



ISSN: 2658–5782

Номер 1

2021

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org





Подготовка статьи для журнала «Многофазные системы»: руководство для автора¹

Галимзянов М.Н.* , Михайленко К.И.** , Налобина Е.А.*

*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

**Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Аннотация (abstract) оформляется в заголовке исходного файла как параметр команды `\abstract{}`.

Аннотация призвана дать развернутое описание статьи, позволяющее судить о содержании, используемых исследовательских подходах и полученных результатах. Объем аннотации составляет 200–250 слов (в итоговом файле они занимают от 18 до 22 строк).

Аннотация может содержать математические символы (греческие буквы, акценты, символ градуса и др.), но не должна включать формулы. Исключение делается для определяющих важные величины равенств, то есть математических выражений вида $\alpha = 123$.

Аннотация не должна содержать таблицы, изображения, ссылки на литературу и иные перекрестные ссылки.

В представленной статье дается краткое руководство по использованию класса `mfs.cls`, определяющего оформление статьи в журнале «Многофазные системы». Описание дается таким образом, чтобы оно могло быть использовано в качестве шаблона для подготовки Вашей статьи.

Редакция журнала «Многофазные системы» и авторы данной статьи просят Вас внимательно следовать представленному описанию, уделяя особое внимание тем пунктам, которые выделены полужирным шрифтом.

Ключевые слова: подготовка статьи, оформление, особенности, до 7 словосочетаний

1. Введение

Представленная статья является файлом-инструкцией для авторов по оформлению исходного текста в $\LaTeX 2_{\epsilon}$ для представления к публикации в журнале «Многофазные системы», кроме того, в статье дана информация о порядке прохождения рецензии и документах, которые необходимо предоставить в редакцию.

При оформлении желательно использовать исключительно стандартные команды $\LaTeX 2_{\epsilon}$, а также команды и возможности, предоставляемые стандартными пакетами:

- `mathtext` (для использования русских букв в формулах);
- `graphicx` (для подготовки и размещения иллюстраций);
- `amsmath`, `amssymb` (для использования шрифтов и символов от AMS).

Указанные пакеты подключаются автоматически, поэтому нет необходимости их описывать явно в заголовке исходного файла.

Также автоматически подключаются служебные пакеты `fontenc`, `inputenc`, `babel`, `mathpazo`, `paratype`, `hyperref`, `indentfirst`, `balance`, `caption`, `cite`, `smap`, `cuted`, `dblfloatfix`, `lastpage`, `mathtext`, `microtype`, `qrcode`, `tikz`. Использование иных пакетов не рекомендуется.

При оформлении статьи допускается введение автором новых команд (`\newcommand{}`).

¹Если вы хотите выразить благодарность за финансовую поддержку, сделайте это в виде сноски к названию статьи на первой странице.

Но при этом замена существующих команд (`\renewcommand{}`) абсолютно недопустима.

Редакция рекомендует при подготовке статьи использовать последнюю версию дистрибутива [TeXLive](#), ISO-образ для установки можно взять, например, [с зеркала](#).

2. Подготовка статьи

Страница статьи, представляемой в журнал, должна иметь размеры 297 × 210 мм (формат A4), что обеспечивается использованием специально подготовленного класса `mfs`.

При наборе текста абзацы отделяются друг от друга пустой строкой.

Допускается использование стандартных окружений для формирования списков, таких как `itemize`, `enumerate` и `description`.

2.1. Заголовок

Название статьи указывается как аргумент команды `\title{}`. При необходимости указания информации о проектах и грантах, в рамках которых выполнялось исследование, при заголовке формируется сноска с помощью команды `\thanks{}`.

Список авторов вносится посредством команды `\author{}`. Для каждого автора записываются фамилия и инициалы, отделенные отбивками, как это показано в исходном тексте текущей статьи. В том случае, когда авторы являются сотрудниками разных организаций, это поясняется одним, двумя или более символами «*» в верхнем индексе после ФИО автора. Для этого используется команда `\superscript{*}`.

Список организаций, в которых работают авторы указывается декларацией `\institute{}`. Если организаций указывается более одной, название каждой организации предваряется одним, двумя или более символами «*» в верхнем индексе (команда `\superscript{*}`), наименование каждой организации помещается на новой строке, как это сделано в данном примере.

Аннотация статьи также записывается в виде декларации (команда `\abstract{}`). Аннотация должна содержать 200–250 слов. Аннотация может содержать математические символы (греческие буквы, акценты, символ градуса и др.), но не должна включать формулы. Исключение делается для определяющих важные величины равенств, то есть математических выражений вида $\alpha = 123$.

Аннотация не должна содержать таблицы, изображения, ссылки на литературу и иные перекрестные ссылки.

В параметре декларации `\keywords{}` строчными буквами через запятую перечисляются ключевые слова, характеризующие содержание статьи (не более 7 слов или словосочетаний).

Описанные декларации размещаются до начала текста статьи (то есть до команды `\begin{document}`).

Заглавие статьи формируется командой `\maketitle`, которую необходимо указывать в самом начале текста (непосредственно после команды `\begin{document}`).

2.2. Разделы документа

В оформлении статей могут использоваться заголовки только двух уровней: раздел и подраздел. Данные заголовки формируются командами секционирования `\section{}` и `\subsection{}`.

Заголовки должны быть нумерованными, поэтому использование вариантов команд секционирования со звездочкой недопустимо.

В конце названия раздела точка не ставится, как это показано в данной статье.

2.3. Рисунки и таблицы

Таблицы и рисунки оформляются посредством окружений `table` и `figure`, формирующих соответствующие *плавающие объекты*, размещаемые в колонке. Если таблица или рисунок имеют слишком большую ширину, допускается их размещение на всю ширину страницы в верхней или нижней ее части. Такое размещение обеспечивается окружениями `table*` и `figure*`.

Таблицы и рисунки должны быть центрированы по ширине колонки или страницы.

Все рисунки и таблицы должны иметь исчерпывающую поясняющую подпись. Подпись к таблице помещается над таблицей, подпись к рисунку — под рисунком. Подпись формируется стандартной командой `\caption{}`. **В конце подписи к рисунку или таблицы точка не ставится.**

Пример размещения объекта по ширине страницы показан на рис. 1, а по ширине колонки — в табл. 1. В тексте должны присутствовать ссылки на все рисунки (отмечаются сокращением «рис.»), и все таблицы (сокращение «табл.»), **оформленные с помощью стандартных команд оформления перекрестных ссылок** `\label{}` и `\ref{}`, как это сделано в исходном тексте первого предложения данного абзаца.

В некоторых случаях, для достижения наилучшего размещения рисунка на заданной странице, имеет смысл переместить соответствующую команду на несколько абзацев выше или ниже реального упоминания рисунка в исходном файле.



Рис. 1. Пример рисунка (размещение по ширине страницы)

Однако, данному вопросу не стоит уделять излишнее внимание, так как при редакторской обработке рисунки могут быть перемещены и/или перекомпонованы для лучшего представления статьи.

Каждый рисунок должен быть оформлен в виде отдельного файла в векторном формате pdf или eps. Лучше всего, если они исходно будут сохранены в данный формат средствами используемой программы научной графики. В отдельных случаях, например для фотографий, допускается использование растрового формата jpg или конвертация фотографии в eps. При этом, чтобы не было больших потерь в качестве изображения, лучше всего использовать растровое изображение максимального доступного качества.

Схемы следует рисовать средствами \LaTeX (окружение `picture` или пакет `TikZ`); средствами `MetaPost`; или с использованием произвольного редактора **векторной графики** с сохранением результата в векторный формат (PDF, EPS или SVG). Использование растровой графики для подготовки схем **не допускается**.

Если вы используете `pdflatex` для прямого получения pdf из tex-файла, то предпочтительными рабочими форматами графических файлов должны быть pdf и для фотографий jpg. Если используется связка `latex-dvips-ps2pdf`, то рабочим форматом будет только eps, однако в редакцию следует предоставить также jpg-файлы, если они использовались.

При подготовке рисунка следует придержи-

ваться следующим правилам:

- все надписи на рисунках должны быть выполнены шрифтом **того же начертания**, что и текст статьи;
- размер символов на рисунке **должен соответствовать размеру символов в тексте** статьи;
- обозначение осей на графиках (физические величины, функции, переменные) делаются в математическом стиле — курсивом;
- единицы измерения (кг, м, с, ...) записываются прямым шрифтом и на русском языке.

2.4. Математические выражения

Математические выражения набираются с использованием стандартных средств $\LaTeX 2_{\epsilon}$.

Для расширения выразительной возможности математических выражений автоматически подключаются пакеты `amsmath`, `amssymb` из множества AMS.

Использование как нумерованных, так и ненумерованных выражений допустимо.

Ненумерованные формулы следует оформлять только указанным образом: $\left[\right]$. Математические символы в тексте выделяются знаками $\$ \$$ или $\langle \rangle$:

Известно, что двумерное течение вязкой жидкости в прямоугольном канале описывается законом Пуазейля. Эпюра продольной скорости при этом имеет форму параболы:

$$v(x) = \frac{\Delta p L^2}{4 \mu h} \left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right], \quad x \in [0, L],$$

где Δp — перепад давления в канале; μ — вязкость жидкости;

Таблица 1. Пример таблицы (размещение по ширине колонки)

A	B	C	D
a	b	c	d
a	b	c	d
a	b	c	d

h — длина канала; L — ширина канала.

Приведенный участок исходного текста на странице статьи будет выглядеть так, как показано ниже.

Известно, что двумерное течение вязкой жидкости в прямоугольном канале описывается законом Пуазейля. Эпюра продольной скорости при этом имеет форму параболы:

$$v(x) = \frac{\Delta p L^2}{4\mu h} \left[\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right], \quad x \in [0, L],$$

где Δp — перепад давления в канале; μ — вязкость жидкости; h — длина канала; L — ширина канала.

Нумерованные формулы необходимо оформлять указанным образом:

Уравнение неразрывности жидкой фазы:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \rho_i \vec{v}_i = 0, .$$

Уравнение неразрывности жидкой фазы:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \rho_i \vec{v}_i = 0. \quad (1)$$

Оформление ссылки на данную нумерованную формулу, содержащую метку μ_{eq1} производится командой ($\ref{\mu_{eq1}}$).

Многострочные формулы оформляются с помощью окружения `array`:

$$\begin{array}{c} a+b=c, ., \\ d-e < f, . \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a + b = c, \\ d - e < f. \end{array} \quad (2)$$

Команда `\displaystyle` в каждой строке окружения `array` применяется для корректного отображения дробей и иных аналогичных математических конструкций. Структура `\\[2mm]` определяет вертикальный отступ между строками выражения, отличающийся от стандартного (в примере указано расстояние 2 мм).

Использование окружения `eqnarray` и иных подобных не допускается.

2.5. Перекрестные ссылки и литература

Перекрестные ссылки оформляются стандартными средствами с помощью команд `\label{}` и `\ref{}`.

Ссылки на литературу формируются командой `\cite{}`. Ссылки перечисляются через запятую или тире, например [1], [2, 3], [3, 4, 6–8]. Правильное оформление таким образом перечисленных ссылок обеспечивается пакетом `cite`.

Библиографические источники оформляются в порядке их упоминания в тексте статьи посредством стандартного окружения `thebibliography` в соответствии с требованиями ГОСТ Р 7.0.12-2011. Примеры оформления по ГОСТу приведены в списке литературы для случаев книги [1], статьи из журнала на русском языке [2], на английском языке [3], на русском языке при наличии перевода [2, 4, 5], трудов конференции [6], диссертации [7], электронной публикации [8].

Если библиографический источник индексирован в базах данных DOI, eLibrary, MathNet, либо имеет электронный адрес на сайте журнала или издательства, после библиографической записи следует привести ссылку в соответствии со следующими правилами. Если имеется индекс DOI, то указываем его, как показано в примерах [2, 3]. Ссылка DOI формируется командой `\doi{}`. Если DOI-индекс у публикации отсутствует, но публикация индексирована в РИНЦ, указывается индекс eLibrary (команда `\elib{}`), как показано на примере ссылки [6]. При отсутствии предыдущих индексаций, но при наличии индекса MathNet, приводится индекс [5] (команда `\mathnet{}`). Последний вариант — ссылка на страницу публикации на сайте журнала или издательства. Это делается командой `\url{}`, как показано в [8].

При отсутствии перечисленных выше вариантов ссылок ничего иного указывать не надо [1, 7].

3. Перевод на английский

В конце статьи, написанной на русском языке, приводится перевод на английский названия статьи, транслитерация фамилий авторов, их аффилиации, перевод аннотации, ключевых слов и списка литературы. Перед соответствующими командами и декларациями необходимо переключить класс `mf s` на обработку английского языка, для чего указывается команда `\toEnglish`.

Перевод списка литературы должен соответствовать ряду правил.

Если статья, на которую указывает ссылка, была переведена на английский язык и опубликована в английской версии журнала, то необходимо указывать ссылку из переводного источника.

Последовательность перевода-транслитерации ссылки на источник, не имеющий перевода на английский: авторы (транслитерация), перевод названия статьи на английский язык в квадратных скобках, название источника (транслитерация, наклонный шрифт), перевод названия источника на английский язык в квадратных скобках, выходные данные с обозначениями на английском языке. После ссылки в скобках указывается язык публикации «(in Russian)».

Порядок транслитерации по ГОСТ приведён в табл. 2. Примеры транслитераций можно увидеть в переводном списке литературы по ссылкам [1, 6, 7].

Метки публикаций в переведенном списке литературы должны быть уникальными, то есть отличаться от соответствующих меток в списке литературы на русском языке хотя бы одним символом.

4. Особенности оформления

Для сохранения полиграфического качества текста следует придерживаться следующих правил при наборе исходного текста:

1. В тексте следует использовать два вида тире. Короткое тире, набираемое двоянным символом --, используется для указания числовых диапазонов, **не отбивается пробелами** (25--30: 25–30; пять--семь: пять–семь). Также короткое тире без отбивки используется в парах имён: (теория Иванова–Петрова: теория Иванова–Петрова). Длинное тире, используемое в остальных случаях, набираемое тройным символом ---, **обязательно отбивается пробелами и предваряется символом неразрывного пробела «~»**; $\$ \backslash \text{mu} \$ \sim \text{---}$ вязкость: μ — вязкость).
2. В тексте следует использовать кавычки-елочки, набираемые двоянными символами «больше» и «меньше»

Таблица 2. Транслитерация букв русского языка в соответствии с ГОСТ 7.79–2000

а	а	к	k	х	х
б	b	л	l	ц	с
в	v	м	m	ч	ch
г	g	н	n	ш	sh
д	d	о	o	щ	shh
е	e	п	p	ъ	"
ё	yo	р	r	ы	y
ж	zh	с	s	ь	'
з	z	т	t	э	e'
и	i	у	u	ю	yu
й	j	ф	f	я	ya

(«<<больше>>» и «<<меньше>>»). Допустимы вложенные кавычки-лапки, набираемые двоянной запятой и одинарной кавычкой («<<Кавычки , , второго ‘ ‘ уровня>>»: «Кавычки „второго“ уровня»). Символ дюйма " в качестве кавычек **абсолютно исключается**.

3. В тех случаях, когда необходимо предотвратить разрыв строки на одном из пробелов, вместо простого пробела набирается символ неразрывного пробела ~ (тильда). К таким случаям следует отнести пробел перед длинным тире (см. пример выше с правилами расстановок тире); пробел между фамилией и инициалами (Л. Д. ~Ландау); пробел между значением или обозначением физической величины и ее размерностью ($\$ 5 \$ \sim \text{км/ч}$; $\$ r \$, \sim \text{Па}$).

5. Состав класса mfs

Класс, определяющий оформление статьи для журнала «Многофазные системы», содержит следующие файлы:

Файл `mfs.cls` содержит в себе непосредственно код класса. Для работы со статьями необходим только этот файл.

Файл `mfs-example.cls` — исходный файл представленного примера-описания; файл `mfs-example.pdf` — обработанный L^AT_EX пример.

Файлы `mfs.pdf` и `mfs.eps` содержат изображение логотипа Журнала, используемое в примере. При этом файл `mfs.pdf` используется при вызове `pdflatex` для создания итогового pdf-файла статьи, а файл `mfs.eps` используется при обработке исходного файла связкой `latex-dvips-ps2pdf`.

6. Заключение

В исходном тексте этого файла авторы данной статьи постарались рассмотреть основные особенности и требования, связанные с оформлением tex-файла представляемой в Журнал статьи.

Также приведены примеры оформления графической информации и описаны особенности требований Журнала.

Авторы и редакция выражают надежду, что Вы внимательно прочитали это руководство. Просим особо учесть те пункты, которые выделены полужирным шрифтом. Несоблюдение указанных пунктов может привести к отклонению статьи по техническим причинам.

В тех случаях, когда автор не имеет достаточных навыков для подготовки исходного текста статьи средствами L^AT_EX 2_ε, либо возникли какие-либо сложности, просим связаться с редакцией для помощи и консультации.

Список литературы

- [1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
- [2] Галимзянов М.Н., Шагапов В.Ш. Аналитические исследования акустики суспензий // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 1. С. 27–35.
DOI: [10.21662/mfs2019.1.004](https://doi.org/10.21662/mfs2019.1.004)
- [3] Shagapov V.Sh., Khasanov M.K., Musakaev N.G. Formation of a gas hydrate due to injection of a cold gas into a porous reservoir partly saturated by water // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2008. V. 49, No. 3. Pp. 462–472.
DOI: [10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.01.105](https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.01.105)
- [4] Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А. Пространственное моделирование процесса формирования струи вскипающей воды при истечении из тонкого сопла // Теплофизика и аэромеханика. 2017. Т. 24, № 5. С. 783–794.
http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=171733&ARTICLE_ID=171744
- [5] Хабиров С.В. Простые частично инвариантные решения // Уфимский математический журнал. 2019. Т. 11, № 1. С. 87–98.
MathNet: [ufa463](https://mathnet.urfu.ru/ufa463)
- [6] Михайленко К.И., Кулешов В.С. Моделирование неоднородности потока газа, взаимодействующего с неподвижным слоем гранулированной среды // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов (20–24 августа 2015). Казань: Изд-во Казан. Ун-та. 2015. С. 2580–2582.
eLIBRARY ID: [24824847](https://elibrary.ru/24824847)
- [7] Марьин Д.Ф. Методы ускорения расчетов математических моделей молекулярной динамики на гибридных вычислительных системах: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18 / Марьин Дмитрий Фагимович. Уфа, 2015. 16 с.
- [8] Bruus H. Theoretical microfluidics. Lecture notes third edition. MIC Department of Micro and Nanotechnology Technical University of Denmark. 2006.
URL: http://homes.nano.aau.dk/lg/Lab-on-Chip2008_files/HenrikBruus_Microfluidics%20lectures.pdf
(дата обращения: 10.04.2018).



Formatting of an article for the journal "Multiphase Systems": a guide for the author

Galimzyanov M.N. *, Mikhaylenko C.I. **, Nalobina E.A. *

*Mavlyutov Institute of MEchanics of UFRC RAS, Ufa, Russia

**Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russia

Abstract is formatted in the header of the source file as a parameter to the `\abstract{}` command.

The abstract is intended to give a detailed description of the article, which makes it possible to judge the content used research approaches and results obtained. The volume of the abstract is 200–250 words (in the final file they are 18 to 22 lines long).

Abstract can contain mathematical symbols (Greek letters, accents, degree symbol, etc.), but should not include equations. An exception is made for equalities determining important values, that is mathematical expressions of the form $\alpha = 123$.

The abstract should not contain tables, images, references to literature and other cross-references.

This article provides a quick guide to using the `mfs.cls` class, which defines registration of an article in the journal "Multiphase Systems". The description is given in such a way that it can be used as a template for preparing your article.

The editors of the journal "Multiphase Systems" and the authors of this article ask you to carefully follow the presentation the description, paying particular attention to those paragraphs that are in bold.

