),$$

$$v_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(v_x), \quad v = v(t,x),$$

$$w_{tt} = \frac{\partial}{\partial x} K(w_{xx}), \quad w = w(t,x),$$

$$z_{tt} = K(z_{xxx}), \quad z = z(t,x),$$

связанных преобразованиями Бэклунда $z_x = w$, $w_x = v$, $v_x = u$, и проводится групповая классификация для каждого из этих четырех уравнений. Следует признать, что основным стимулом к решению данной задачи послужила приведенная в [4] групповая классификация цепочки нелинейных волновых уравнений второго порядка.

Отметим, что для случая линейной функции $K(s)$ все уравнения цепочки превращаются в одно и то же линейное уравнение $u_{tt} = \lambda u_{xxx}$ ($\lambda = \text{const} \neq 0$) с бесконечномерной алгеброй допустимых операторов:

$$\langle \partial_t,\ \partial_x,\ u\partial_u,\ 3t\partial_t + 2x\partial_x,\ h(t,x)\partial_u \rangle,$$
$$h_{tt}(t,x) = \lambda h_{xxx}(t,x).$$

Теорема 1. Уравнение

$$u_{tt} = \frac{\partial^3}{\partial x^3} K(u), \quad u = u(t,x)$$

при произвольной непостоянной функции $K = K(u)$ допускает 3-мерную алгебру операторов $L_3 = \langle \partial_t,\ \partial_x,\ 3t\partial_t + 2x\partial_x \rangle$. Таблица коммутаторов:

	X_1	X_2	X_3
X_1			$2X_1$
X_2			$3X_2$
X_3	$-2X_1$	$-3X_2$	

Расширение этой алгебры возможно только в следующих случаях:

1. $K(u) = K_1(au+b)^\lambda$, $a \neq 0$, $\lambda \neq 0, 1, -1/2, -3$, $u_{tt} = K_1 \dfrac{\partial^3}{\partial x^3}(au+b)^\lambda$:

$$X_4 = -t\partial_t + d\frac{2}{\lambda - 1}\left(u + \frac{b}{a}\right)\partial_u;$$

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1			$2X_1$	
X_2			$3X_2$	$-X_2$
X_3	$-2X_1$	$-3X_2$		
X_4		X_2		

2. $K(u) = K_1(au+b)^{-\frac{1}{2}}$, $u_{tt} = K_1 \dfrac{\partial^3}{\partial x^3} \dfrac{1}{\sqrt{au+b}}$:

$$X_4 = -t\partial_t - \frac{4}{3}\left(u + \frac{b}{a}\right)\partial_u,$$
$$X_5 = x^2\partial_x - 4x\left(u + \frac{b}{a}\right)\partial_u;$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1			$2X_1$		X_3+3X_4
X_2			$3X_2$	$-X_2$	
X_3	$-2X_1$	$-3X_2$			$2X_5$
X_4		X_2			
X_5	$-X_3-3X_4$		$-2X_5$		

3. $K(u) = K_1(au+b)^{-3}$, $u_{tt} = K_1 \dfrac{\partial^3}{\partial x^3}(au+b)^{-3}$:

$$X_4 = -t\partial_t - \frac{4}{3}\left(u + \frac{b}{a}\right)\partial_u,$$
$$X_5 = t^2\partial_t + t\left(u + \frac{b}{a}\right)\partial_u;$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1			$2X_1$		
X_2			$3X_2$	$-X_2$	$-2X_4$
X_3	$-2X_1$	$-3X_2$			$3X_5$
X_4		X_2			$-X_5$
X_5		$2X_4$	$-3X_5$	X_5	

4. $K(z) = K_1 e^{\lambda z}$, $u_{tt} = K_1 \dfrac{\partial^3}{\partial x^3} e^{\lambda u}$:

$$X_4 = t\partial_t - \frac{2}{\lambda}\partial_u;$$

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1			$2X_1$	
X_2			$3X_2$	X_2
X_3	$-2X_1$	$-3X_2$		
X_4		$-X_2$		