Keywords: preparation of an article, design, features, up to 7 phrases

References

- [1] Lojcyanskij L.G. [Liquid and gase mechanics] *Mexanika zhidkosti i gaza*. M.: Drofa, 2003. P. 840 (in Russian)
- [2] Galimzyanov M.N., Shagapov V.Sh. Analytical studies of suspension acoustics. *Multiphase Systems*. 14 (2019) 1. 27–35 (in Russian).
DOI: 10.21662/mfs2019.1.004
- [3] Shagapov V.Sh., Khasanov M.K., Musakaev N.G. Formation of a gas hydrate due to injection of a cold gas into a porous reservoir partly saturated by water. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2008. V. 49, No. 3. Pp. 462–472.
DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer. 2015.01.105
- [4] Bolotnova R.K., Korobchinskaya V.A. Boiling water jet outflow from a thin nozzle: spatial modeling. *Thermophysics and Aeromechanics*. 2017. V. 24, No. 5. Pp. 761–771.
http://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=171733&ARTICLE_ID=171744
- [5] Khabirov S.V. Simple partially invariant solutions // *Ufa Mathematical Journal*. 2019. V. 11, No. 1. Pp. 90–99.
DOI: 10.13108/2019-11-1-90
- [6] Mikhaylenko C.I., Kuleshov V.S. [Simulation of inhomogeneity of gas flow interacting with a fixed bed of granular medium] *All-Russian Congress on the fundamental problems of theoretical and applied mechanics: the collection of reports [Vserossijskij c"ezd po fundamental'nym problemam teoreticheskoy i prikladnoj mexaniki: sbornik dokladov]*. Kazan: Publ. Kazan University, 2015. Pp. 2580–2582 (in Russian)
eLIBRARY ID: 24824847
- [7] Marin D.F. [Methods of accelerating the calculations of mathematical models of molecular dynamics on hybrid computing systems] *Metody uskoreniya raschetov molekulyarnoy dinamiki na gibridnyx vychislitel'nyx sistemax*. Ph.D. Thes. Ufa, 2015. P. 16 (in Russian)
- [8] Bruus H. *Theoretical microfluidics*. Lecture notes third edition. MIC Department of Micro and Nanotechnology Technical University of Denmark. 2006.
URL: http://homes.nano.aau.dk/Lg/Lab-on-Chip2008_files/HenrikBruus_Microfluidics%20lectures.pdf
(Accessed: 10.04.2018).



Численное исследование зависимости скорости волны фильтрационного горения газа от параметров процесса

Садриддинов П.Б.

Таджикский национальный университет, Душанбе

В работе рассмотрено численное исследование зависимости скорости распространения фронта фильтрационного горения газа от других физико-химических параметров, а именно от скорости вдува газа, диаметра частиц пористой среды. Численные расчеты производятся для трех составов водородо-воздушных смесей (65% H_2 +воздух, 55% H_2 +воздух, 33% H_2 +воздух). Также для численного исследования конструируется разностная схема. С помощью этой схемы создан комплекс программ на языке Delphi 7. Полученная программа дает возможность тщательно исследовать вышеуказанные зависимости. Представленные результаты показывают хорошее согласования с известными экспериментальными данными, а также позволяют получить новые выводы о структуре волны фильтрационного горения газов.

Ключевые слова: уравнения, анализ, температура, фильтрация, скорость, численный метод, водород, диаметр частиц, химическая реакция, дифференциальные уравнения

Настоящая работа посвящена численному исследованию зависимости скорости волны фильтрационного горения газов от других физико-химических параметров. Фильтрационное горение газов (ФГГ) рассматривается в инертной пористой среде, представленной в виде трубы достаточно большой длины, заполненной зернистым материалом. С правого конца трубы подается газовая смесь, которая продвигается к левому концу. На этом конце происходит поджог газа, и через некоторое время фронт горения начинает распространяться к правому концу. В зависимости от процентного соотношения водорода в воздушной смеси, скорости его вдува, свойств материала и т.д. фронт горения может распространяться вправо, остановиться или уноситься потоком к левому концу трубы. Изучение закономерностей этого процесса открывает возможности проектирования новых техно-

логий в различных областях химической промышленности. Для теоретического описания процесса ФГГ используется математическая модель Лаевского Ю.М. и Бабкина В.С. [1], в которой состояние рассматриваемого объекта в точке с координатой x в момент времени t характеризуется тремя функциями: температурами газа T_1 , пористой среды T_2 и относительной концентрации n недостающего компонента газа. Процесс распространения волн ФГГ изучается по оси x , движущейся поступательно с постоянной скоростью u вдоль неподвижной оси $\xi(x = \xi - ut)$. В экспериментах было обнаружено, что волна ФГГ в подвижной системе координат x довольно быстро стабилизируется. Для изучения установившегося состояния волны Бабкиным В.С. и другими впервые предложена следующая математическая модель:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\rho_2 c_2 u \frac{dT_2}{dx} = \\ = \frac{d}{dx} \left(\alpha_2 \lambda_2 \frac{dT_2}{dx} \right) + \alpha_c S_c (T_1 - T_2), \\ \rho_1 c_p (v_1 - u) \frac{dT_1}{dx} = \\ = \frac{d}{dx} \left(\alpha_1 \lambda_1 \frac{dT_1}{dx} \right) - \alpha_c S_c (T_1 - T_2) + \rho_1 Q \eta_0 J, \\ \rho_1 (v_1 - u) \frac{dn}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\rho_1 D \frac{dn}{dx} \right) - \rho_1 J, \\ J = nk_0 \exp(E/RT_1), \\ \rho_1 (v_1 - u) = \text{const}, \quad \rho_1 T_1 = \text{const}, \end{array} \right. \quad (1)$$

где

$$\alpha_c = \frac{Nu \lambda_1}{d_{eff}}; \quad Nu = 0,395 Re^{0,64} \frac{1}{Pr}; \quad Re = \frac{|v_{10}| d_{eff} \rho_1^0}{\mu_1};$$

$$Pr = \frac{c_p \mu_1}{\lambda_1}; \quad d_{eff} = \frac{2\alpha_1 d}{3\alpha_2}; \quad S_c = \frac{6\alpha_2}{d};$$

T_1, T_2 — температуры газа и пористой среды; n — относительная массовая концентрация недостающего компонента; v_1 — скорость газа в порах; ρ_1, c_p — приведенная плотность и теплоемкость смеси газов при постоянном давлении; ρ_2, c_2 — те же величины для пористой среды; λ_1 — коэффициент теплопроводности смеси газов; λ_2 — эффективный коэффициент теплопроводности пористой среды; α_1, α_2 — объемные содержания газа и пористой среды; α_c — поверхностный коэффициент межфазного теплообмена; S_c — удельная поверхность пористой среды; α_0 — объемный коэффициент теплоотдачи в окружающее пространство; Q — тепловой эффект реакции; J — скорость химической реакции; k_0 — предэкспонент; E — энергия активации; R — универсальная газовая постоянная; μ_1, η_0, d — постоянные физико-химические и геометрические параметры газа и пористой среды.

Причем на искомые функции накладываются следующие ограничения:

$$\begin{array}{l} x = -\infty: \quad T_1 = T_2 = T_0, \quad n = 1, \\ x = +\infty: \quad \frac{dT_1}{dx} = \frac{dT_2}{dx} = 0, \quad \frac{dn}{dx} = 0. \end{array} \quad (2)$$

Первое и второе уравнения системы (1) описывают перенос тепла в пористой среде и газовой смеси, третье и четвертое характеризуют перенос масс недостающего компонента газа и газовой смеси в целом и пятое — уравнение состояние газа.

Система стационарных уравнений на основе решения математической модели фильтрационного горения газов, состоящая из одномерных уравнений сохранения энергии газа и пористой среды,

сохранения массы недостающего компонента смеси газов, сохранения полного количества вещества в потоке и уравнения идеального газа, была создана и исследована рядом авторов [2–4].

Из (1) с граничными условиями (2) получим следующую систему для изучения структуры стационарных волн фильтрационного горения газов в движущейся с постоянной скоростью U системе координат и на бесконечном интервале времени:

$$\begin{array}{l} -\rho_2 c_2 U \frac{dT_2}{dx} = \\ = \alpha_2 \lambda_2 \frac{d^2 T_2}{dx^2} + \alpha_c S_c (T_1 - T_2) - \alpha_{0,e} (T_2 - T_0), \\ \rho_1 c_p (v_1 - U) \frac{dT_1}{dx} = \\ = -\alpha_c S_c (T_1 - T_2) + \rho_1 Q \eta_0 nk_0 \exp(-E/RT_1), \\ \rho_1 (v_1 - U) \frac{dn}{dx} = -\rho_1 nk_0 \exp(-E/RT_1), \\ \rho_1 (v_1 - U) = \rho_{10} (v_{10} - U), \quad \rho_1 T_1 = \rho_{10} T_0. \end{array} \quad (3)$$

Граничные условия задачи:

$$\begin{array}{l} x = -\infty: \quad T_1 = T_0, \quad T_2 = T_0, \quad n = 1, \\ x = +\infty: \quad \frac{dT_1}{dx} = 0, \quad \frac{dT_2}{dx} = 0, \quad n = 0. \end{array} \quad (4)$$

Численно задача решается методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Для убедительности правильного использования этого метода численно решается система из трех дифференциальных уравнений с тремя неизвестными функциями, допускающая аналитическое решение, подобная системе (3). Все расчетные значения скоростей вычислены при следующих теплофизических характеристиках: $\rho_1^0 = 0.6$ кг/м³, $\rho_2^0 = 3000$ кг/м³, $\alpha_1 = 0.5$, $c_p = 10^3$ Дж/(кг·К), $c_2 = 660$ Дж/(кг·К), $T_0 = 300$ К, $\lambda_1 = 0.084$ Вт/(м·К), $\lambda_2 = 4$ Вт/(м·К), $E = 126 \cdot 10^3$ кг·м²/(с²·моль), $Q = 15.13 \cdot 10^6$ м²/с², $k_0 = 5 \cdot 10^{10}$ с⁻¹, $d = 10^{-3}$ м, $\eta_0 = 0.077$, $R = 8.314$ кг·м²/(с²·моль·К).

Для этого предварительно приведем уравнения к безразмерному виду:

$$\theta_1 = \frac{T_1 - T_0}{T_e - T_0}, \quad \theta_2 = \frac{T_2 - T_0}{T_e - T_0}, \quad x = \frac{\xi}{L}, \quad n = \frac{\eta}{\eta_0},$$

получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\theta_1}{dx} = a_1 (\theta_1 - \theta_2) + a_2 \exp\left(\frac{a_6}{\theta_1 + a_7}\right), \\ \frac{d\theta_2}{dx} = \frac{1}{a_3} \frac{d^2 \theta_2}{dx^2} + a_4 (\theta_1 - \theta_2), \\ \frac{dx}{dx} = a_5 n \exp\left(\frac{a_6}{\theta_1 + a_7}\right), \end{array} \right. \quad (5)$$

где

$$a_1 = -\frac{L\alpha_c S_c}{\alpha_1 c_p \rho_{10}(v_{10} - u)}, \quad a_2 = \frac{\eta_0 Q L k}{(T_e - T_0)(c_p(v_{10} - u))},$$

$$a_3 = -\frac{u \rho_2 c_2 L}{\alpha_2 \lambda_2}, \quad a_4 = -\frac{\alpha_c S_c L^2}{\alpha_2 \lambda_2},$$

$$a_5 = -\frac{L k_0}{v_{10} - u}, \quad a_6 = -\frac{E}{T_e - T_0}, \quad a_7 = \frac{T_0}{T_e - T_0}.$$

Здесь L — характерный размер.

Систему (5) разрешим относительно старших производных:

$$\begin{cases} \frac{dn}{dx} = a_5 n \exp\left(\frac{a_6}{\theta_1 + a_7}\right), \\ \frac{d\theta_1}{dx} = a_1(\theta_1 - \theta_2) + a_2 n \exp\left(\frac{a_6}{\theta_1 + a_7}\right), \\ \frac{d\theta_2}{dx} = \theta_2, \\ \frac{dx}{d\theta_2} = \frac{1}{a_3} \theta_2 - \frac{a_4}{a_3}(\theta_1 - \theta_2). \end{cases} \quad (6)$$

При решении задачи (6) с помощью метода Рунге–Кутты с погрешностью не более четвертого порядка малости (h^4) оказалось, что разность между расчетными и аналитическими решениями на каждом шаге интегрирования интеграла энергии не превышает 10^{-4} , что подтверждает высокую точность метода.

Стационарная скорость U подбирается таким образом, чтобы решение задачи (3) выходило из одной особой точки ($T_1 = T_0, T_2 = T_0$) и входило в другую $\frac{dT_1}{dx} = 0, \frac{dT_2}{dx} = 0, n = 0$.

Для детального численного анализа влияния параметров системы «пористая среда – газ» на характеристики волны ФГГ и получения достаточного представления о ее стационарной структуре рассматривался широкий диапазон входящих в систему параметров.

На рис. 1 показана зависимость скорости распространения фронта ФГГ u от скорости вдува газа v_{10} для различного процентного содержания водорода в смеси. Обычно в научной литературе по фильтрационному горению газов приводится зависимость скорости волны ФГГ от скорости вдува газа $u(v_{10})$ при разных значениях параметров системы [5, 6].

Поэтому для изучения влияния содержания водорода в смеси на изменения $u(v_{10})$ были рассмотрены три варианта процентного содержания водорода в смеси: 65 %, 55 %, 23 %. Из представленных графиков зависимости $u = u(v_{10})$ видно, что по мере уменьшения содержания водорода в смеси скорость распространения волны фильтрационного горения газа навстречу потоку увеличивается, что подтверждается расположением кривых

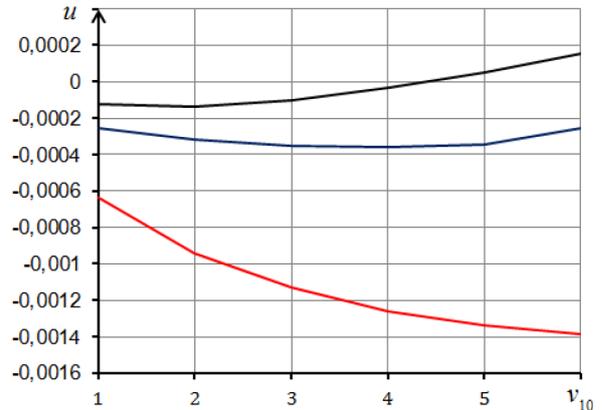


Рис. 1. Зависимость скорости распространения фронта ФГГ u от скорости вдува газа v_{10} : 1 – (23% H₂), 2 – (55% H₂), 3 – (65% H₂)

зависимости $u = u(v_{10})$ на рис. 1. Следует отметить, что кривые 2 и 3 показывают наличие максимумов при $u = -0.00036748$ м/с, $v_{10} = 3$ м/с и $u = -0.0001368$ м/с, $v_{10} = 2$ м/с, что соответствует экспериментальным результатам [5].

На рис. 2 приводятся расчетные кривые зависимости скорости волны от диаметра частиц пористой среды при различных значениях скорости вдува. При каждом фиксированном значении скорости вдува кривые возрастают с увеличением диаметра частиц пористой среды. Например, согласно кривой 1 при $v_{10} = 1$ м/с и $d = 1$ мм скорость волны $u = -0.0001368$ м/с, а при $d = 6$ мм — $u = -1.50E - 05$. В этом случае по характеру возрастания кривой можно ожидать, что при некотором диаметре частиц скорость волны будет равна нулю, то есть реализуется стоячая волна горения.

Из графиков зависимости на рис. 2 получаем подтверждение известных результатов экспериментальных данных [5].

Также были рассчитаны зависимости скорости вдува газа от изменения диаметра частиц (рис. 3). С увеличением скорости вдува кривые располагаются все выше и выше, и стоячая волна горения реализуется при относительно малых диаметрах частиц. Например, согласно кривой 2 $v_{10} = 3$ м/с, $u = 0$ при $d \approx 1.5$ мм.

Из рис. 2 и 3 видно, что при некоторых комбинациях скорости вдува и диаметра частиц существует стоячая волна горения ($u = 0$). Представлялось интересным проверить возможность моделирования этого процесса. Оказалось, что полученные в настоящей работе численные решения подтверждают результаты экспериментов. Выполненные расчеты показали, что в случае 55% H₂

Таблица 1. Характеристики режимов

Режим	S_s , м/с	Механизм распространения ФГГ	Ссылки
РНС	$0-10^{-4}$	Теплопроводность каркаса, межфазный теплообмен	[8]
РВС	0.1–10	Дисперсионная теплопроводность и диффузия при постоянном давлении	[9]
ЗС	100–300	Дисперсионная теплопроводность и диффузия при значительных градиентах давления	[10, 11]
НСД	500–100	Специфические детонационные механизмы в масштабах пор	

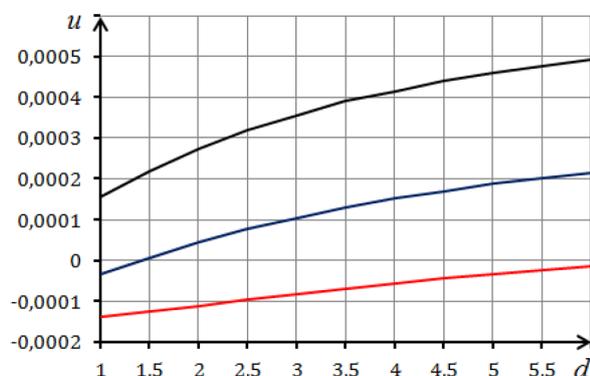


Рис. 2. Зависимость скорости волны u от диаметра частиц твердой фазы d (мм) при скоростях вдува газа: 1 – ($v_{10} = 1$), 2 – ($v_{10} = 3$), 3 – ($v_{10} = 5$)

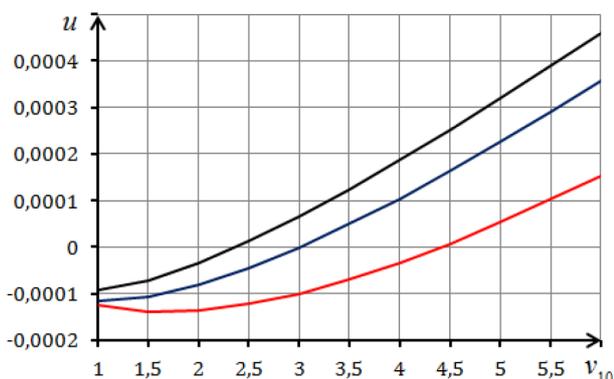


Рис. 3. Зависимость скорости волны u от скорости вдува газа v_{10} при разном диаметре частиц: 1 – $d = 1$ мм, 2 – $d = 3$ мм, 3 – $d = 5$ мм

скорость волны равна нулю при диаметре частиц 3,5 мм и скорости вдува 6,0 м/с, а с увеличением диаметра частиц до 6 мм скорость вдува падает до 2,5 м/с. Графики показывают, что по мере уменьшения процентного содержания водорода в смеси кривые зависимости скорости волны на рис. 2 и 3 располагаются все ниже и ниже относительно оси абсцисс. В случае 23 % содержания водорода в смеси все найденные нами скорости волны ФГГ отрицательны, то есть волны распространяются против направления потока газа, что подтверждается экспериментами [5].

Согласно классификации режимов фильтрационного горения газов, настоящая статья посвящена режиму низких скоростей; в литературе распространена классификация режимов ФГГ, основанная на скорости распространения горения относительно пористой среды. Бабкин В.С., например, выделяет режим низких скоростей (РНС), режим высоких скоростей (РВС), режим звуковых скоростей (ЗС) и низкоскоростной детонации (НСД) [7]. Характеристики режимов приведены в табл. 1.

Выполненная работа позволит в дальнейшем получать новые решения с помощью рассмотренной модели расчета для расширенного диапазона исходных данных задачи фильтрационного горения газов.

Список литературы

- [1] Лаевский Ю.М., Бабкин В.С. В кн.: Распространение тепловых волн в гетерогенных средах. Новосибирск: Наука, 1988. С. 108–145.
- [2] Кабилов М.М., Садриддинов П.Б., Халимов И.Х. Численное определение структуры и характеристики стационарной волны фильтрационного горения газов // Известия Академии наук Республики Таджикистан. 2011. № 1(142). С. 47–54. eLIBRARY ID: 20202023
- [3] Садриддинов П.Б. Определение скорости фронта фильтрационного горения газов // Вестник Таджикского национального университета. 2015. №1/4(168). С. 17–20. eLIBRARY ID: 24352108

- [4] Киселев О.В., Матрос Ю.Ш., Чумакова Н.А. В кн.: Распространение тепловых волн в гетерогенных средах. Новосибирск: Наука, 1988. С. 145–203.
- [5] Какуткина Н.А., Коржавин А.А., Мбарова М. Особенности фильтрационного горения водородо-, пропано- и метано-воздушных смесей в инертных пористых средах // Физика горения и взрыва. 2006. Т. 42, № 4. С. 8–20.
eLIBRARY ID: 16542241
- [6] Кабилов М.М., Садриддинов П.Б., Гулбоев Б.Дж., Холов О.А. Математическая модель фильтрационного горения газов при подобию распределения температуры и концентрации // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. 2017. Т. 60, № 9. С. 402–409.
eLIBRARY ID: 32239931
- [7] Babkin V.S. Filtration combustion of gases/ Present state of affairs and prospects // Pure and Appl. Chem. 1993. Vol. 65. P. 335–344.
DOI: 10.1351/pac199365020335
- [8] Бабкин В.С. Дробышев В.И. Лаевский Ю.М., Потытняков С.И. Фильтрационное горение газов // Физика горения и взрыва. 1983. Т. 19, № 2. С. 17–26.
https://sibran.ru/journals/issue.php?ID=151138&ARTICLE_ID=151174
- [9] Бабкин В.С. Бунев В.А., Коржавин А.А., Клименко А.С., Зубков В.И., Григорьев В.М. Горение газа в сосуде с высокопористой инертной средой // Физика горения и взрыва. 1985. Т. 21, № 5. С. 17–22.
https://sibran.ru/journals/issue.php?ID=150426&ARTICLE_ID=150923
- [10] Лямин Г.А., Пинаев А.В. О режиме быстрого дозвукового горения газов в инертной пористой среде с плавным подъемом давления в волне // Физика горения и взрыва. 1987. Т. 23, № 4. С. 27–30.
eLIBRARY ID: 30492084
- [11] Пинаев А.В., Лямин Г.А. Основные закономерности дозвукового и детонационного горения газов в инертных пористых средах // Физика горения и взрыва. 1989. Т. 25, № 4. С. 75–85.
eLIBRARY ID: 30549898



Numerical study of the dependence of the wave velocity of filtration gas combustion on the process parameters

Sadriddinov P.B.

Tajik National university, Dushanbe, Tajikistan

When solving problems in the field of filtration combustion of gases, numerical methods are often used to analyze the wave structure depending on changes in the hydrogen content in the mixture and other physical and chemical parameters. This work analyzes the stationary structure of the wave of filtration combustion of incompressible gas in the low-speed mode when the parameters of the gas flow and the porous medium change, as well as when the hydrogen content in the mixture changes. The problem is solved by the numerical Runge-Kutta method of the fourth order of accuracy, tested on a system of differential equations. Reduced to a dimensionless form, the system of equations is written in vector format. Programming is performed in Delphi 7. The results presented show agreement with the known experimental data and also allow us to obtain new conclusions about the structure of the filtration combustion wave of gases.

Keywords: equations, analysis, temperature, filtration, velocity, numerical method, hydrogen, particle diameter, chemical reaction, differential equations

References

- [1] Laevskij Yu.M., Babkin V.S. In book: Propagation of heat waves in heterogeneous media. Novosibirsk: Nauka, 1988. Pp. 108–145. (in Russian)
- [2] Kabilov M.M., Sadriddinov P.B., Halimov I.H. Numerical determination of the structure and characteristics of stationary waves filtration combustion of gases. News of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. 2011. No. 1(142). Pp. 47–54. (in Russian)
eLIBRARY ID: 20202023
- [3] Sadriddinov P.B. [Determination of the speed of the front of filtration combustion of gases]. Bulletin of the Tajik national university. 2015. No. 1/4(168). Pp. 17–20. (in Russian)
eLIBRARY ID: 24352108
- [4] Kiselev O.V., Matros Yu.Sh., Chumakova N.A. In book: Propagation of heat waves in heterogeneous media. Novosibirsk: Nauka, 1988. Pp. 145–203. (in Russian)
- [5] Kakutkina N.A., Korzhavin A.A., Mbarawa M. Filtration combustion of hydrogen-air, propane-air, and methane-air mixtures in inert porous media. Combustion, Explosion, and Shock Waves. 2006. V. 42, No. 4. Pp. 372–385.
DOI: 10.1007/s10573-006-0065-z
- [6] Kabilov M.M., Sadriddinov P.B., Gulboev B.J., Kholov O.A. Mathematical model filtration combustion of gases in the similarity of the distribution of temperature and concentration. Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan. 2017. V. 60, No. 9. Pp. 402–409. (in Russian)
eLIBRARY ID: 32239931
- [7] Babkin V.S. Filtration combustion of gases/ Present state of affairs and prospects. Pure and Appl. Chem. 1993. V. 65. P. 335–344.
DOI: 10.1351/pac199365020335
- [8] Babkin V.S., Drobyshevich V.I., Laevskij Yu.M., Potytnyakov S.I. [Filtration combustion of gases] *Fizika gorenija i vzryva* [Physics of Combustion and Explosion]. 1983. V. 19, No. 2. Pp. 17–26. (in Russian)
https://sibran.ru/journals/issue.php?ID=151138&ARTICLE_ID=151174
- [9] Babkin V.S., Bunev V.A., Korzhavin A.A., Klimenko A.S., Zubkov B.I., Grigoriev V.M. [Combustion of gas in a vessel with a highly porous inert medium]. *Fizika gorenija i vzryva* [Physics of Combustion and Explosion]. 1985. V. 21, No. 5. Pp. 17–22. (in Russian)
https://sibran.ru/journals/issue.php?ID=150426&ARTICLE_ID=150923
- [10] Lyamin G.A., Pinaev A.V. [A regime of subsonic gas combustion in an inert porous medium with smooth pressure rise in the wave]. *Fizika gorenija i vzryva* [Physics of Combustion and Explosion]. 1987. V. 23, No 4. Pp. 27–30. (in Russian)
eLIBRARY ID: 30492084
- [11] Pinaev A.V., Lyamin G.A. [Basic laws of subsonic and detonation combustion of gases in inert porous media]. *Fizika gorenija i vzryva* [Physics of Combustion and Explosion]. 1989. V. 25, No. 4. Pp. 75–85. (in Russian)
eLIBRARY ID: 30549898



Исследование динамики газа и газочапельной смеси при точечном взрыве на основе аналитического решения Седова¹

Болотнова Р.Х.^{*}, Коробчинская В.А.^{*,**}, Файзуллина Э.А.^{*}

^{*}Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

^{**}Башкирский государственный университет, Уфа

Исследована динамика поведения газа и газочапельной смеси при точечном взрыве с использованием аналитического решения Л.И. Седова, построенного на основе автомодельного решения для задачи о точечном взрыве в газе сферической конфигурации. Приведен анализ актуальности задач теории точечного взрыва в связи с их использованием при изучении процессов взрывного разрушения космических тел в атмосфере, где полученные аналитические решения Л.И. Седова применялись в качестве начальных условий для дальнейшей численной реализации поставленных задач. Отмечены работы, в которых в автомодельной постановке рассматривались задачи о точечном взрыве в запыленной среде. Приведено автомодельное решение задачи Л.И. Седова о точечном взрыве в газе и газочапельной смеси. Выполнен сравнительный анализ полученных решений в газе и газочапельной смеси в виде динамических характеристик формирующихся волновых течений. Показано, что использование аналитического решения позволяет оценить параметры ударных волн в изучаемой среде и получить оценки эффективности энергопоглощающих свойств газочапельной смеси по сравнению с газом для условий равного начального энергетического воздействия, что качественно не противоречит имеющимся решениям других авторов и соответствующим экспериментальным данным. Отмечена возможность использования полученных аналитических решений в дальнейших исследованиях для апробации применяемых численных методов при решении задач динамики газожидкостных потоков.

Ключевые слова: задача Л.И. Седова, автомодельное решение, точечный взрыв, совершенный газ, газочапельная смесь

1. Введение

Одно из наиболее известных автомодельных решений, описывающих взрывную волну, вызванную сильным взрывом, было найдено Л.И. Седовым в связи с исследованиями взрыва атомной бомбы. В настоящее время задачи теории точечного взрыва вновь выдвинулись в ряд вопросов первостепенной значимости ввиду изучения вторжения в атмосферу Земли малых космических

тел с их последующим взрывным разрушением [1]. В отмеченной работе решение автомодельной задачи о точечном взрыве Л.И. Седова [2] используется в качестве начальных условий. В [3] проведен сравнительный анализ решений задачи Л.И. Седова о точечном взрыве в газе для плоского случая, полученных аналитическим методом и с использованием открытого программного комплекса вычислительной гидродинамики OpenFOAM.

При решении актуальных задач динамики газочапельной смеси с целью апробации используемых программных комплексов представляют интерес исследования, в которых в автомодельной постановке рассматриваются задачи о сильном взрыве в газе с примесями очень мелких твердых или

¹Работа выполнена при финансовой поддержке средствами государственного бюджета по госзаданию 0246–2019–0052.

жидких частиц [2, 4]. В частности, в работе [4] рассматривается точечный взрыв в запыленной среде, состоящей из газа и твердых частиц. В случае отсутствия противодействия и при соответствующем выборе параметров задача сводится к автомодельной [2]. В [4] отмечен немонотонный характер распределения давления и скоростей частиц в отличие от случая чистого газа. Однако, в работах [2, 4] не приводится сравнительный анализ динамики распространения формирующихся волновых течений в запыленном и чистом газе.

Самостоятельный интерес для целей настоящей работы представляет проведение сопоставительного анализа нестационарного процесса формирования ударной волны в газе и газокапельной смеси, инициированной точечным взрывом, на основе аналитического автомодельного решения задачи Л.И. Седова для случая сферической конфигурации [2].

2. Автомодельное решение задачи Л.И. Седова о точечном сферическом взрыве в газе

Точечный сферический взрыв в газе рассматривается как мгновенное выделение в малом объеме пространства большого количества энергии E . При этом возникает сферическая ударная волна (УВ), которая радиально распространяется от центра взрыва и отделяет области возмущенного и невозмущенного состояния газа. При переходе через фронт УВ, который имеет скорость D и является поверхностью сильного разрыва, происходит скачкообразное изменение значений основных параметров УВ: давления p , скорости v , плотности ρ и температуры T .

При этом законы сохранения массы, импульса и энергии должны выполняться по обе стороны фронта УВ [2]:

$$\rho_1(v_1 - D) = \rho_2(v_2 - D), \quad (1)$$

$$\rho_1(v_1 - D)^2 + p_1 = \rho_2(v_2 - D)^2 + p_2, \quad (2)$$

$$\frac{(v_1 - D)^2}{2} + h_1 = \frac{(v_2 - D)^2}{2} + h_2, \quad (3)$$

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}, \quad p = \rho RT,$$

где h_i — удельная энтальпия газа: $h = c_p T$; c_p — изобарная теплоемкость; γ — показатель адиабаты газа; R — газовая постоянная; $i = 1, 2$.

Из (3) следует

$$\frac{(v_1 - D)^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{(v_2 - D)^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2}. \quad (4)$$

Принимая во внимание, что давление и скорость перед фронтом УВ пренебрежимо малы, из законов сохранения (1), (2), (4) получаем выражения для скорости v_2 , плотности ρ_2 и давления p_2 за фронтом УВ:

$$v_2 = \frac{2}{\gamma + 1} D, \quad \rho_2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_1, \quad p_2 = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_1 D^2. \quad (5)$$

Система одномерных уравнений газовой динамики совершенного газа в дифференциальной форме включает законы сохранения массы, импульса и энергии [2, 5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} + (\nu - 1) \frac{\rho v}{x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где t — время; x — эйлерова координата; $\nu = 3$ соответствует сферическому случаю.

Для обезразмеривания уравнений системы (6) в [2] вводится параметр m , имеющий размерность массы. Тогда искомые функции можно представить в виде:

$$\begin{aligned} v &= \frac{x}{t} \bar{v}, \\ \rho &= \frac{m}{x^{k+3} t^s} \bar{\rho}, \\ p &= \frac{m}{x^{k+1} t^{s+2}} \bar{p}, \end{aligned} \quad (7)$$

где x , t , m — размерные параметры; \bar{v} , $\bar{\rho}$, \bar{p} — безразмерные величины; k , s — целые неотрицательные числа. Решение системы (6) будет определяться двумя независимыми размерными величинами: начальной плотностью ρ_1 [кг/м³] и начальной энергией E_1 [кг · м²/с²]. Определяющими параметрами будут величины ρ_1 , E_1 , x , t , γ . В этом случае, согласно теории размерностей [2], единственной безразмерной переменной будет

$$\lambda = \frac{x}{\left(\frac{E}{\rho_1} \right)^{1/5} t^{2/5}}, \quad (8)$$

и безразмерные величины могут зависеть только от γ и λ . Здесь $E = \alpha E_1$, где α — константа.

Для $\lambda = 1$ на основании уравнений движения (6) и (8) можно определить координату фронта сферической УВ [2]:

$$r_2 = \left(\frac{E}{\rho_1} \right)^{1/5} t^{2/5}. \quad (9)$$

Откуда находится скорость фронта УВ:

$$D = \frac{dr_2}{dt} = \frac{2}{5} \left(\frac{E}{\rho_1} \right)^{1/5} t^{-3/5} = \frac{2}{5} \frac{r_2}{t}. \quad (10)$$

Используя законы сохранения на фронте УВ (5) с учетом (10) параметры УВ будут найдены в виде [2]:

$$v_2 = \frac{x}{t} \bar{v}_2, \quad \rho_2 = \rho_1 \bar{\rho}_2, \quad p_2 = \rho_1 \left(\frac{x}{t} \right)^2 \bar{p}_2. \quad (11)$$

Тогда, используя соотношения (5) и (11), получим

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{2}{\gamma+1} \frac{2}{5} \frac{x}{t} = \frac{x}{t} \bar{v}_2, \\ \rho_2 &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_1 = \rho_1 \bar{\rho}_2, \end{aligned} \quad (12)$$

$$p_2 = \frac{2}{\gamma+1} \rho_1 \left(\frac{2}{5} \frac{x}{t} \right)^2 = \rho_1 \left(\frac{x}{t} \right)^2 \bar{p}_2.$$

Из (12) следует:

$$\begin{aligned} \bar{v}_2 &= \frac{4}{5(\gamma+1)}, \\ \bar{\rho}_2 &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \\ \bar{p}_2 &= \frac{8(\gamma-1)}{25(\gamma+1)^2} \bar{\rho}_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Вводя переменную $\bar{z}_2 = \gamma \bar{p}_2 / \bar{\rho}_2$ на УВ, получим

$$\bar{z}_2 = \frac{8\gamma(\gamma-1)}{25(\gamma+1)^2}. \quad (14)$$

Решая систему уравнений (6), где v , ρ и p представлены в виде (7), и вводя новую переменную $z = \gamma \bar{p} / \rho$, Л.И. Седов получил, что единственная интегральная кривая, соответствующая аналитическому решению задачи о точечном взрыве, может быть выведена из интеграла энергии и для сферического случая имеет вид:

$$z = \frac{(\gamma-1)\bar{v}^2(\bar{v} - \frac{2}{5})}{\frac{4}{5\gamma} - 2\bar{v}}. \quad (15)$$

Подставляя значение z (15) в поле интегральных кривых полученной системы уравнений, были найдены величины $\lambda(\bar{v})$, $\rho(\bar{v})$ с использованием простых квадратур, откуда получены следующие аналитические решения для скорости v , давления p , эйлеровой x и лагранжевой r координат и температуры T для случая сферической симметрии:

$$\begin{aligned} \frac{v}{v_2} &= \left[\frac{5}{4}(\gamma+1)\bar{v} \right]^{\frac{3}{5}} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{5}{2}\gamma\bar{v} - 1 \right) \right]^{\frac{2}{2\gamma+1}} \times \\ &\times \left[\frac{5}{2} \frac{(\gamma+1)(3\bar{v}\gamma - \bar{v} - 2)}{\gamma-7} \right]^{\frac{12\gamma^2-68\gamma-12}{5(2\gamma+1)(3\gamma-1)}}, \\ \frac{p}{p_2} &= \left[\frac{5}{4}(\gamma+1)\bar{v} \right]^{\frac{6}{5}} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(1 - \frac{5}{2}\bar{v} \right) \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-2}} \times \\ &\times \left[\frac{5}{2} \frac{(\gamma+1)(3\bar{v}\gamma - \bar{v} - 2)}{\gamma-7} \right]^{\frac{12\gamma^2-68\gamma-12}{5(\gamma-2)(3\gamma-1)}}, \\ \frac{\rho}{\rho_2} &= \left[\frac{(\gamma+1)(\frac{5}{2}\gamma\bar{v} - 1)}{(\gamma-1)} \right]^{\frac{3}{2\gamma+1}} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(1 - \frac{5}{2}\bar{v} \right) \right]^{\frac{2}{\gamma-2}} \times \\ &\times \left[\frac{5}{2} \frac{(\gamma+1)(3\bar{v}\gamma - \bar{v} - 2)}{\gamma-7} \right]^{\frac{12\gamma^2-68\gamma-12}{(2\gamma+1)(3\gamma-1)(\gamma-2)}}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{r_2} &= \left[\frac{5}{4}(\gamma+1)\bar{v} \right]^{-\frac{2}{5}} + \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{5}{2}\gamma\bar{v} - 1 \right) \right]^{\frac{2}{2\gamma+1}} \times \\ &\times \left[\frac{5}{2} \frac{(\gamma+1)(3\bar{v}\gamma - \bar{v} - 2)}{\gamma-7} \right]^{\frac{12\gamma^2-68\gamma-12}{5(2\gamma+1)(3\gamma-1)}}, \\ \frac{r}{r_2} &= \left[\frac{5}{4}(\gamma+1)\bar{v} \right]^{-\frac{2}{5}} \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{5}{2}\gamma\bar{v} - 1 \right) \right]^{\frac{\gamma}{2\gamma+1}} \times \\ &\times \left[\frac{5}{2} \frac{(\gamma+1)(3\bar{v}\gamma - \bar{v} - 2)}{\gamma-7} \right]^{\frac{12\gamma^2-68\gamma-12}{15(2\gamma+1)(\gamma-2)}} \times \\ &\times \left[\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(1 - \frac{5}{2}\bar{v} \right) \right]^{\frac{3\gamma^2-16\gamma}{3(2\gamma+1)(2-\gamma)}}, \\ \frac{T}{T_2} &= \frac{p}{p_2} \frac{\rho_2}{\rho}. \end{aligned}$$

где $\bar{v} = \frac{vt}{x}$ — безразмерный параметр;

$$\frac{2}{5\gamma} \leq \bar{v} \leq \frac{4}{5(\gamma+1)}.$$

3. Автомодельное решение задачи Л.И. Седова о точечном сферическом взрыве в газокапельной смеси

Рассмотрим движение газа с примесями очень мелких жидких частиц, движущихся вместе с газом (газокапельная смесь). Плотность взвешенных частиц в газе бывает достаточно большой: в 1 см³ облаков или тумана находится от 100 до 1500 капель. В задаче, рассмотренной Л.И. Седовым [2], полагается, что наличие частиц в газе увеличивает

инерцию среды, которая остается однородной по плотности:

$$\rho' = \rho(1 + k), \quad (17)$$

где k — положительная постоянная.