5. $K(z) = K_1 \ln(au+b)$, $u_{tt} = K_1 \dfrac{\partial^3}{\partial x^3} \ln(au+b)$:

$$X_4 = x\partial_x - 3\left(u + \frac{b}{a}\right)\partial_u;$$

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1			$2X_1$	X_1
X_2			$3X_2$	
X_3	$-2X_1$	$-3X_2$		
X_4	$-X_1$			

Других случаев расширения минимальной алгебры L_3 нет.

Теорема 2. Уравнение

$$v_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(v_x), \quad v = v(t,x)$$

при произвольной нелинейной функции $K = K(z)$ допускает 5-мерную алгебру операторов

$$L_5 = \langle t\partial_v,\ \partial_t,\ \partial_x,\ \partial_v,\ 3t\partial_t + 2x\partial_x + 2v\partial_v \rangle.$$

Таблица коммутаторов этой алгебры имеет вид:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1		$-X_4$			$-X_1$
X_2	X_4				$3X_2$
X_3					$2X_4$
X_4					$2X_4$
X_5	X_1	$-3X_2$	$-2X_3$	$-2X_4$	

Расширение этой алгебры возможно в следующих случаях:

1. $K(z) = K_1(az+b)^{\lambda}$, $a \neq 0$, $\lambda \neq 1, -3$, $v_{tt} = K_1 \dfrac{\partial^2}{\partial x^3}(av_x+b)^{\lambda}$:

$$X_6 = a(\lambda-1)t\partial_t - 2(av+bx)\partial_v;$$

	X_1	X_2	X_3
X_1		$-X_4$	
X_2	X_4		
X_3			
X_4			
X_5	X_1	$-3X_2$	$-2X_3$
X_6	$a(\lambda+1)X_1$	$-a(\lambda-1)X_2$	$2bX_4$

	X_4	X_5	X_6
X_1		$-X_1$	$-a(\lambda+1)X_1$
X_2		$3X_2$	$a(\lambda-1)X_2$
X_3		$2X_4$	$-2bX_4$
X_4		$2X_4$	$-2aX_4$
X_5	$-2X_4$		
X_6	$2aX_4$		

2. $K(z) = K_1(az+b)^{-3}$, $v_{tt} = K_1 \dfrac{\partial^2}{\partial x^3}(av_x+b)^{-3}$:

$$X_6 = 4ax\partial_x + (av - 3bx)\partial_v,$$
$$X_7 = at^2\partial_t + t(av+bx)\partial_v;$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
X_1		$-X_4$			$-X_1$	$2aX_1$	
X_2	X_4				$3X_2$	$-4aX_2$	$-\frac{1}{2}X_6$
X_3					$2X_4$	$-2bX_4$	bX_1
X_4					$2X_4$	$-2aX_4$	aX_1
X_5	X_1	$-3X_2$	$-2X_3$	$-2X_4$			$3X_7$
X_6	$-2aX_1$	$4aX_2$	$2bX_4$	$2aX_4$			$-4aX_7$
X_7		$\frac{1}{2}X_6$	$-bX_1$	$-aX_1$	$-3X_7$	$4aX_7$	

3. $K(z) = K_1 e^{\lambda z}$, $v_{tt} = K_1 \dfrac{\partial^2}{\partial x^3} e^{\lambda v_x}$:

$$X_6 = \lambda t \partial_t - 2x\partial_v;$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_1		$-X_4$			$-X_1$	λX_1
X_2	X_4				$3X_2$	$-\lambda X_2$
X_3					$2X_4$	$2X_4$
X_4					$2X_4$	
X_5	X_1	$-3X_2$	$-2X_3$	$-2X_4$		
X_6	$-\lambda X_1$	λX_2	$-2X_4$			