Обозначив c как теплоемкость капель, а c_V и c_p как удельные теплоемкости газа при постоянных объеме и давлении соответственно, в [2] получено выражение для показателя адиабаты для газок капельной смеси γ' , представляющее собой отношение удельных теплоемкостей среды:

$$\gamma' = \frac{c'_p}{c'_V}, \quad c'_p = \frac{\rho c_p + k \rho c}{\rho(1+k)}, \quad c'_V = \frac{\rho c_V + k \rho c}{\rho(1+k)}. \quad (18)$$

Выпишем для газок капельной смеси систему уравнений газовой динамики в сферическом случае, включающую законы сохранения массы, импульса и энергии в дифференциальной форме (6) для $\nu = 3$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial \rho' v}{\partial x} + 2 \frac{\rho' v}{x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p'}{\rho' \gamma'} \right) + v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'}{\rho' \gamma'} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Получаем, что система уравнений для газок капельной смеси (19) аналогична системе (6) и решения (19) сводятся к (16) с переобозначениями (17), γ на γ' и

$$p' = p(1 + k).$$

Таким образом были найдены аналитические решения для динамических характеристик газок капельной смеси в задаче о точечном взрыве в случае сферической симметрии [2].

Для аналитического решения задачи Л.И. Седова о точечном сферическом взрыве в газе выбирались следующие начальные условия: энергия взрыва $E_1 = 100$ Дж, плотность воздуха $\rho_1 = 0.0125$ кг/м³ и показатель адиабаты $\gamma = 1.4$. Начальные условия для аналогичной задачи в случае газок капельной смеси: $E_1 = 100$ Дж, $\rho'_1 = 0.0125(1 + k)$ кг/м³ — плотность смеси, где $k = 10$, $\gamma' = 1.1$.

На рис. 1–4 представлены полученные решения в виде распределения скорости v , давления p , температуры T и плотности ρ в моменты времени 1, 25, 50, 75, 100 мкс. Сравнительный анализ показал, что в газок капельной смеси по сравнению с газовой средой амплитуда давления на фронте УВ и его скорость ослабевают в 2 раза (рис. 1), массовая

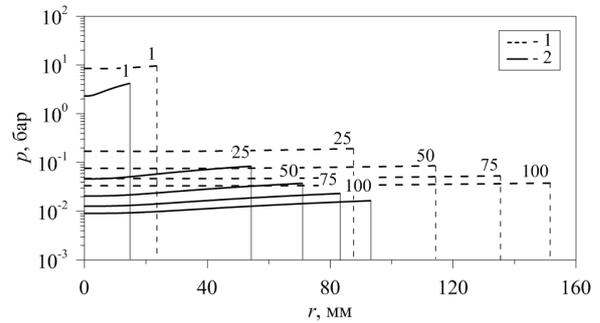


Рис. 1. Сравнение аналитических решений задачи Л.И. Седова по динамике давления p в указанные моменты времени (мкс): 1 — точечный взрыв в газе, 2 — точечный взрыв в газок капельной смеси

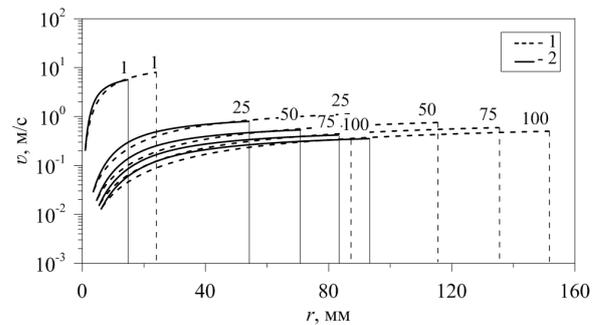


Рис. 2. Сравнение аналитических решений задачи Л.И. Седова по динамике массовой скорости v в указанные моменты времени (мкс): 1 — точечный взрыв в газе, 2 — точечный взрыв в газок капельной смеси

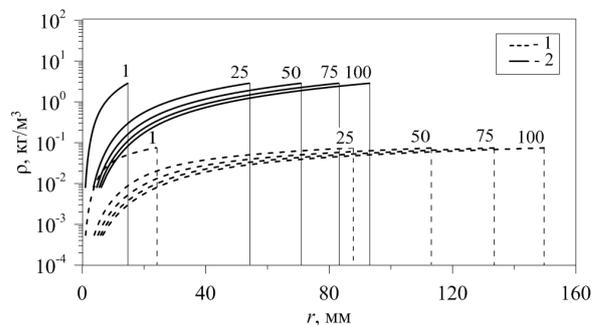


Рис. 3. Сравнение аналитических решений задачи Л.И. Седова по плотности ρ в указанные моменты времени (мкс): 1 — точечный взрыв в газе, 2 — точечный взрыв в газок капельной смеси

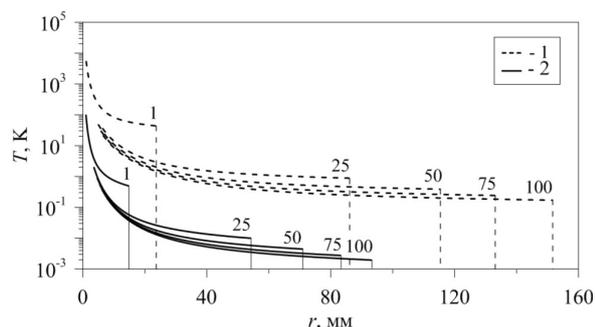


Рис. 4. Сравнение аналитических решений задачи Л.И. Седова по температуре T в указанные моменты времени (мкс): 1 — точечный взрыв в газе, 2 — точечный взрыв в газожидкостной смеси

скорость уменьшается в 1.3 раза (рис. 2), плотность в 3 раза выше (рис. 3) и температура уменьшается в 8 раз (рис. 4).

4. Заключение

В результате проведенных исследований показано, что использование аналитического решения позволяет оценить параметры ударных волн в газожидкостной смеси и получить оценки эффективности ее демпфирующих свойств по сравнению с газом для условий равного начального энергетического воздействия, что качественно не про-

тиворечит имеющимся экспериментальным данным [6]. Полученные аналитические решения могут быть применены в дальнейших исследованиях для апробации численных методов, разрабатываемых для решения широкого круга задач динамики газожидкостных потоков.

Список литературы

- [1] Андрущенко В.А., Головешкин В.А. Мурашкин И.В. Численное решение задачи о взрыве малого космического тела в неоднородной атмосфере в переменных лагранжа // *Механика жидкости и газа. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2011. № 4(3). С. 628–630. [eLIBRARY ID: 21121153](#)
- [2] Седов Л.И. *Методы подобия и размерности в механике* // М.: Наука. 1977. 440 с.
- [3] Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А. Сопоставление численного и автомодельного решений задачи Седова о точечном взрыве в газе // *Многофазные системы*. 2020. Т. 15, № 3–4. С. 212–216. [DOI: 10.21662/mfs2020.3.132](#)
- [4] Коробейников В.П., Марков В.В., Меньшов И.С. Задача о сильном взрыве в запыленном газе // *Тр. МИАН СССР*. 1984. Т. 163. С. 104–107. [MathNet: tm2318](#)
- [5] Болотнова Р.Х., Гайнуллина Э.Ф. Влияние теплообменных процессов на снижение интенсивности сферического взрыва в водной пене // *Прикладная математика и механика*. 2019. Т. 83, № 3. С. 468–477. [DOI: 10.1134/S0032823519030020](#)
- [6] Del Prete E., Chinnayya A., Domergue L., et al. Blast Wave Mitigation by Dry Aqueous Foams // *Shock Waves*. 2013. Vol. 23, No. 1. Pp. 39–53. [DOI: 10.1007/s00193-012-0400-0](#)



Study the dynamics of gas and gas-drop mixture in a point explosion based on Sedov's analytical solution

Bolotnova R.Kh. *, Korobchinskaya V.A. **, Faizullina E.A. *

*Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa

**Bashkir State University, Ufa

The dynamics of the behavior of a gas and a gas-drop mixture in a point explosion studied using the analytical solution of L.I. Sedov, constructed on the basis of a self-similar solution for the problem of a point explosion in a gas of spherical configuration. The analysis of the actual problems of theory of point explosion in connection with their use in studying the processes of explosive destruction of cosmic bodies in the atmosphere, where the obtained analytical solutions of Sedov were used as the initial conditions for further numerical implementation of the set problems. The works in which the problems of a point explosion in a dusty medium were considered in a self-similar formulation are noted. A self-similar solution of the Sedov problem of a point explosion in a gas and a gas-drop mixture is presented. A comparative analysis of the obtained solutions in gas and gas-drop mixture in the form of dynamic characteristics of the forming wave flows is made. It is shown that the use of an analytical solution makes it possible to estimate the parameters of shock waves in the studied medium and to obtain estimates of the efficiency of the energy-absorbing properties of a gas-drop mixture in comparison with a gas for conditions of equal initial energy action, which qualitatively does not contradict the existing solutions of other authors and the corresponding experimental data. The possibility of using the obtained analytical solutions in further research for approbation the applied numerical methods in solving problems of the dynamics of gas-liquid flows is noted.

Keywords: L.I. Sedov's problem, self-similar solution, point explosion, perfect gas, gas-drop mixture

References

- [1] Andryushchenko V. A., Goloveshkin V. A. Murashkin I. V. Numerical analysis of the problem of explosion of a small-size cosmic body in non-uniform atmosphere in lagrangian coordinates // Fluid and gas mechanics. *Mechanika gidkosti i gaza. Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo* [Bulletin of the Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod]. 2011. № 4 (3). Pp. 628–630 (in Russian). eLIBRARY ID: 21121153
- [2] Sedov L.I. *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics* // Boca Raton: CRC Press. 1993. P. 479. DOI: 10.1201/9780203739730
- [3] Bolotnova R.Kh., Korobchinskaya V.A. Comparison of the numerical and self-similar solutions of Sedov's problem on a point explosion in gas // *Multiphase Systems*. 2020. V. 15. No. 3–4. Pp. 212–216 (in Russian). DOI: 10.21662/mfs2020.3.132
- [4] Korobeinikov V.P., Markov V.V., Menshov I.S. The problem of a strong explosion in a dusty gas // *Proc. Steklov Inst. Math*. 1985. V. 163. Pp. 125–128. <https://zbmath.org/?q=an:0588.76136>
- [5] Bolotnova R.Kh., Gainullina E.F. Influence of Heat-exchange Processes on Decreasing an Intensity of a Spherical Explosion in Aqueous Foam // *Fluid Dynamics*. 2019. V. 54. Suppl. 7. Pp. 970–977. DOI: 10.1134/S0015462819070024
- [6] Del Prete E., Chinnayya A., Domergue L., et al. Blast Wave Mitigation by Dry Aqueous Foams // *Shock Waves*. 2013. Vol. 23, No. 1. Pp. 39–53. DOI: 10.1007/s00193-012-0400-0



Снижение систематической погрешности среднего расхода жидкости в осесимметричной компьютерной модели пьезоэлектрического микронасоса¹

Насибуллаев И.Ш.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Рассматриваются математическая и компьютерная модели осесимметричной связанной задачи взаимодействия жидкости и упругого тела для программы решения дифференциальных уравнений в частных производных методом конечных элементов FreeFem++. В данных моделях периодические колебания кольцевых пьезоэлектрических элементов, размещенных на эластичной трубке круглого сечения, приводят к радиальным деформациям трубки. При синхронном колебании системы пьезоэлементов средний расход жидкости равен нулю. Несимметричная схема колебаний (режим микронасоса) приводит к ненулевому среднему расходу жидкости. Рассматриваются два вида граничных условий в области контакта пьезопривода и трубки – Дирихле и Неймана. Компьютерная модель тестировалась для нестационарного течения жидкости, индуцированного приложенным вдоль слоя градиентом давления в трубке с круглым сечением. При синхронном колебании пьезоэлементов отличное от нуля среднее течение жидкости является систематической погрешностью. Данное значение сравнивалось с несимметричной схемой колебаний пьезоэлементов для определения вклада систематической погрешности в генерируемый насосом расход жидкости. По профилю скорости течения жидкости и результатам профилирования кода программы определены оптимальные параметры расчетных сеток для канала (плотная равномерная) и стенки трубки (неравномерная, согласованная с профилем скорости и перестраивающаяся на каждом временном шаге), которые снижают величину систематической погрешности. Основной способ снижения погрешности – увеличение плотности расчетной сетки – ведет к росту требуемых вычислительных ресурсов. Предлагается альтернативный способ снижения систематической погрешности за счет приложенного к каналу дополнительного перепада давления. В зависимости от вида граничных условий и количества пьезоэлементов данный способ позволяет снизить систематическую погрешность на 1–2 порядка без увеличения времени моделирования.

Ключевые слова: гидродинамика, гидросопротивление, пьезоэлемент, линейная упругость, микроканал, метод конечных элементов, микронасос

1. Введение

Развитие микрофлюидики активно продолжается последние три десятилетия [1]. Интерес к данной области связан с особенностями течения жидкости в микро- и наномасштабах, позволяющими разрабатывать устройства с новыми или даже не имеющими аналогов в традиционных макросистемах свойствами. Базовые характеристики микро-

устройств в большей мере зависят от принципа работы и конструкции микронасосов, а также жиклеров (гидросопротивлений). Так, малые площади проходных сечений требуют более тщательной изоляции жидкости от рабочих элементов и полного отсутствия фактора загрязнения. Поэтому наибольшее распространение получили перистальтические насосы, так как в них контакт с рабочей жидкостью имеет только гибкая трубка [2], а подвижные элементы конструкции, являющиеся источником загрязнения, от жидкости изолированы. При расчетах производительности насоса исполь-

¹Работа выполнена за счет средств государственного задания № 0246-2018-007.

зуются только эмпирические формулы, не учитывающие специфику применения и масштабный фактор, не анализируется величина пульсаций расхода жидкости, а значит требуется разработка более точных математических и компьютерных моделей.

С уменьшением масштаба системы числа Рейнольдса и Пекле, характеризующие динамические свойства системы, становятся малыми. Малое число Рейнольдса подразумевает ламинарный характер течения, соответствующий как большинству технических микроустройств, так и биологическим системам [3]. А малое число Пекле означает, что при теплопереносе вклад молекулярной теплопроводности преобладает над конвективным переносом тепла, следовательно, в микроустройствах (микротеплообменник, система охлаждения, микрозахват) необходимо учитывать оба механизма теплопереноса [4].

Интенсивный рост производства микроэлектромеханических систем и широкое внедрение микророботов и микротехнологических комплексов является весомым стимулом для разработки новых перспективных устройств, обеспечивающих бережное манипулирование микрокомпонентами. Автором настоящей работы разработан и исследуется капиллярный микрозахват [5–7] для манипуляций с плоскими микрообъектами и мембранами, обладающими достаточной площадью плоской стороны, но недостаточной для удержания пальцевыми захватами толщиной. Создание макета данного микрозахвата, построенного на базе миниатюрного варианта термоэлектрического модуля (элемента Пельтье), предполагает использование жидкостного охлаждения для отвода тепла от горячей поверхности элемента Пельтье. Отвод тепловой мощности от элемента Пельтье требует разработки конструкции комплектного миниатюрного насоса, а обеспечение режимов работы микрозахвата — соответствующей математической модели, учитывающей специфику микрофлюидики.

Существующие микронасосы применяются во многих областях [8]: биологические системы и медицина (система доставки лекарств), системы охлаждения (прокачка хладагента через теплообменник), исследование космоса (высоковакуумные насосы), перекачивание жидкости с высокой скоростью (центробежные насосы с высоким числом Рейнольдса), перекачивание специальных жидкостей (электродинамические и магнетогидродинамические насосы). Производимые модели микронасосов трудно адаптировать для системы охлаждения микрозахвата, поскольку требуется микронасос малого размера с гибкой системой управления расходом жидкости. Кроме того, разработанные для этих

микронасосов теоретические модели также основаны на эмпирических данных, что не позволяет провести полную геометрическую оптимизацию конструкции и определить оптимальные режимы работы. С другой стороны, генерация течения жидкости в упругом микроканале относится к области междисциплинарной физики, а, именно, к взаимодействию жидкости и упругого тела (fluid-structure interaction, FSI) [9]. Все это требует при разработке новых технических устройств построения новых математических моделей, связывающих гидродинамику, теорию упругости, процесс теплопереноса, параметрическую оптимизацию и теорию управления устройством.

Компьютерное моделирование течения жидкости в микроканалах, индуцированного внешним воздействием (перепадом давления, поступательным движением границы или деформацией канала), в последнее время активно развивается. Например, автором настоящей работы были разработаны компьютерные модели, которые могут быть использованы в качестве элемента вычислительного стенда для одного элемента технического устройства. Модель поршня для осциллирующего перепада давления, учитывающая пять параметров (амплитуда и частота перепада давления, трение поршня, жесткость пружины, отношение силы трения покоя и трения скольжения), была построена в работе [10] методами факторного вычислительного эксперимента 2-го порядка.

С развитием математических и компьютерных моделей появились пакеты численного моделирования, использующие метод конечных элементов (КЭ), которые позволяют проводить моделирование устройств с практически произвольной геометрией [11]. В работе [12] была построена осесимметричная компьютерная модель FSI для взаимодействия ньютоновской жидкости с гиперэластичным несжимаемым телом и с использованием моделирования методом КЭ проведен анализ устойчивости дифференциальных уравнений, записанных в вариационной форме в пакете численного моделирования FreeFem++ [13]. Была разработана модель микронасоса, создающего течение жидкости (с расходом до 50 мкл/с) в плоском канале с погруженным в него пьезоэлементом с поперечным изгибом [14].

В работе [15] представлена методика построения элемента вычислительного стенда в виде аналитической формулы на основе трехмерного моделирования течения жидкости через эластичный микроканал, деформируемый пьезоэлементом по гармоническому закону, с вариантами использования полученных результатов в практических при-

ложениях. Построена компьютерная модель управления режимом течения жидкости, индуцированного приложенным вдоль канала перепадом давления с учетом величины перепада давления и частоты сжатия трубки пьезоэлементом. Модель является частью жидкостной системы охлаждения микрозахвата.

В работе [16] предложена осесимметричная компьютерная модель пьезоэлектрического микронасоса, состоящего из эластичной трубки и системы круговых пьезоэлектрических элементов, а также проведен анализ режимов его работы. На границе пьезоэлементов с трубкой задаются граничные условия Дирихле. При несимметричной схеме колебаний пьезоэлементов создается гидросопротивление [17–19], что позволяет генерировать ненулевой средний поток жидкости. Получены зависимости среднего расхода жидкости от времени, частоты колебаний пьезоэлементов и внутреннего диаметра трубки. В [20] на границе пьезоэлементов с трубкой задаются граничные условия Дирихле или Неймана, проводится параметрический анализ работы микронасоса и определяются режимы, при которых отсутствует обратное распространение тепла от микрозахвата к микронасосу. При малых частотах колебаний пьезоэлементов (меньше 1 кГц) модели имели высокую погрешность, что ограничивало область применения более высокими частотами.

В настоящей работе рассматривается расширенная осесимметричная модель пьезоэлектрического микронасоса [16, 20], учитывающая как граничные условия Дирихле, так и Неймана, для анализа источников и величин погрешностей с целью снижения систематической погрешности среднего расхода жидкости.

2. Постановка задачи и основные уравнения

В работе рассматривается осесимметричное течение жидкости через упругую микротрубку с внутренним R_1 и внешним R_2 радиусами и длиной L , центральная часть которой расположена внутри системы кольцевых пьезоэлементов длиной ℓ . На рис. 1 представлена геометрия задачи и введены следующие обозначения: Γ_1 и Γ_2 — входное и выходное отверстия микроканала соответственно; Γ_3 — ось симметрии; Γ_4 , Γ_5 и Γ_6 — внутренняя, боковая и внешняя стенки микротрубки соответственно; Γ_i^p — контакт i -го пьезоэлемента с внешней стенкой микротрубки. Используется осесимметричная цилиндрическая система координат с началом отсчета O , расположенным в геомет-

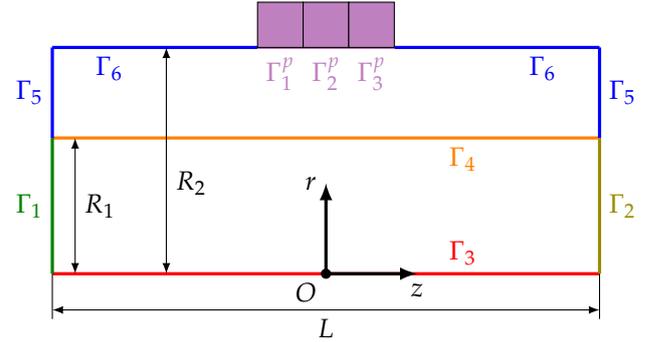


Рис. 1. Геометрия пьезонасоса

рическом центре трубки. Радиальная и осевая координаты обозначены через r и z соответственно.