4. $K(z) = K_1 \ln(az+b)$, $v_{tt} = K_1 \dfrac{\partial^2}{\partial x^3} \ln(av_x + b)$:

$$X_6 = at\partial_t + ax\partial_x - bx\partial_v.$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_1		$-X_4$			$-X_1$	$-aX_1$
X_2	X_4				$3X_2$	aX_2
X_3					$2X_4$	$aX_3 - bX_4 4$
X_4					$2X_4$	
X_5	X_1	$-3X_2$	$-2X_3$	$-2X_4$		
X_6	aX_1	$-aX_2$	$-aX_3 + bX_4$			

Других случаев расширения минимальной алгебры L_5 нет.

Теорема 3. Уравнение

$$w_{tt} = \frac{\partial}{\partial x} K(w_{xx}), \quad w = w(t,x),$$

при произвольной нелинейной функции $K = K(z)$ допускает 7-мерную алгебру операторов

$$L_7 = \langle \partial_t,\, \partial_x,\, \partial_w,\, tx\partial_w,\, t\partial_w,\, x\partial_w,\, 3t\partial_t + 2x\partial_x + 4w\partial_v \rangle.$$

Таблица коммутаторов:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
X_1				X_6	X_3		$3X_1$
X_2				X_5		X_3	$2X_2$
X_3							$4X_3$
X_4	$-X_6$	$-X_5$					$-X_4$
X_5	$-X_3$						X_5
X_6		$-X_3$					$2X_6$
X_7	$-3X_1$	$-2X_2$	$-4X_3$	X_4	$-X_5$	$-2X_6$	

Расширение этой алгебры возможно в следующих случаях:

1. $K(z) = K_1(az+b)^\lambda$, $a \neq 0$, $\lambda \neq 0, 1, -3$, $w_{tt} = K_1 \dfrac{\partial}{\partial x}(aw_{xx} + b)^\lambda$:

$$X_8 = (2\lambda + 1)t\partial_t + 2x\partial_x - \frac{2b}{a}x^2\partial_w;$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_1				X_6	X_3		$3X_1$	$(2\lambda+1)X_1$
X_2				X_5		X_3	$2X_2$	$2X_2 - \frac{4b}{a}X_6$
X_3							$4X_3$	
X_4	$-X_6$	$-X_5$					$-X_4$	$-(2\lambda+3)X_4$
X_5	$-X_3$						X_5	$-(2\lambda+1)X_5$
X_6		$-X_3$					$2X_6$	$-2X_6$
X_7	$-3X_1$	$-2X_2$	$-4X_3$	X_4	$-X_5$	$-2X_6$		
X_8	$-(2\lambda+1)X_1$	$-2X_2 + \frac{4b}{a}X_6$		$(2\lambda+3)X_4$	$(2\lambda+1)X_5$	$2X_6$		

2. $K(z) = K_1(az+b)^{-3}$, $w_{tt} = K_1 \dfrac{\partial}{\partial x}(aw_{xx}+b)^{-3}$:

$$X_8 = -5t\partial_t + 2x\partial_x - \frac{2b}{a}x^2\partial_w,$$
$$X_9 = 4t^2\partial_t + 2t\left(2w + \frac{b}{a}x^2\right)\partial_w;$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1				X_6	X_3
X_2				X_5	
X_3					
X_4	$-X_6$	$-X_5$			
X_5	$-X_3$				
X_6		$-X_3$			
X_7	$-3X_1$	$-2X_2$	$-4X_3$	X_4	$-X_5$
X_8	$5X_1$	$-2X_2 + \frac{4b}{a}X_6$		$-3X_4$	$-5X_5$
X_9	$-X_7 + X_8$	$-\frac{4b}{a}X_4$	$-4X_5$		