Течение жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса и уравнением несжимаемости в осесимметричной геометрии [21]:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) &= \\ &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{u_r}{r^2} \right], \\ \rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= \\ &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right], \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ — плотность жидкости; $\mathbf{u} = (u_r, u_z)$ — вектор скорости жидкости состоящий из радиальной и осевой компонент; t — время; p — давление; μ — коэффициент динамической вязкости жидкости.

Деформации упругого микроканала описываются уравнениями Навье–Коши [22]:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\eta) \left(\frac{\partial^2 s_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_r}{\partial r} - \frac{s_r}{r^2} \right) + \\ + (\lambda + \eta) \frac{\partial^2 s_z}{\partial r \partial z} + \eta \frac{\partial^2 s_r}{\partial z^2} &= 0, \\ (\lambda + 2\eta) \frac{\partial^2 s_z}{\partial z^2} + (\lambda + \eta) \left(\frac{\partial^2 s_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_r}{\partial z} \right) + \\ + \eta \left(\frac{\partial^2 s_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_z}{\partial r} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{s} = (s_r, s_z)$ — вектор деформации, состоящий из радиальной и осевой компонент; λ и η — коэффициенты Ламе, связанные с модулем упругости Юн-

га E и коэффициентом Пуассона ν соотношениями:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \eta = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Отметим, что стационарные уравнения Навье–Коши (2) применимы для частоты колебаний пьезоэлементов до $f_e = 100$ кГц, поскольку время упругой релаксации составляет $\tau_e = R_1 \sqrt{\rho_e / E} \approx 10^{-7}$ с, где ρ_e — плотность материала трубки. В реальных кольцевых пьезоэлементах максимальная частота колебаний ограничена резонансной частотой f_r , которая обычно меньше, чем f_e (для пьезоэлементов, выполненных на основе цирконат-титанат свинца f_r имеет порядок 20...30 кГц [23], 25 кГц [24], 50 кГц [25], 40...90 кГц [26]). Таким образом, предельная допустимая частота, для которой применима модель, определяется как $\min(f_e, f_r)$. Для большей частоты необходимо рассматривать динамические уравнения. Относительные деформации составляют до 0.5 %, поэтому погрешность решения линейных уравнений упругости мала.

Уравнения (1) и (2) решались численно методом КЭ в пакете численного моделирования FreeFem++ [13, 27], где интегрирование проводится в декартовых координатах по элементу площади $dS = dx dy$. Следовательно, необходимо провести преобразование данного элемента площади в цилиндрические координаты (с элементом площади $d\Omega = dz dr$) по правилу $dS = J d\Omega$, где $J = r$ — якобиан преобразования декартовых координат в цилиндрические.

Проведенный численный анализ показал, что при использовании схемы Эйлера осесимметричная вариационная форма уравнений Навье–Стокса быстро теряет устойчивость. Устойчивость схемы обеспечивается с помощью метода характеристик Галеркина для аппроксимации полной производной по времени [12]. Для этого левые части первых двух уравнений (1) преобразовывались по следующей формуле:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n \circ \mathbf{X}^n}{\tau},$$

где индексы n и $n + 1$ относятся к предыдущему и текущему моментам времени, τ — шаг по времени и введено обозначение $\mathbf{u}^n \circ \mathbf{X}^n(x) = \mathbf{u}^n(\mathbf{x} - \mathbf{u}^n(\mathbf{x})\tau)$.

Умножая уравнения гидродинамики (1) на якобиан r получим осесимметричную

вариационную форму:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\rho \frac{u_r^{n+1} - u_r^n \circ \mathbf{X}^n}{\tau} w_r + \frac{\partial p^{n+1}}{\partial r} w_r + \right. \\ & \quad \left. + \mu \left(\frac{\partial u_r^{n+1}}{\partial r} \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{n+1}}{\partial z} \frac{\partial w_r}{\partial z} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{u_r^{n+1}}{r^2} w_r \right) \right] r d\Omega = 0, \\ & \int_{\Omega} \left[\rho \frac{u_z^{n+1} - u_z^n \circ \mathbf{X}^n}{\tau} w_z + \frac{\partial p^{n+1}}{\partial z} w_z + \right. \\ & \quad \left. + \mu \left(\frac{\partial u_z^{n+1}}{\partial r} \frac{\partial w_z}{\partial r} + \frac{\partial u_z^{n+1}}{\partial z} \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \right] r d\Omega = 0, \\ & \int_{\Omega} \left[u_r^{n+1} \frac{\partial w_p}{\partial r} r + u_z^{n+1} \frac{\partial w_p}{\partial z} r - u_r^{n+1} w_p - \right. \\ & \quad \left. - \varepsilon_p p^{n+1} w_p r \right] d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где w_r, w_z и w_p — пробные функции; малая величина $\varepsilon_p = 10^{-10}$ представляет собой искусственную сжимаемость и введена для повышения устойчивости расчетной схемы в пакете FreeFem++.

Аналогично, для уравнений упругости (2) с помощью замены

$$r \frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} + \frac{\partial u_i}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_i}{\partial r} \right)$$

получим:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[(\lambda + 2\eta) \left(\frac{\partial s_r}{\partial r} \frac{\partial v_r}{\partial r} r + \frac{s_r}{r} v_r \right) + \right. \\ & \quad \left. + (\lambda + \eta) \frac{\partial s_z}{\partial r} \frac{\partial v_z}{\partial r} r + \eta \frac{\partial s_r}{\partial z} \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] d\Omega = 0, \\ & \int_{\Omega} \left[(\lambda + 2\eta) \frac{\partial s_z}{\partial z} \frac{\partial v_z}{\partial z} r + \right. \\ & \quad \left. + (\lambda + \eta) \left(\frac{\partial s_r}{\partial r} \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial s_r}{\partial z} v_z \right) + \right. \\ & \quad \left. + \eta \frac{\partial s_z}{\partial r} \frac{\partial v_z}{\partial r} r \right] d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где v_r и v_z — пробные функции

Начальные условия соответствуют отсутствию деформаций на внешней стенке $\mathbf{s} = 0$ и покоящейся жидкости $\mathbf{u} = 0$.

Граничные условия на скорость жидкости имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \Gamma_1 : u_r = 0, p = -\Delta p/2; \\ \Gamma_2 : u_r = 0, p = \Delta p/2; \\ \Gamma_3 : u_r = 0; \\ \Gamma_4 : u_r = 0, u_z = 0, \end{cases}$$

где Δp — разность давлений на входном и выходном отверстиях трубки.

Микротрубка закреплена на концах, то есть

$$\Gamma_5 : s_r = 0, s_z = 0. \quad (5)$$

Граничные условия Неймана для деформаций определяются из условия равновесия $\sigma_{rr} = -p_i^p(t)$, где компонента тензора напряжений σ_{rr} уравновешивается давлением $-p_i^p(t)$, оказываемым на трубку i -м пьезоэлементом на границе Γ_i^p :

$$\int_{\Omega} \left[(\lambda + 2\eta) \frac{\partial s_r}{\partial r} v_r + \lambda \frac{s_r}{r} + \lambda \frac{\partial s_z}{\partial z} - p_i(t)^p \right] r \, d\Omega = 0. \quad (6)$$

Поскольку концы микротрубки закреплены (5), то в условии (6) необходимо запретить осевые перемещения $s_z = 0$, следовательно, граничные условия Неймана примут следующий вид:

$$\int_{\Omega} \left[(\lambda + 2\eta) \frac{\partial s_r}{\partial r} v_r + \lambda \frac{s_r}{r} - p_i(t)^p \right] r \, d\Omega = 0. \quad (7)$$

При использовании граничных условий Дирихле перемещения пьезоэлементов задаются на величину $s_{r,i}^p(t)$, то есть данные условия имеют вид:

$$\Gamma_i^p : s_r = s_{r,i}^p(t) \quad (i = 1, \dots, N). \quad (8)$$

Для устойчивости численной схемы вводится дополнительное условие на Γ_3 : $\mathbf{s} = 0$.

Отметим физический смысл граничных условий Неймана и Дирихле. Граничные условия Неймана означают «мягкий» пьезоэлемент, форма которого при сжатии меняется (но не меняется область контакта), а граничные условия Дирихле — «жесткий» пьезоэлемент, форма которого при сжатии не меняется.

Зависимость давления пьезоэлемента на внешнюю стенку микроканала определяется в виде $p^p(t) = \max(p^p) f_p(t)$, а перемещения — в виде $s_{r,i}^p(t) = s_r^p f_p(t)$, где форма сигнала $f_p(t)$ является нормированной в области $[0, 1]$ гармонической функцией с частотой колебаний f :

$$f_p(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos(2\pi f t) \right).$$

3. Результаты

Численное моделирование проводилось для упругой трубки длиной $L = 10$ мм с круглым сечением, внутренним радиусом $R_1 = 1$ мм и внешним радиусом $R_2 = 1.75$ мм. Кольцевые пьезоэлементы длиной $\ell = 1$ мм располагались симметрично относительно центра трубки. Рассматривались конфигурации с одним и тремя пьезоэлементами ($N_p = 1, 3$). В качестве материала трубки выбрана силиконовая резина с модулем Юнга $E = 5$ МПа и коэффициентом Пуассона $\sigma = 0.49$. В качестве рабочей жидкости используется вода при температуре $T_0 = 20^\circ\text{C}$ с объемной плотностью $\rho = 998$ кг/м³ и динамической вязкостью $\mu = 1.002$ мПа·с.

Течение жидкости в канале можно создать двумя способами: с помощью приложенного к каналу перепада давления Δp и путем периодических синхронных сжатий N_p пьезоэлементов.

Моделирование проводится на двух двумерных согласованных между собой расчетных сетках в плоскости Ozr . Сначала решаются уравнения упругости на сетке, определяющей стенку трубки. По полученному полю деформации на каждом шаге по времени расчетная сетка для канала перестраивается, поскольку внутренняя поверхность трубки, деформированная пьезоэлементами, определяет внешнюю границу канала. Затем на расчетной сетке канала решаются уравнения гидродинамики.

Для предотвращения появления ошибки, связанной с перемещением узлов одного КЭ внутри другого КЭ (появления отрицательных объемов $V_e \leq 0$), при перестроении расчетной сетки для канала был разработан алгоритм «безопасной» перестройки сетки, в котором в случае возникновения отрицательных объемов меняется коэффициент трансформации, а в противном случае происходит трансформация; проверка проводится до полной трансформации расчетной сетки [20]. Для реализации алгоритма использовались следующие средства FreeFem++: проверка возможности появления отрицательных объемов *checkmovemesh*, трансформация сетки *movemesh* и адаптация сетки *adaptmesh*.

В качестве параметра расчета задавалась одинаковая для всех пьезоэлементов амплитуда радиального сжатия $s_{r,i}^p = s_p = 0.5$ мкм, которая непосредственно использовалась в граничных условиях Дирихле (8). Для того, чтобы в граничных условиях Неймана (7) обеспечить такую же амплитуду [28], проводился предварительный расчет с одновременным сжатием всех пьезоэлементов с амплитудой давления p_0 и определялась величина сжатия s_0 . Поскольку уравнения упругости линейные, то величина давления p_p , при которой пье-

зоэлемент будет сжиматься на s_p , определяется как $p_p = p_0 \cdot s_p / s_0$. В результате получена расчетная величина $p_p = 395$ кПа. Отношение коэффициента передачи деформации от пьезоэлемента к внутренней стенке трубки k_s составило 0.81 для граничных условий Неймана и 1 для граничных условий Дирихле. Максимальное значение блокирующей силы (сила реакции, возникающая в области контакта пьезоэлемента и трубки) не превышало значения 4.5 Н, что укладывается в технические характеристики кольцевых пьезоэлектрических приводов (10–15 Н [26]).

Особенностью рассматриваемой задачи является то, что деформации микроканала малы (0.5 % от радиуса) и при высоких частотах колебаний скорости течения жидкости высоки (несколько мм/с). Следовательно, возможны большие погрешности численного расчета, зависящие от шага по времени τ и размера элементов расчетной сетки ℓ_m . Обозначим через m количество граничных элементов расчетной сетки трубки, приходящихся на один пьезоэлемент; n — число шагов по времени за каждый полупериод колебания пьезоэлемента; N_p — количество пьезоэлементов. Расчетные сетки для микроканала и трубки согласованы: граничные элементы на линии контакта сеток совпадают.

3.1. Тестирование компьютерной модели

Исследуем симметричный случай для $N_p = \{1, 3\}$ синхронно работающих пьезоэлементов на частоте $f = 1$ кГц с плотностью расчетной сетки $n = \{12, 18, 24\}$ и $m = \{20, 40\}$ временными интервалами, приходящимися на один период сжатия–растяжения пьезоэлементов $T_f = 1/f$. На рис. 2 показаны профили скорости для $N_p = 1$, $n = 12$, $m = 40$ в моменты времени $t = T_f/4$ и $t = 3T_f/4$, когда модуль скорости $|u_z|$ максимален, а также $t = 0$ и $t = T_f/2$, когда меняется направление сжатия пьезоэлемента.

Видно, что вблизи границы трубки на интервале $r = [0.8R_1, R_1]$ происходит основное изменение осевой скорости u_z , следовательно, для повышения точности расчетов нужно использовать неравномерную расчетную сетку с большей плотностью элементов вблизи внутренней границы трубки. Для уменьшения времени расчета сетку вблизи оси трубки, где профиль скорости практически плоский, можно сделать более разреженной. Все расчеты проводились на модифицированной сетке, в которой размер элементов на внутренней поверхности равен $\ell_m = L / (10 \cdot n)$, а на оси — $\ell_m = L / (5 \cdot n)$. На рис. 3 показаны расчетные сетки для $n = \{12, 18, 24\}$, а в таблице 1 приведены соответствующие им числа КЭ. Расчеты проводились

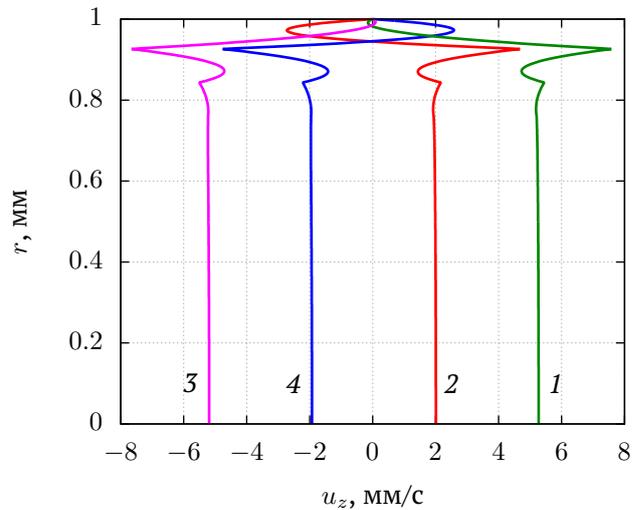


Рис. 2. Профили скорости u_z на выходном отверстии Γ_2 в пределах периода колебания пьезоэлемента в моменты времени: $t = 0$ (1), $t = T_f/4$ (2), $t = T_f/2$ (3), $t = 3T_f/4$ (4); $m = 40$; $N_p = 1$; $f = 1$ кГц

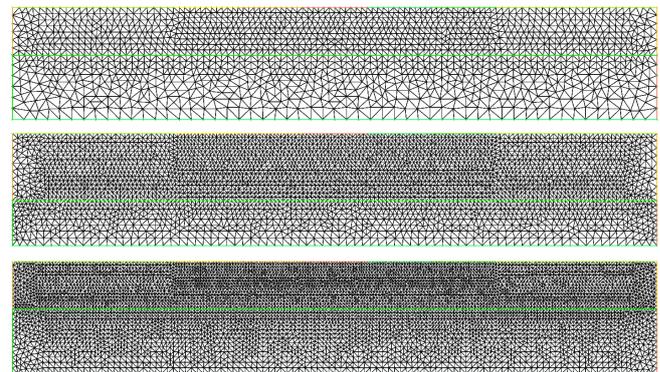


Рис. 3. Расчетные сетки для $m = 12$ (вверху), $m = 18$ (в середине) $m = 24$ (внизу) для трубки и канала. Нижняя грань сетки — ось симметрии

Таблица 1. Количество используемых КЭ в расчетной сетке для трубки N_e и канала N_f и время расчета уравнений Навье–Коши T_e и Навье–Стокса T_f , время перестроения расчетной сетки T_r и общее время расчета T_t для $N_p = 1$ в зависимости от n и m . Время указано в минутах

n	m	N_e	N_f	T_e	T_r	T_f	T_t
12	20	1836	1312	7.5	16	72	112
12	40	1836	1312	15	31	141	221
18	20	3980	2631	17	31	151	230
24	20	7262	5218	33	59	363	514

на 4-х ядерном процессоре Intel Core i7-3770 в ОС Windows 7 в программе FreeFem++ версии 3.61.

Дополнительно было проведено профилирование кода программы для определения количества процессорного времени необходимого для решения уравнений Навье–Коши (задача линейной упругости) T_e , Навье–Стокса (гидродинамическая задача) T_f и динамического перестроения расчетной сетки T_r (таблица 1). С увеличением количества конечных элементов или шагов по времени m требуемое для моделирования расчетное время возрастает пропорционально. Гидродинамическая задача использует 71 % от общего времени, перестроение расчетной сетки — 11 %, а задача линейной упругости — 6 %. Таким образом, без существенного увеличения времени моделирования для более точной передачи профиля деформаций, создаваемых пьезоэлементами на внутреннюю стенку трубки, распределение конечных элементов для стенки трубки выбиралось равномерным с большей плотностью в области контакта трубки и пьезоэлементов. Поскольку основное время занимает расчет гидродинамической задачи, то используемая в моделировании неравномерная расчетная сетка для канала не только повышает точность расчета, но и существенно увеличивает его скорость.

Проведем проверку компьютерной модели по имеющей аналитическое решение тестовой задаче для пуазейлевского течения в трубке круглого сечения.

В симметричной задаче (синхронные колебания пьезоэлементов) при отсутствии приложенного вдоль слоя градиента давления $\nabla p = \Delta p/L$ средний расход жидкости за период равен нулю. Для определения систематической погрешности (отличный от нуля средний расход жидкости) были проведены расчеты для различных параметров расчетной сетки на промежутке времени, который соответствует характерному времени релаксации скорости [28]:

$$\tau_u = \rho R_1^2 / \mu, \quad (9)$$

в рассматриваемой геометрии $\tau_u = 1$ с. Отметим, что τ_u может меняться в широком диапазоне, поскольку τ_u зависит от вязкости, а вязкость зависит от температуры [29].

Для численного моделирования введем средний расход жидкости по следующей формуле

$$Q_a = (V^{n+1} - V^n) / \tau, \quad (10)$$

где V^n и V^{n+1} — суммарный объем жидкости, прошедший через выходное отверстие в предыдущий и текущий периоды колебаний соответственно.