	X_6	X_7	X_8	X_9
X_1		$3X_1$	$-5X_1$	$X_7 - X_8$
X_2	X_3	$2X_2$	$2X_2 - \frac{4b}{a}X_6$	$\frac{4b}{a}X_4$
X_3		$4X_3$		$4X_5$
X_4		$-X_4$	$3X_4$	
X_5		X_5	$5X_5$	
X_6		$2X_6$	$-2X_6$	$4X_4$
X_7	$-2X_6$			$3X_9$
X_8	$2X_6$			$-5X_9$
X_9	$-4X_4$	$-3X_9$	$5X_9$	

3. $K(z) = K_1 e^{\lambda z}$, $w_{tt} = K_1 \frac{\partial}{\partial x} e^{\lambda w_{xx}}$:

$$X_8 = -\lambda t \partial_t + x^2 \partial_w.$$

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1				X_6
X_2				X_5
X_3				
X_4	$-X_6$	$-X_5$		
X_5	$-X_3$			
X_6		$-X_3$		
X_7	$-3X_1$	$-2X_2$	$-4X_3$	X_4
X_8	λX_1	$-2X_6$		$-\lambda X_4$

	X_5	X_6	X_7	X_8
X_1	X_3		$3X_1$	$-\lambda X_1$
X_2		X_3	$2X_2$	$2X_6$
X_3			$4X_3$	
X_4			$-X_4$	λX_4
X_5			X_5	λX_5
X_6			$2X_6$	
X_7	$-X_5$	$-2X_6$		
X_8	$-\lambda X_5$			

4. $K(z) = K_1 \ln(az + b)$, $w_{tt} = K_1 \frac{\partial}{\partial x} \ln(a w_{xx} + b)$:

$$X_8 = t\partial_t + 2x\partial_x - \frac{2b}{a} x^2 \partial_w.$$

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1				X_6
X_2				X_5
X_3				
X_4	$-X_6$	$-X_5$		
X_5	$-X_3$			
X_6		$-X_3$		
X_7	$-3X_1$	$-2X_2$	$-4X_3$	X_4
X_8	$-X_1$	$-2X_2 + \frac{2b}{a}X_6$		$3X_4$

	X_5	X_6	X_7	X_8
X_1	X_3		$3X_1$	X_1
X_2		X_3	$2X_2$	$2X_2 - \frac{2b}{a}X_6$
X_3			$4X_3$	
X_4			$-X_4$	$-3X_4$
X_5			X_5	$-X_5$
X_6			$2X_6$	$-2X_6$
X_7	$-X_5$	$-2X_6$		
X_8	X_5	$2X_6$		

Других случаев расширения минимальной алгебры L_7 нет.

Теорема 4. Уравнение

$$z_{tt} = K(z_{xxx}), \ z = z(t, x)$$

при произвольной непостоянной функции $K = K(z)$ допускает 9-мерную алгебру операторов

$$L_9 = \langle \partial_t, \partial_x, \partial_z, x\partial_z, x^2\partial_z, t\partial_z, tx\partial_z, tx^2\partial_z, 3t\partial_t + 2x\partial_x + 6z\partial_z \rangle.$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1					
X_2				X_3	$2X_4$
X_3					
X_4		$-X_3$			
X_5		$-2X_4$			
X_6	$-X_3$				
X_7	$-X_4$	$-X_6$			
X_8	$-X_5$	$-2X_7$			
X_9	$-3X_1$	$-2X_2$	$-6X_3$	$-4X_4$	$-2X_5$

	X_6	X_7	X_8	X_9
X_1	X_3	X_4	X_5	$3X_1$
X_2		X_6	$2X_7$	$2X_2$
X_3				$6X_3$
X_4				$4X_4$
X_5				$2X_5$
X_6				$3X_6$
X_7				X_7
X_8				$-X_8$
X_9	$-3X_6$	$-X_7$	X_8	

Расширение этой алгебры возможно в следующих случаях:

1. $K(z) = K_1(az+b)^\lambda + K_0, \quad \lambda \neq 0, 1, -3, -\frac{1}{2}, a \neq 0, \; z_{tt} = K_1(az_{xxx}+b)^\lambda + K_0$:

$$X_{10} = (\lambda - 1)t\partial_t - \left(\lambda K_0 t^2 - \frac{b}{3a}x^3 - 2az\right)\partial_z;$$

2. $K(z) = K_1(az+b)^{-1/2} + K_0, \quad z_{tt} = K_1(az_{xxx}+b)^{-1/2} + K_0$:

$$X_{10} = -3ax\partial_x + \left(\frac{3}{2}aK_0t^2 + bx^3 - 3az\right)\partial_z,$$
$$X_{11} = x^2\partial_x - \left(K_0xt^2 + \frac{b}{6a}x^4 - 2xz\right)\partial_z;$$

3. $K(z) = K_1(az+b)^{-3} + K_0, z_{tt} = K_1(az_{xxx}+b)^{-3} + K_0$:

$$X_{10} = -8a\,x\partial_x + (9aK_0t^2 + bx^3 - 18az)\partial_z,$$
$$X_{11} = t^2\partial_t + \left(\frac{K_0}{2}t^3 + \frac{b}{6a}tx^3 + tz\right)\partial_z;$$

4. $K(z) = K_1e^{\lambda z} + K_0, z_{tt} = K_1e^{\lambda z_{xxx}} + K_0$:

$$X_{10} = 3\lambda t\partial_t + \left(3\lambda K_0t^2 - x^3\right)\partial_z;$$

5. $K(z) = K_1\ln(az+b) + K_0, \quad z_{tt} = K_1\ln(az_{xxx}+b) + K_0$:

$$X_{10} = -2ax\partial_x + (3aK_1t^2 + bx^3)\partial_z.$$

Других случаев расширения минимальной алгебры L_9 нет.

В последней теореме приведена только таблица коммутаторов основной алгебры допустимых операторов, остальные же таблицы коммутаторов не приводятся ввиду их значительного размера.

Список литературы

[1] Овсянников Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: изд-во Сибирского отделения АН СССР, 1962. 239 с.

[2] Овсянников Л.В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. Новосибирск: изд-во НГУ, 1966. 132 с.

[3] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.

[4] Ibragimov N.H. CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations. Vol. 1: Symmetries, exact solutions and conservation laws. Boca Ration: CRC Press Inc., 1994.

ISSN 2658–5782 15 (2020), **3–4**, 232–237

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2020.3.136
DOI: 10.21662/mfs2020.3.136

Received: 21.10.2020
Accepted: 28.12.2020

Group classification of third order nonlinear wave equations chain's

Babkov O.K., Mukhametova G.Z.

Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia

The paper presents the results of point symmetrys Lie algebras for third-order nonlinear wave equations calculating linked into a chain by B?cklund transformations. Calculations are carried out by using Lie-Ovsyannikov method of group analysis . The basic algebras of point symmetries of the indicated equations are found, all possible cases of their extension are revealed, and the commutator tables of algebras found are calculated.

Keywords: differential equations's chain, group classification, admissible operator, Lie algebra, commutators table

References

[1] Ovsyannikov L.V. [Group properties of differential equations] *Gruppovye svojstva differencial'nyx uravnenij*. Novosibirsk: Sibir Branch AS USSR, 1962. 239 p.

[2] Ovsyannikov L.V. [Lectures on the theory of group properties of differential equations] *Lekcii po teorii guppovyx svojstv differencial'nyx uravnenij*. Novosibirsk: NSU, 1966. 132 p.

[3] Ibragimov N.H. [Transformation groups in mathematical physics] *Gruppy preobrazovanij v matematicheskoj fizike*. M.: Science, 1983. 280 p.

[4] Ibragimov N.H. CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations. Vol. 1: Symmetries, exact solutions and conservation laws. Boca Ration: CRC Press Inc., 1994.