Для проверки численной схемы уравнений гидродинамики был проведен численный расчет пуазейлевского течения в трубке круглого сечения и приведено сравнение с аналитической формулой [21]

$$Q_p = \frac{\pi \Delta p R_1^4}{8 \mu L}. \quad (11)$$

Дополнительно проведено сравнение аналитической зависимости расхода жидкости Q_a от времени с численным расчетом. Амплитуда скорости от времени в первом приближении равна [30]

$$u(0, t) = \frac{\Delta p}{4 \mu L} R_1^2 g(t),$$

где функция от времени $g(t)$ определяется по следующей формуле:

$$g(t) = 1 - \frac{(1 - a) \exp(-\lambda_1^2 t / \tau_u)}{8 \lambda_1^3 J_1(\lambda_1)};$$

$\lambda_1 \approx 2.4$ — первый корень функции Бесселя нулевого рода $J_0(\lambda_1) = 0$; $J_1(\lambda_1) \approx 0.52$ — функция Бесселя первого рода; $a = 0.113$ — подгоночный параметр для компенсации отброшенных членов второго и более высоких порядков, подбираемый из физического смысла: отсутствие течения в начальный момент времени $u(0, 0) = 0$ ($g(0) = 0$, тогда $Q_a(0) = 0$) и выход на постоянное течение $u(0, t) = \text{const}$ через промежуток времени $t \gg \tau_u$ ($g(t) \rightarrow 1$, тогда $Q_a(t) \rightarrow Q_p$). Расход жидкости связан с амплитудой скорости $u(0, t)$ соотношением $Q_p(t) = (\pi/2) R_1^2 u(0, t)$:

$$Q_a(t) \approx Q_p g(t). \quad (12)$$

На рис. 4 показана зависимость среднего расхода жидкости Q_p , вычисленная по формуле (11), расход жидкости, вычисленный по формуле (12), и полученные численно зависимости $Q_a(t)$ для перепада давления $\Delta p = 0.5$ Па в отсутствие колебаний пьезоэлемента и при колебании с частотой $f = 1$ кГц. Видно, что за характерное время релаксации скорости τ_u (9) значения Q_a приближаются к аналитическому значению Q_p , причем аналитическая зависимость $Q_a(t)$ и численные зависимости $Q_a(t)$ с колебанием и без колебаний одного пьезоэлемента практически совпадают.

Таким образом осесимметричная математическая модель и ее компьютерная реализация являются корректными.

3.2. Анализ погрешностей и пределы применимости модели

Определим источники погрешностей и их величину. Для этого проведем моделирование при нулевом вдоль слоя перепаде давления.

Таблица 2. Зависимость систематической погрешности от размерности расчетной сетки n и шагов по времени m , количества пьезоэлементов N_p и граничных условий Неймана (индекс $i = N$) и Дирихле (индекс $i = D$): ε_i – систематические погрешности Q_a ; $\varepsilon_{i,Q}$ – относительные погрешности расхода жидкости на входе и выходе, вычисленные по формуле (13); Δp_i – компенсирующий перепад давления; * – результаты расчетов с компенсацией систематической погрешности по формуле (14). Параметры: $f = 1$ кГц; $t = 1$ с

n	m	N_p	ε_N , нл	$\varepsilon_{N,Q}$, %	ε_D , нл	$\varepsilon_{D,Q}$, %	Δp_N , мПа	ε_N^* , пл	$\varepsilon_N/\varepsilon_N^*$	Δp_D , мПа	ε_D^* , пл	$\varepsilon_D/\varepsilon_D^*$
12	20	1	9.55	0.201	-59.7	2.04	-0.244	85.5	112	1.5227	-275	217
12	40	1	9.31	0.344	-60.0	2.27	-0.238	79.7	117	1.5297	-255	235
18	20	1	7.84	0.098	-45.0	1.34	-0.200	40.9	192	1.1468	-156	288
24	20	1	-2.50	0.039	-36.3	1.02	0.064	-15.4	162	0.9275	-99	367
12	20	3	49.3	0.175	71.3	0.165	-1.259	1.477	33	-1.819	797	89
12	40	3	49.6	0.237	71.0	0.261	-1.266	1.298	38	-1.812	743	96
18	20	3	25.3	0.119	57.2	0.130	-0.646	0.429	59	-1.460	5.26	10872
24	20	3	4.39	0.007	6.29	0.007	-1.121	0.041	108	-0.1606	-28.99	217

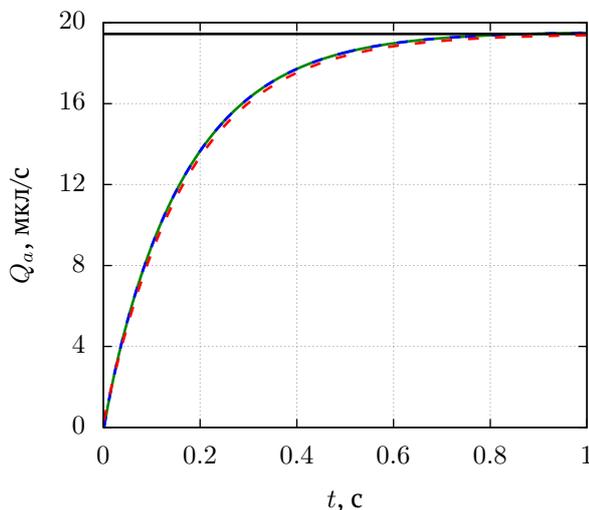


Рис. 4. Зависимость среднего расхода жидкости для пуазейлевского течения от времени для аналитической формулы (11) (черная линия), формулы (12) (красная линия), численного моделирования (3) и (4) в отсутствие колебания пьезоэлемента (зеленая линия) и при колебании одного пьезоэлемента (синяя линия) с частотой $f = 1$ кГц; $\Delta p = 0.5$ Па

Систематическая погрешность равна установившемуся среднему расходу жидкости $\varepsilon_i = Q_a$, где $i = N, D$. Здесь индекс D соответствует граничным условиям Дирихле, индекс N – граничным условиям Неймана, а относительная погрешность для расхода жидкости вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{i,Q} = |1 + Q_i/Q_o| \cdot 100\%, \quad i = \{N, D\}, \quad (13)$$

где Q_i и Q_o – расходы жидкости на входном и выходном отверстиях соответственно. Отметим, что расход жидкости положителен при течении

жидкости в положительном направлении Oz и отрицателен для потока в обратном направлении, например, во время сжатия трубки $Q_i < 0$ и $Q_o > 0$. Результаты моделирования представлены в таблице 2.

Поскольку трубка и жидкость в ней являются несжимаемыми, то при деформации трубки ее объем должен соответствовать объему жидкости, протекающей в канале. Вычислим относительную погрешность объемов по формуле

$$\varepsilon_V = \frac{|(Q_i^{i+1} + Q_o^{i+1})\tau - (V_e^i - V_e^{i+1})|}{V_e^0} \cdot 100\%,$$

где верхние индексы i и $i + 1$ соответствуют предыдущему и текущему моментам времени; V_e^i и V_e^0 – объемы в деформированной и недеформированной трубках, вычисляемые по формулам

$$V_e^i = \int_{\Omega} 2\pi r dr dz, \quad V_e^0 = \pi(R_2^2 - R_1^2)L.$$

Здесь область интегрирования Ω ограничена по оси Oz интервалом $[0, L]$, а по оси Or лежит между кривыми $R_1 + s_r(z, R_1)$ и $R_2 + s_r(z, R_2)$ с радиальной компонентой деформации $s_r < 0$ (деформация направлена в отрицательном направлении по оси Or). В проведенных расчетах относительная погрешность ε_V не превышала $4.3 \cdot 10^{-12}\%$ для граничных условий Дирихле и $6.3 \cdot 10^{-12}\%$ для граничных условий Неймана.

Отметим, что время установления ненулевого среднего расхода жидкости и пуазейлевского течения близки к характерному времени τ_u , что предполагает возможность снижения систематической погрешности заданием перепада давления

в виде

$$\Delta p_i = -\frac{8\mu\varepsilon_i L}{\pi R_1^4}. \quad (14)$$

В зависимости от параметров моделирования (n , m , N_p) систематическая ошибка составляет от 2.5 до 72 нл/с (см. таблицу 2). С увеличением количества интервалов времени в одном периоде продолжительность моделирования растет пропорционально, а систематическая погрешность снижается незначительно (увеличение m в 2 раза с 20 до 40 снижает погрешность не более, чем на 7.3 %). Увеличение количества КЭ приводит к существенному снижению погрешности (например, при четырехкратном увеличении количества КЭ для $N_p = 1$ величина ε_N уменьшается в 3.8 раз и ε_D — 1.6 раз, а для $N_p = 3$: ε_N — 11.2 раз и ε_D — 11.3 раз). Время расчета при этом увеличивается пропорционально количеству КЭ расчетной сетки канала (например, для $n = 12$ время расчета $T_t = 112$ минут, а для $n = 24$ — 8.5 часов).

В работе [16] показано, что несимметричная схема колебаний системы из $N_p > 2$ пьезоэлементов при отсутствии перепада давления вдоль канала за время $t > \tau_u$ создает постоянное среднее за период колебаний течение жидкости, т.е. устройство прокачивает жидкость как микронасос. Проведем сравнение результатов вычислительных экспериментов для симметричной и несимметричной схемы колебаний системы из $N_p = 3$ пьезоэлементов на расчетной сетке с $n = 12$. Для граничных условий Неймана средний расход жидкости достигает значения $Q_{a,N} = 233$ нл/с. Из таблицы 2 видно, что вклад систематической погрешности в $Q_{a,N}$ составляет 21 %. Для граничных условий Дирихле средний расход жидкости $Q_{a,D} = 404$ нл/с, из которого 17.6 % приходится на систематическую погрешность. Для повышения точности моделирования можно использовать более плотную расчетную сетку за счет увеличения вычислительных и временных ресурсов.

Можно предложить способ компенсации систематической погрешности без увеличения процессорного времени. Для этого зададим перепад давления Δp согласно формуле (14). Повторный вычислительный эксперимент с заданным перепадом давления показал значительное снижение систематической погрешности. В зависимости от n для $N_p = 1$ величина ε_N снижается в $112 \div 190$ раз и ε_D — в $217 \div 367$ раз, а для $N_p = 3$: ε_N — $33 \div 108$ раз и ε_D — $89 \div 217$ раз.

Дальнейшее снижение погрешности практически недостижимо, поскольку согласно (10) изменение объема за шаг по времени имеет порядок

$\Delta V_m = V^{n+1} - V^n = 4 \cdot 10^{-17} \text{ м}^3$, что находится в области ошибок округления. Эта величина изменения объема ΔV_m определяет пределы применимости модели. Например, если при снижении частоты изменение объема будет порядка ΔV_m , то результаты моделирования будут некорректны, а если $\Delta V = k\Delta V_m$, то ошибки округления в Q_a будут составлять $\approx 100/k$ %. Расчеты показывают, что при частоте колебаний пьезоэлементов $f \leq 500$ Гц систематические погрешности будут $\varepsilon_i \geq 10$ % для $N_p = 1$ и $\varepsilon_i \geq 30$ % для $N_p = 3$.

Отметим, что при моделировании системы пьезоэлементов систематическая погрешность ε_i определяется как разность экспериментального Q_e и численного Q_n значений установившегося среднего расхода жидкости, то есть $\varepsilon_i = Q_e - Q_n$. Компенсировать систематическую погрешность можно дополнительным Пуазейлевским течением с перепадом давления Δp , определяемым приближенной формулой (14).

4. Заключение

В работе представлена математическая и компьютерная модели осесимметричного пьезонасоса с граничными условиями Дирихле или Неймана в области контакта пьезоэлементов с поверхностью трубки. Тестирование компьютерной модели проведено сравнением результатов моделирования с аналитическим решением для течения Пуазейля в трубке круглого сечения. Проведенный анализ профиля скорости и профилирование кода программы позволили определить параметры расчетных сеток: для стенки трубки была выбрана равномерная сетка с более высокой плотностью конечных элементов в области контакта пьезоэлементов с трубкой; для канала выбрана адаптивная динамически перестраиваемая сетка. Проведена серия вычислительных экспериментов для различного количества пьезоэлементов и набора значений для плотности расчетной сетки и определена величина систематической погрешности моделирования. Предложен способ компенсации систематической погрешности с помощью дополнительного приложенного к каналу перепада давления. Данный способ позволил снизить погрешность на два порядка. Представленный в работе подход к снижению систематической погрешности позволит повысить точность моделирования режимов работы пьезоэлектрического микронасоса.

Список литературы

- [1] Convery N., Gadegaard N. 30 years of microfluidics // Micro and Nano Engineering. 2019. V. 2. Pp. 76–91.
DOI: 10.1016/j.mne.2019.01.003

- [2] Berg J.M., Dallas T. Peristaltic Pumps. Encyclopedia of Microfluidics and Nanofluidics (eds. by Li D.). New York: Springer, 2015. Pp. 2693–2701.
DOI: [10.1007/978-0-387-48998-8_1198](https://doi.org/10.1007/978-0-387-48998-8_1198)
- [3] Microfluidics Based Microsystems: Fundamentals and Applications. Eds. by Kakaç S., Kosoy B., Li D., Pramuanjaroenkij A. Dordrecht: NATO Science for Peace and Security Series A: Chemistry and Biology. Springer. 2010. 618 p.
DOI: [10.1007/978-90-481-9029-4](https://doi.org/10.1007/978-90-481-9029-4)
- [4] Cotta R.M., Knupp D.C., Naveira-Cotta C.P. Analytical Heat and Fluid Flow in Microchannels and Microsystems. Cham: Springer. 2016. 164 p.
DOI: [10.1007/978-3-319-23312-3](https://doi.org/10.1007/978-3-319-23312-3)
- [5] Даринцев О.В., Мигранов А.Б. Капиллярный микрозахват с обратной связью. Патент на изобретение № 2261795. Опубл. 10.10.2005. Бюл. № 28.
https://www1.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=RUPAT&DocNumber=2261795&TypeFile=html
- [6] Darintsev O. Microgrippers: Principle of Operation, Construction, and Control Method // In: Ronzhin A., Shishlakov V. (eds) // Proceedings of 15th International Conference on Electromechanics and Robotics "Zavalishin's Readings". Smart Innovation, Systems and Technologies. 2021. V. 187. Pp. 25–37. Springer, Singapore.
DOI: [10.1007/978-981-15-5580-0_2](https://doi.org/10.1007/978-981-15-5580-0_2)
- [7] Насибуллаев И.Ш., Даринцев О.В. Компьютерное двумерное моделирование системы жидкостного охлаждения микрозахвата // Вычислительные технологии. 2021. Т. 26, № 2. С. 4–20.
DOI: [10.25743/ICT.2021.26.2.002](https://doi.org/10.25743/ICT.2021.26.2.002)
- [8] Laser D.J., Santiago J.G. A review of micropumps // Journal of Micromechanics and Microengineering. 2004. V. 14. Pp. R35–R64.
DOI: [10.1088/0960-1317/14/6/R01](https://doi.org/10.1088/0960-1317/14/6/R01)
- [9] Fluid-structure Interaction: Modelling, Simulation, Optimization. Eds. by Bungartz H.J., Schäfer M. Heidelberg: Springer. 2006. 401 p.
DOI: [10.1007/3-540-34596-5](https://doi.org/10.1007/3-540-34596-5)
- [10] Насибуллаев И.Ш. Разработка компьютерной модели основного элемента агрегата дозирования топлива // Вычислительные технологии. 2016. Т. 21, № 2. Pp. 26–41.
<http://www.ict.nsc.ru/jct/getfile.php?id=1724>
- [11] Bruus H. Theoretical microfluidics. Lecture notes third edition. MIC Department of Micro and Nanotechnology Technical University of Denmark, 2006. 237 p.
http://homes.nano.aau.dk/Lg/Lab-on-Chip2008_files/HenrikBruus_Microfluidics%20lectures.pdf (дата обращения: 10.05.2020 г.)
- [12] Chiang Ch.-Yu, Pironneau O., Sheu T., Thiriet M. Numerical Study of a 3D Eulerian Monolithic Formulation for Incompressible Fluid-Structures Systems // Fluids. 2017. V. 2, No. 2. P. 34–53.
DOI: [10.3390/fluids2020034](https://doi.org/10.3390/fluids2020034)
- [13] Hecht F. New development in FreeFem++ // Journal of Numerical Mathematics. 2012. V. 20, No. 3–4. Pp. 251–265.
DOI: [10.1515/jnum-2012-0013](https://doi.org/10.1515/jnum-2012-0013)
- [14] Насибуллаев И.Ш., Даринцев О.В. Двумерная динамическая модель взаимодействия жидкости и пьезоэлектрического привода с поперечным изгибом в плоском канале // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 4. С. 220–232.
DOI: [10.21662/mfs2019.4.029](https://doi.org/10.21662/mfs2019.4.029)
- [15] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Даринцев О.В. Моделирование течения жидкости через деформируемый пьезоэлементом эластичный микроканал системы охлаждения микрозахвата // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20, № 12. С. 740–750.
DOI: [10.17587/mau.20.740-750](https://doi.org/10.17587/mau.20.740-750)
- [16] Nasibullayev I.Sh., Darintsev O.V., Nasibullaeva E.Sh. and Bogdanov D.R. Piezoelectric Micropumps for Microrobotics: Operating Modes Simulating and Analysis of the Main Parameters of the Fluid Flow Generation // In: Ronzhin A. and Shishlakov V. (eds) Proceedings of 15th International Conference on Electromechanics and Robotics "Zavalishin's Readings". Smart Innovation, Systems and Technologies. 2021. V. 187. Pp. 525–536. Springer, Singapore.
DOI: [10.1007/978-981-15-5580-0_43](https://doi.org/10.1007/978-981-15-5580-0_43)
- [17] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Денисова Е.В. Динамика течения жидкости в технических системах с жиклерами // Известия Уфимского научного центра РАН. 2015. № 4. С. 20–25.
eLIBRARY ID: 25732231
- [18] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Течение жидкости через систему связанных элементов технического устройства типа труба–гидросопротивление–труба // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2016. Т. 11, № 2. С. 141–149.
DOI: [10.21662/uim2016.2.021](https://doi.org/10.21662/uim2016.2.021)
- [19] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Течение жидкости через гидросопротивление с динамически изменяемой геометрией // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2017. Т. 12, № 1. С. 59–66.
DOI: [10.21662/uim2017.1.009](https://doi.org/10.21662/uim2017.1.009)
- [20] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V. Computer Axisymmetric Model of a Piezoelectric Micropump // Journal of Engineering Science and Technology Review. 2021. V. 14, No. 2. Pp. 152–164.
DOI: [10.25103/jestr.14.2.19](https://doi.org/10.25103/jestr.14.2.19)
- [21] Ландау Л., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука. 1988. 736 с.
- [22] Sandberg G., Wernberg P.-A., Davidsson P. Fundamentals of Fluid-Structure Interaction // in Computational Aspects of Structural Acoustics and Vibration, CISM International Centre for Mechanical Sciences. Vol. 505, G. Sandberg and R. Ohayon, Eds. Vienna: Springer, 2009.
DOI: [10.1007/978-3-211-89651-8_2](https://doi.org/10.1007/978-3-211-89651-8_2)
- [23] Xu J., Lin S., Ma Y., Tang Y. Analysis on Coupled Vibration of a Radially Polarized Piezoelectric Cylindrical Transducer // Sensors. 2017. V. 17, No. 12. P. 2850.
DOI: [10.3390/s17122850](https://doi.org/10.3390/s17122850)
- [24] Wang W., Shi W., Thomas P., Yang M. Design and Analysis of Two Piezoelectric Cymbal Transducers with Metal Ring and Add Mass // Sensors. 2019. V. 19, No. 1. P. 137.
DOI: [10.3390/s19010137](https://doi.org/10.3390/s19010137)
- [25] Murimi E., Kihui J., Nyakoe G., Mutuli S., Kimotho J. Determination of resonant frequency of a piezoelectric ring for generation of ultrasonic waves // Innovative Systems Design and Engineering. 2011. V. 2, No. 4. P. 103 (2011).
- [26] Kim J.O., Lee J.G. Dynamic characteristics of piezoelectric cylindrical transducers with radial polarization // Journal of Sound and Vibration. 2007. V. 300, No. 1–2. P. 241.
DOI: [10.1016/j.jsv.2006.08.021](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.08.021)
- [27] Насибуллаев И.Ш. Применение свободных программ FreeFem++/Gmsh и FreeCAD/CalculiX для моделирования статических задач упругости // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 3–4. С. 183–200.
DOI: [10.21662/mfs2020.3.129](https://doi.org/10.21662/mfs2020.3.129)
- [28] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Даринцев О.В. Изучение течения жидкости через деформируемый пьезоэлементом канал // Многофазные системы. 2018. Т. 13, № 3. С. 1–10.
DOI: [10.21662/mfs2018.3.001](https://doi.org/10.21662/mfs2018.3.001)
- [29] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш. Влияние температуры на динамику течения жидкости в технических системах с жиклерами // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2016. Т. 11, № 1. С. 1–9.
DOI: [10.21662/uim2016.1.001](https://doi.org/10.21662/uim2016.1.001)
- [30] Batchelor G.K. An introduction to fluid dynamics. Cambridge University Press. 2000. 615 p.
DOI: [10.1017/CBO9780511800955](https://doi.org/10.1017/CBO9780511800955)



Reducing the systematic error of the average fluid flow rate in axisymmetric computer model of piezoelectric micropump

Nasibullayev I.Sh.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

Mathematical and computer models of an axisymmetric coupled problem of interaction of a fluid and an elastic body for the solving partial differential equations by the finite element method FreeFem ++ software are proposed. In these models, periodic vibrations of annular piezoelectric actuators placed on an elastic tube of circular cross-section lead to radial deformations of the tube. With a synchronous oscillation of the system of piezoelectric actuators, the average fluid flow rate is zero. An asymmetric oscillation pattern (micropump mode) results in a nonzero average flow rate. Two types of boundary conditions are considered in the region of contact between the piezoelectric drive and the tube – Dirichlet and Neumann. The computer model was tested for unsteady fluid flow induced by a pressure gradient applied along the pipe with a circular cross section. With synchronous oscillation of piezoelectric actuators, a nonzero average fluid flow is a systematic error. This value was compared with the asymmetric oscillation pattern of piezoelectric actuators to determine the contribution of the systematic error to the pump-generated fluid flow rate. Based on the fluid flow velocity profile and the results of profiling the program code, the optimal parameters of the computational meshes for the channel (dense uniform) and tube walls (nonuniform, consistent with the velocity profile and reconstructing at each time step) were determined, which reduce the magnitude of the systematic error. The main way to reduce the error is to increase the density of the computational mesh, which leads to an increase in the required computing resources. An alternative method is proposed for reducing the systematic error due to an additional pressure drop applied to the channel. Depending on the type of boundary conditions and the number of piezoelectric actuators, this method can reduce the systematic error by 1 – 2 orders of magnitude without increasing the simulation time.

Keywords: hydrodynamics, hydraulic resistance, piezoelectric actuator, linear elasticity, microchannel, finite element method, micropump

References

- [1] Convery N., Gadegaard N. 30 years of microfluidics // *Micro and Nano Engineering*. 2019. V. 2. Pp. 76–91.
DOI: 10.1016/j.mne.2019.01.003
- [2] Berg J.M., Dallas T. Peristaltic Pumps. *Encyclopedia of Microfluidics and Nanofluidics* (eds. by Li D.). New York: Springer, 2015. Pp. 2693–2701.
DOI: 10.1007/978-0-387-48998-8_1198
- [3] *Microfluidics Based Microsystems: Fundamentals and Applications*. Eds. by Kakaç S., Kosoy B., Li D., Pramuanjaroenkij A. Dordrecht: NATO Science for Peace and Security Series A: Chemistry and Biology. Springer. 2010. 618 p.
DOI: 10.1007/978-90-481-9029-4
- [4] Cotta R.M., Knupp D.C., Naveira-Cotta C.P. *Analytical Heat and Fluid Flow in Microchannels and Microsystems*. Cham: Springer. 2016. 164 p.
DOI: 10.1007/978-3-319-23312-3
- [5] Darintsev O.V., Migranov A.B. [Capillary micro-grip with feedback] Capilarnyi microzahvat s obratnoi svazju. Patent RF No. 2261795 RU, [Published] Opublikovano 10.10.2005. Byul. N. 28 (in Russian).
https://www1.fips.ru/registers-doc-view/fips_servLet?DB=RUPAT&DocNumber=2261795&TypeFile=html
- [6] Darintsev O. Microgrippers: Principle of Operation, Construction, and Control Method // In: Ronzhin A., Shishlakov V. (eds) // *Proceedings of 15th International Conference on Electromechanics and Robotics "Zavalishin's Readings"*. Smart Innovation, Systems and Technologies. 2021. V. 187. Pp. 25–37. Springer, Singapore.
DOI: 10.1007/978-981-15-5580-0_2
- [7] Nasibullayev I.Sh., Darintsev O.V. [Computer 2D modelling of a micro-grip fluid cooling system]. *Vychislitel'nyye tekhnologii* [Computational technologies]. 2021. V. 26. No. 2. Pp. 4–20.
DOI: 10.25743/ICT.2021.26.2.002

- [8] Laser D.J., Santiago J.G. A review of micropumps // *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2004. V. 14. Pp. R35–R64.
DOI: [10.1088/0960-1317/14/6/R01](https://doi.org/10.1088/0960-1317/14/6/R01)
- [9] Fluid-structure Interaction: Modelling, Simulation, Optimization. Eds. by Bungartz H.J., Schäfer M. Heidelberg: Springer. 2006. 401 p.
DOI: [10.1007/3-540-34596-5](https://doi.org/10.1007/3-540-34596-5)
- [10] Nasibullayev I.Sh. [The development of a computer model for the main element of the fuel metering unit]. *Vychislitel'nyye tehnologii* [Computational Technologies]. 2016. V. 21, No. 2. Pp. 26–41 (In Russian).
<http://www.ict.nsc.ru/jct/getfile.php?id=1724>
- [11] Bruus H. Theoretical microfluidics. Lecture notes third edition. MIC Department of Micro and Nanotechnology Technical University of Denmark, 2006. 237 p.
http://homes.nano.aau.dk/Lg/Lab-on-Chip2008_files/HenrikBruus_Microfluidics%20lectures.pdf (дата обращения: 10.05.2020 г.)
- [12] Chiang Ch.-Yu, Pironneau O., Sheu T., Thiriet M. Numerical Study of a 3D Eulerian Monolithic Formulation for Incompressible Fluid-Structures Systems // *Fluids*. 2017. V. 2, No. 2. P. 34–53.
DOI: [10.3390/fluids2020034](https://doi.org/10.3390/fluids2020034)
- [13] Hecht F. New development in FreeFem++ // *Journal of Numerical Mathematics*. 2012. V. 20, No. 3–4. Pp. 251–265.
DOI: [10.1515/jnum-2012-0013](https://doi.org/10.1515/jnum-2012-0013)
- [14] Nasibullayev I.Sh., Darintsev O.V., [Two-dimensional dynamic model of the interaction of a fluid and a piezoelectric bending actuator in a plane channel]. *Mnogofaznyye sistemy* [Multiphase Systems]. 2019. V. 14, No. 4. Pp. 220–232 (in Russian).
DOI: [10.21662/mfs2019.4.029](https://doi.org/10.21662/mfs2019.4.029)
- [15] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V., [Simulation of fluid flow through a elastic microchannel deformed by a piezoelement in microgrip cooling systems]. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. 2019. V. 20, No. 12. Pp. 740–750 (In Russian).
DOI: [10.17587/mau.20.740-750](https://doi.org/10.17587/mau.20.740-750)
- [16] Nasibullayev I.Sh., Darintsev O.V., Nasibullaeva E.Sh. and Bogdanov D.R. Piezoelectric Micropumps for Microrobotics: Operating Modes Simulating and Analysis of the Main Parameters of the Fluid Flow Generation // In: Ronzhin A. and Shishtakov V. (eds) *Proceedings of 15th International Conference on Electromechanics and Robotics "Zavalishin's Readings"*. Smart Innovation, Systems and Technologies. 2021. V. 187. Pp. 525–536. Springer, Singapore.
DOI: [10.1007/978-981-15-5580-0_43](https://doi.org/10.1007/978-981-15-5580-0_43)
- [17] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Denisova E.V. [Dynamics of fluid flow in technical systems with jets]. *Bulletin of the Ufa Scientific Center of the Russian Academy of Sciences* [Izvestiya Ufimskogo Nauchnogo Centra RAN]. 2015. No. 4. Pp. 20–25 (In Russian).
eLIBRARY ID: [25732231](https://elibrary.ru/25732231)
- [18] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh. [The fluid flow through a system of connected elements of a technical device such as pipe-hydraulic resistance-pipe]. *Transactions of the Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences* [Trudy Instituta mehaniki im. R.R. Mavlyutova]ces, Ufimskiy Nauchnyi Centr RAN]. 2016. V. 11, No. 2. Pp. 141–149 (In Russian).
DOI: [10.21662/uim2016.2.021](https://doi.org/10.21662/uim2016.2.021)
- [19] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh. [Fluid flow through hydraulic resistance with dynamically changing geometry]. *Transactions of the Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences* [Trudy Instituta mehaniki im. R.R. Mavlyutova, Ufimskiy Nauchnyi Centr RAN]. 2017. V. 12, No. 1. Pp. 59–66 (In Russian).
DOI: [10.21662/uim2017.1.009](https://doi.org/10.21662/uim2017.1.009)
- [20] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V. Computer Axisymmetric Model of a Piezoelectric Micropump // *Journal of Engineering Science and Technology Review*. 2021. V. 14, No. 2. Pp. 152–164.
DOI: [10.25103/jestr.142.19](https://doi.org/10.25103/jestr.142.19)
- [21] Landau L.D., Lifshitz E.M. *Theoretical physics*. V. 6. Fluid Mechanics. M.: Nauka, 1988. 736 p. (In Russian).
- [22] Sandberg G., Wernberg P.-A., Davidsson P. *Fundamentals of Fluid-Structure Interaction* // in *Computational Aspects of Structural Acoustics and Vibration*, CISM International Centre for Mechanical Sciences. Vol. 505, G. Sandberg and R. Ohayon, Eds. Vienna: Springer, 2009.
DOI: [10.1007/978-3-211-89651-8_2](https://doi.org/10.1007/978-3-211-89651-8_2)
- [23] Xu J., Lin S., Ma Y., Tang Y. Analysis on Coupled Vibration of a Radially Polarized Piezoelectric Cylindrical Transducer // *Sensors*. 2017. V. 17, No. 12. P. 2850.
DOI: [10.3390/s17122850](https://doi.org/10.3390/s17122850)
- [24] Wang W., Shi W., Thomas P., Yang M. Design and Analysis of Two Piezoelectric Cymbal Transducers with Metal Ring and Add Mass // *Sensors*. 2019. V. 19, No. 1. P. 137.
DOI: [10.3390/s19010137](https://doi.org/10.3390/s19010137)
- [25] Murimi E., Kihui J., Nyakoe G., Mutuli S., Kimotho J. Determination of resonant frequency of a piezoelectric ring for generation of ultrasonic waves // *Innovative Systems Design and Engineering*. 2011. V. 2, No. 4. P. 103 (2011).
- [26] Kim J.O., Lee J.G. Dynamic characteristics of piezoelectric cylindrical transducers with radial polarization // *Journal of Sound and Vibration*. 2007. V. 300, No. 1–2. P. 241.
DOI: [10.1016/j.jsv.2006.08.021](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.08.021)
- [27] Nasibullayev I.Sh. [Application of free software FreeFem++/Gmsh and FreeCAD/CalculiX for simulation of static elasticity problems]. *Mnogofaznyye sistemy* [Multiphase Systems]. 2020. V. 15, No. 3–4. Pp. 183–200 (In Russian).
DOI: [10.21662/mfs2020.3.129](https://doi.org/10.21662/mfs2020.3.129)
- [28] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V. [Study of fluidflow through a channel deformed by piezoelement]. *Mnogofaznyye sistemy* [Multiphase Systems]. 2018. V. 13, No. 3. Pp. 1–10 (In Russian).
DOI: [10.21662/mfs2018.3.001](https://doi.org/10.21662/mfs2018.3.001)
- [29] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh. [The effect of temperature on the dynamics of fluid flow in technical systems with jets]. *Transactions of the Institute of Mechanics named after R.R. Mavlyutov, Ufa Scientific Center, Russian Academy of Sciences* [Trudy Instituta mehaniki im. R.R. Mavlyutova]ces, Ufimskiy Nauchnyi Centr RAN]. 2016. V. 11, No. 1. P. 1–9 (In Russian).
DOI: [10.21662/uim2016.1.001](https://doi.org/10.21662/uim2016.1.001)
- [30] Batchelor G.K. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press. 2000. 615 p.
DOI: [10.1017/CBO9780511800955](https://doi.org/10.1017/CBO9780511800955)



Влияние физических параметров на структуру «вязких пальцев»¹

Валиев А.А., Низамова А.Д., Ахметов А.Т.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Вытеснение нефти менее вязкими средами приводит к неустойчивости фронта и образованию «вязких пальцев». Наиболее информативно динамику изменения границы раздела между нагнетаемым флюидом и вытесняемой средой при изменении физических параметров можно изучить с помощью ячейки Хеле-Шоу. Использование ячейки с малым зазором позволяет отследить влияние изменения поверхностного натяжения (на границе раздела вытесняющая жидкость – нефть) на процесс формирования «вязких пальцев». Представлены результаты экспериментального исследования развития «вязких пальцев» при неустойчивом вытеснении нефти водой и водным раствором ПАВ из ячейки Хеле-Шоу. Изменялись следующие физические параметры: температура, динамическая вязкость, поверхностное натяжение и режимы течения, влияющие на формирование «вязких пальцев». Установлено, что увеличение расхода вытесняющей жидкости приводит к росту площади охвата и уменьшению ширины «вязких пальцев». После прорыва наблюдается падение доли вытесненной нефти. Использование ПАВ уменьшает поверхностное натяжение на границе двух сред, увеличивает охват и существенно снижает число и размер остаточных целиков нефти, это приводит к увеличению эффективности вытеснения. Увеличение температуры уменьшает отношение вязкостей вытесняемой и вытесняющей жидкостей, что приводит к менее интенсивному развитию «языков» и более эффективному вытеснению нефти. Фрактальный анализ размерностей «вязких пальцев» позволил установить корреляцию фрактальной размерности с эффективностью вытеснения – увеличение фрактальной размерности соответствует росту нефтеизвлечения. Таким образом, изменение физических параметров при неустойчивом вытеснении позволяет найти определяющие факторы для увеличения нефтеизвлечения на различных стадиях вытеснения.

Ключевые слова: неустойчивое вытеснение, ячейка Хеле-Шоу, «вязкие пальцы», фракталы, поверхностное натяжение, объемный расход, нефтеизвлечение

1. Введение

Вытеснение нефти менее вязкими средами приводит к неустойчивости фронта и образованию «вязких пальцев» (см. [1]). Наиболее информативно динамику изменения границы раздела между нагнетаемым флюидом и вытесняемой средой при изменении физических параметров можно изучить с помощью ячейки Хеле-Шоу. Использование

ячейки с малым зазором позволяет отследить влияние изменения поверхностного натяжения σ (на границе раздела вытесняющая жидкость – нефть) на процесс формирования «вязких пальцев». Проведение экспериментов при различных температурах T дает возможность эффективно менять соотношение динамических вязкостей (нефти μ_H /воды μ_B и нефти μ_H /раствор ПАВ μ_P) изучаемых сред. Регулируя нагнетание флюидов с постоянным объемным расходом Q можно изучить динамику развития фронта при различных режимах вытеснения.

На цилиндрической извивающейся границе раздела жидкостей капиллярное давление определяется двумя главными кривизнами поверхности раздела. Одна соответствует кривизнам изгибаю-

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-80008-мол_эв_а.

щейся линии фронта; другая, при полном смачивании, — половине величины зазора (10 мкм). Рост основного «вязкого пальца» («языка») преобладает в направлении наибольшего градиента давления. Капиллярные силы выпуклой части фронта оказывают тормозящее действие, вогнутой — ускоряющее, но их стабилизирующее действие намного меньше гидродинамических сил, приводящих к развитию «пальцев» [2]. Капиллярные силы, обусловленные взаимодействием с поверхностью при огромной кривизне, весьма значительны, они играют основную роль в образовании остаточных целиков вытесняемой жидкости.

В процессе неустойчивого вытеснения нефти водой можно выделить два этапа – течение до прорыва (подход «языка» к выходному отверстию) и после прорыва. Образующиеся структуры «вязких пальцев» до прорыва формируют фрактальные структуры, которые являются начальными для структур, образующихся в процессе последующего вытеснения. Для практического использования, в частности, для оценки эффективности вытеснения, крайне важны процессы, влияющие на расширение зоны вытеснения и происходящие после прорыва. Изменение температуры и концентрации растворов ПАВ дает возможность менять соотношения вязкостей между вытесняемой и вытесняющей жидкостями и поверхностное натяжение на границе раздела фаз.

2. Методика проведения экспериментов

Эксперименты проводились на ячейке Хеле-Шоу, представляющей собой плоский канал размером $3,5 \times 2$ см, глубиной 20 мкм между двумя оптическими пластинами толщиной 2 см с поровым объемом $V_0 = 14$ мкл. Расход жидкости задавался шприцевым насосом, дополнительно контролировался весовым методом, давление измерялось манометром и датчиком давления (MPX 5100). Для предотвращения размытости картины съемка проводилась с минимальной выдержкой видеокамеры. На компьютере осуществлялся видеозахват кадров изображения течения, а также синхронизировались и записывались измерения датчика давления и прецизионных весов [3]. Полученные видеозаписи обрабатывались в программе ImageJ. Высокое качество изображений позволило получить качественные бинарные картины и рассчитать остаточную насыщенность вытесняемой фазы. Поскольку последовательные структуры «вязких пальцев» обладают самоподобием, был проведен их фрактальный анализ [4]. Расчет фрактальной размерности D вытесняющей фазы проводился в программе NarFa

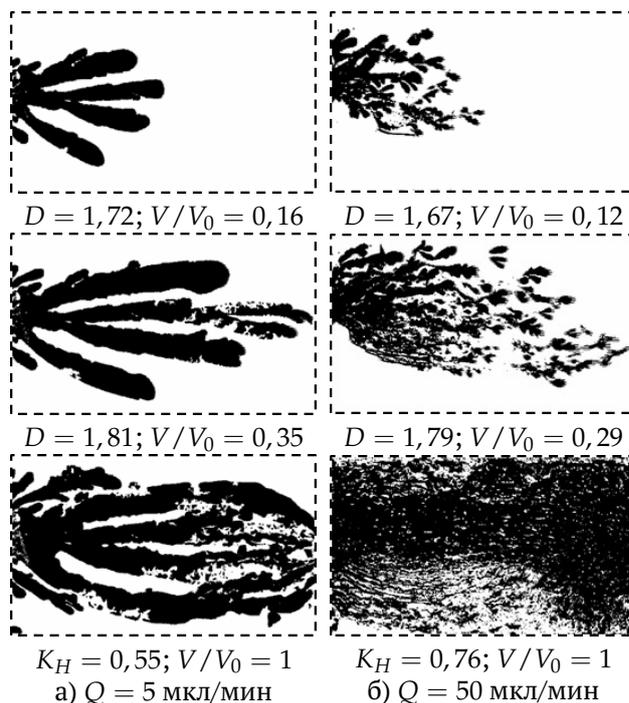


Рис. 1. Кадры видеозаписи неустойчивого вытеснения нефти водой в бинарном виде для двух режимов нагнетания при постоянных объемных расходах $Q = 5$ мкл/мин (а), $Q = 50$ мкл/мин (б), $T = 25$ °С, $\mu_H/\mu_B = 29$, $\sigma = 30$ мН/м (штриховые линии соответствуют контуру ячейки Хеле-Шоу; видеокадры сверху вниз демонстрируют структуру развития «вязких пальцев» и их состояние при достижении середины ячейки, выходного отверстия и после прокачки одного объема ячейки)

5.5L с использованием метода «box-counting».

3. Результаты экспериментов

По данным реологических измерений, проведенных на прецизионном ротационном реометре HAAKE MARS III при 25 °С, соотношение вязкостей $\mu_H/\mu_B = 29$. Нагнетание дистиллированной воды при расходе 5 мкл/мин в ячейку, заполненную нефтью, приводит к формированию узкого «языка» (рис. 1(а)) с разветвлениями, направленными в сторону градиента давления с охватом не больше половины ширины канала. Объем вытесненной нефти при подходе фронта к центру ячейки составляет $0,16V_0$, при достижении «вязкими пальцами» выходного отверстия (прорыва) — $0,35V_0$. После прорыва происходит резкое оживление боковых пальцев, сопровождаемое расширением площади охвата с большим количеством небольших «островков» из остаточных целиков нефти. Прокачка одного порового объема воды приводит к вытеснению

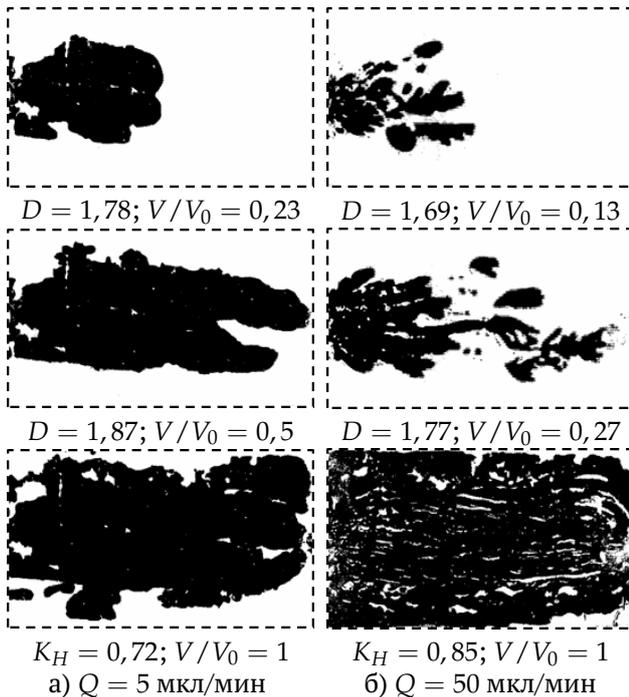


Рис. 2. Кадры видеозаписи неустойчивого вытеснения нефти водой в бинарном виде для двух режимов нагнетания при постоянных объемных расходах $Q = 5$ мкл/мин (а), $Q = 50$ мкл/мин (б), $T = 80$ °С, $\sigma = 27$ мН/м, $\mu_H/\mu_B = 9$ (штриховые линии соответствуют контуру ячейки Хеле-Шоу; видеокадры сверху-вниз демонстрируют структуру развития «вязких пальцев» и их состояние при достижении середины ячейки, выходного отверстия и после прокачки одного объема ячейки)

более половины начального объема нефти $0,55V_0$ с коэффициентом нефтеизвлечения $K_H = 0,55$. При 10-кратном увеличении расхода до 50 мкл/мин картина вытеснения существенно изменяется: если при 5 мкл/мин «пальцы» широкие, гладкие и относительно мало дробятся, то при 50 мкл/мин «пальцы» быстро растут и практически сразу начинают дробиться с более широким охватом зоны вытеснения при достижении ими середины ячейки $K_H = 0,12$. Перед моментом наступления прорыва коэффициент нефтеизвлечения $K_H = 0,29$ немного ниже значения, полученного при малом расходе, но после прорыва и прокачки одного объема ячейки воды V_0 количество вытесненной нефти в 1,5 раза превышает количество, полученное при закачке с 10-кратно меньшим расходом.

Увеличение температуры от 25 °С до 80 °С приводит к уменьшению вязкости нефти в 8 раз, воды в 2,5 раза, соответственно отношение вязкостей

становится меньше в 3 раза — $\mu_H/\mu_B = 9$. Следует отметить, что с изменением температуры меняется и поверхностное натяжение на границе нефти с водой, но не столь значительно — в рассматриваемом диапазоне температур изменение не превышает 7%. Существенное изменение соотношения вязкостей приводит к уменьшению неустойчивости течения, расширению «вязких пальцев» и увеличению охвата почти на всю ширину ячейки при расходе 5 мкл/мин (рис. 2(а)), к большему нефтеизвлечению при достижении центра ячейки $K_H = 0,23$, а к моменту прорыва $K_H = 0,5$ практически без образования остаточных целиков нефти. Соответственно происходит увеличение объема вытесненной нефти и рост времени до наступления прорыва, после прорыва вытеснение идет с малым количеством остаточных целиков нефти. Нефтеизвлечение после прохождения одного объема пор воды $K_H = 0,72$.

Увеличение объемного расхода воды в 10 раз приводит к дроблению «вязких пальцев» и менее эффективному вытеснению нефти на начальной стадии продвижения «вязких пальцев» (рис. 2(б)) по сравнению с расходом 5 мкл/мин. Подобное поведение «вязких пальцев» продолжается вплоть до прорыва. При этом извлечение нефти $K_H = 0,27$ почти вдвое меньше значения при малом расходе $K_H = 0,5$ (рис. 2(а)). В стадии доотмыва вытеснение нефти идет бурно и ее извлечение после прохождения порового объема воды составляет $0,85V_0$, по сравнению с малым расходом извлечение нефти возрастает почти на 20%.

Вытеснение нефти 1% водным раствором ПАВ (додецилсульфат натрия — SDS) при более чем 10-кратном уменьшении поверхностного натяжения $\sigma = 3$ мН/м облегчает дробление пальцев и зарождение новых (рис. 3(а)). Образуется серия параллельных «вязких пальцев» с широким охватом. Объем вытеснения нефти на момент прорыва — $0,28V_0$. После прорыва все «вязкие пальцы» развиваются в ширину и охватывают весь канал, эффективность высока, а объем вытеснения нефти составляет $0,75V_0$. По сравнению с чистой водой использование 1% раствора ПАВ приводит к вытеснению нефти на 36% больше. В основном остаточные целики нефти имеют продолговатую вытянутую форму и, что примечательно, их движение не останавливается, а капиллярные силы меньше гидродинамических.

Десятикратное увеличение расхода приводит к вытянутой форме «вязких пальцев», т.е. к увеличению вытеснения нефти к моменту прорыва практически на треть. Довытеснение нефти происходит более активно по сравнению со все-

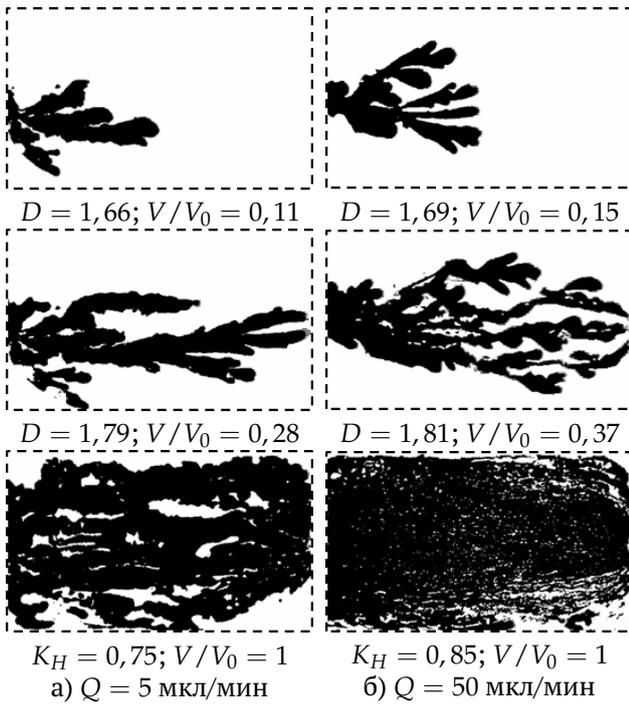


Рис. 3. Кадры видеозаписи неустойчивого вытеснения нефти раствором ПАВ в бинарном виде для двух режимов нагнетания при постоянных объемных расходах $Q = 5$ мкл/мин (а), $Q = 50$ мкл/мин (б), $\sigma = 3$ мН/м, $T = 25$ °С, $\mu_H/\mu_P = 31$ (штриховые линии соответствуют контуру ячейки Хеле-Шоу; видеокadres сверху-вниз демонстрируют структуру развития «вязких пальцев» и их состояние при достижении середины ячейки, выходного отверстия и после прокачки одного объема ячейки)

ми рассмотренными выше случаями, оставшиеся целики нефти продолжают движение. Довольно странно, что при большом объемном расходе эффективность раствора ПАВ почти такая же, как у дистиллированной воды.

При движении жидкости объем вытесненной нефти равен объему закачанной жидкости вплоть до прорыва (рис. 4). На графике представлены зависимости вытесненной нефти от объема закачанной жидкости, все значения объемов вытесненной нефти лежат на одной линии до момента прорыва. Но, тем не менее, в зависимости от структуры кластеров из «вязких пальцев» объемы вытесненной нефти к моменту прорыва существенно отличаются. Уменьшение отношения вязкостей μ_H/μ_B с 29 мПа·с до 9 мПа·с значительно стабилизирует фронт и приводит к вытеснению половины объема нефти. Наибольшее нефтеизвлечение после прокачки одного объема пор V_0 вытесняющей жидкости достигается при 10-кратном увеличении рас-

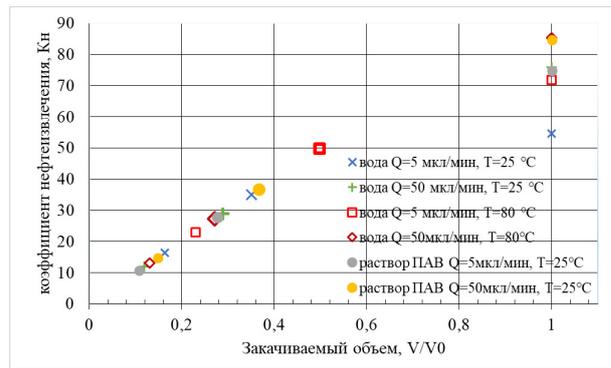


Рис. 4. Зависимость коэффициента нефтеизвлечения K_H от количества закачанного относительного объема жидкости (V/V_0)

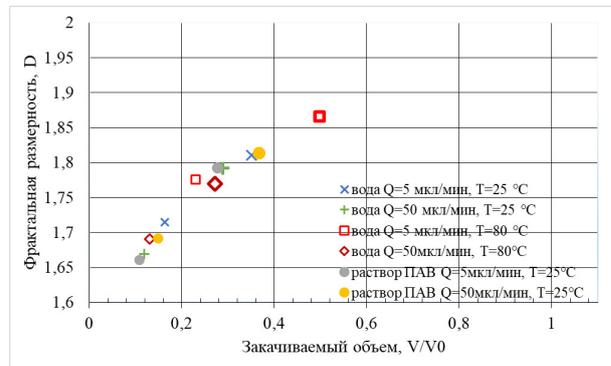


Рис. 5. Зависимость фрактальной размерности D от закачанного объема жидкости в ячейку Хеле-Шоу. Размерность приведена для «вязких пальцев» с учетом границы раздела фаз

хода со сниженным отношением вязкостей μ_2/μ_1 за счет температуры (рис. 2(б)) или использования ПАВ (рис. 3(б)) (две совпадающие верхние точки на рис. 4). В то время как до момента прорыва к наиболее эффективному вытеснению приводит снижение отношений вязкостей (рис. 2(а)).

Отличие структур «вязких пальцев» при постоянных расходах сказывается и в различии их фрактальных размерностей (рис. 5). Фрактальная размерность в зависимости от нагнетаемого объема во всех приведенных случаях растет. С увеличением размеров кластеров рост их фрактальной размерности замедляется.

Фрактальный анализ размерностей «вязких пальцев» отражает эффективность вытеснения: увеличение фрактальной размерности соответствует росту площади охвата.

4. Заключение

При неустойчивом вытеснении нефти в ячейке Хеле-Шоу изменение физических параметров приводит к существенному преобразованию структуры фронта, большому различию характера вытеснения до прорыва и после — при доотмыве. Эффективность нефтеизвлечения на всех стадиях вытеснения меняется в зависимости от физических параметров.

К моменту наступления прорыва наиболее значительные изменения в эффективности вытеснения происходят за счет уменьшения соотношений вязкостей (в 9 раз) при малом объемном расходе (5 мкл/мин) вытесняющей воды.

В стадии доотмыва наиболее эффективно использование большого расхода на ряду с уменьшением отношения вязкостей и поверхностного натяжения.

Таким образом, изменение физических параметров при неустойчивом вытеснении позволяет найти определяющие факторы для увеличения нефтеизвлечения на различных стадиях вытеснения.

Список литературы

- [1] Saffman P.G., Taylor G. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society. 1958. V. 245, No. 1242. Pp. 312–329.
[DOI: 10.1098/rspa.1958.0085](https://doi.org/10.1098/rspa.1958.0085)
- [2] Homsy G.M. Viscous fingering in porous media // Annual review of fluid mechanics. 1987. V. 19, No. 1. Pp. 271–311.
- [3] Валиев А.А., Ахметов А.Т., Рахимов А.А. Неустойчивое вытеснение в плоскопараллельном микроканале // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2020. № 65. С. 68–82.
[DOI: 10.17223/19988621/65/5](https://doi.org/10.17223/19988621/65/5)
- [4] Мавлетов М.В., Валиев А.А. Эффективность неустойчивого вытеснения нефти из ячейки Хеле-Шоу // Нефтегазовое дело. 2018. № 8. С. 42–45.
[DOI: 10.30713/0207-2351-2018-8-42-45](https://doi.org/10.30713/0207-2351-2018-8-42-45)
- [5] Низамова А.Д., Валиев А.А. Математическая модель вытеснения нефти водой в плоском канале // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 3–4. С. 208–211.
[DOI: 10.21662/mfs2020.3.131](https://doi.org/10.21662/mfs2020.3.131)
- [6] Валиев А.А., Низамова А.Д. Комплексное исследование вытеснения нефти водой в плоском канале // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 1–2. С. 25.
[DOI: 10.21662/mfs2020.1.023](https://doi.org/10.21662/mfs2020.1.023)



Influence of physical parameters on the “viscous fingers” structure

Valiev A.A., Nizamova A.D., Ahmetov A.T.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

Displacement of oil by less viscous media leads to instability of the front and the formation of “viscous fingers”, the structure of which depends on various physical parameters. The most informative dynamics of the change in the interface between the injected fluid and the displaced medium with a change in physical parameters can be studied using the Hele-Shaw cell. The use of a cell with a small gap makes it possible to track the effect of changes in surface tension (at the interface, oil displacing liquid) on the formation of “viscous fingers”.

The results of an experimental study of the development of “viscous fingers” during unstable displacement of oil by water and an aqueous solution of surfactants from the Hele-Shaw cell are presented. Physical parameters were changed: temperature, dynamic viscosity, surface tension and flow regimes influencing the formation of “viscous fingers”. It was found that an increase in the displacement fluid flow rate leads to an increase in the area of coverage and a decrease in the width of the “viscous fingers”. After the breakthrough, a drop in the share of oil displacement is observed. The use of surfactants reduces the surface tension at the interface between the two media, increases the coverage and significantly reduces the number and size of residual oil pillars, which leads to an increase in displacement efficiency. An increase in temperature decreases the viscosity ratio of the displaced and displaced fluid, which leads to less intensive tongue development and more efficient oil displacement.

Fractal analysis of the dimensions of «viscous fingers» made it possible to establish a correlation between fractal dimension and displacement efficiency, an increase in fractal dimension corresponds to an increase in oil recovery. Thus, the change in physical parameters during unstable displacement makes it possible to find the determining factors for increasing oil recovery at various stages of displacement.

Keywords: unstable displacement, Hele-Shaw cell, “viscous fingers”, fractals, surface tension, volumetric flow rate, oil recovery

References

- [1] Saffman P.G., Taylor G. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society. 1958. V. 245, No. 1242. Pp. 312–329.
DOI: 10.1098/rspa.1958.0085
- [2] Homsy G.M. Viscous fingering in porous media // Annual review of fluid mechanics. 1987. V. 19, No. 1. Pp. 271–311.
- [3] Valiev A.A., Akhmetov A.T., Rakhimov A.A. Unstable displacement in a plane-parallel microchannel // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika. 2020. № 65. Pp. 68–82. (In Russian)
DOI: 10.17223/19988621/65/5
- [4] Mavletov M.V., Valiev A.A. Efficiency of unstable oil displacement from the Hele-Shaw cell // Neftegazovoe delo. 2018. № 8. Pp. 42–45. (In Russian)
DOI: 10.30713/0207-2351-2018-8-42-45
- [5] Nizamova A.D., Valiev A.A. Mathematical model of oil displacement by water in a plane channel // Mnogofaznyie sistemyi. 2020. V. 15, № 3–4. Pp. 208–211. (In Russian)
DOI: 10.21662/mfs2020.3.131
- [6] Valiev A.A., Nizamova A.D. Comprehensive study of oil displacement by water in a plane channel // Mnogofaznyie sistemyi. 2020. V. 15, № 1–2. P. 25. (In Russian)
DOI: 10.21662/mfs2020.1.023



К ЮБИЛЕЮ ЕКАТЕРИНЫ ВСЕВОЛОДОВНЫ ДЕНИСОВОЙ



2 января 2021 года отметила свой юбилей кандидат технических наук, доцент Екатерина Всеволодовна Денисова.

Е.В. Денисова родилась в городе Свободный Амурской области СССР. Окончила в 1973 году Уфимский авиационный институт по специальности «Электрические машины и аппараты».

С 1973 года работала на научно-производственном предприятии «Мотор» в должности инженера-конструктора 1 категории. Работа была связана с проектированием и доводкой электронно-гидравлических систем автоматического управления беспилотными летательными аппаратами с выездами на испытательные стенды.

В 1985 году Е.В. Денисова перевелась на кафедру технической кибернетики УАИ (в настоящее время — УГАТУ) сначала на должность младшего, затем старшего научного сотрудника.

В 1986 году поступила в заочную аспирантуру Московского авиационного института, которую закончила в 1990 году с успешной защитой кандидатской диссертации на тему «Анализ устойчивости систем автоматического управления воздушно-реактивными двигателями». После защиты диссертации Е.В. Денисова получила должность доцента.

Под руководством Е.В. Денисовой в УГАТУ выполнено 32 дипломные работы.

В 2004 году ей присвоено звание «доцент по науке».

Начиная с 1992 года Е.В. Денисова активно участвовала в создании и организации работ в Институте механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН (указано современное название) в качестве Ученого секретаря и ведущего научного сотрудника.

Одновременно с научной работой Екатерина Всеволодовна преподает на кафедре вычислительной техники и инженерной кибернетики УГНТУ на 0,25 ставки доцента. Е.В. Денисовой с коллегами разработана концепция самоорганизации управления сложными техническими объектами в иерархических многосвязных системах, основанная на изменении их структуры на динамических режимах с целью повышения эффективности процесса управления в целом. Концепция самоорганизации предусматривает также использование в динамике свободных регулирующих органов и дополнительной информации о состоянии системы, что позволяет значительно снизить динамические ошибки на режимах управления и стабилизации.

Также установлен частотный критерий устойчивости гетерогенных многосвязных систем управления, основанный на выделении представительских характеристик для каждого класса эквивалентности и на суждении об устойчивости всей системы по их расположению относительно корней уравнения связи. Критерий дает достаточные условия устойчивости.

Установлены частотные критерии устойчивости для периодических движений в гомоген-

ных (однотипных) нелинейных многосвязных системах, в том числе с нечеткими регуляторами в сепаратных подсистемах. Критерии позволяют повысить эффективность системных исследований, выявляя автономное влияние как динамических характеристик сепаратных подсистем, так и многомерных элементов связей на устойчивость периодических движений многосвязной системы в целом.

Получены новые методики проектирования элементов гидроавтоматики с учетом специфики протекающих процессов и конструктивных особенностей, а также синтеза специализированного алгоритмического обеспечения для моделирования проектируемых устройств.

Е.В. Денисова имеет более 100 научных работ, в том числе 1 монографию (в соавторстве), 45 статей ВАК и РИНЦ, 18 авторских свидетельств и патентов РФ.

В качестве руководителя ею велись работы по следующим грантам Российского фонда фундаментальных исследований:

- 14-08-97027 р_поволжье_а «Методики коррекции динамических параметров моделей силовой установки по результатам анализа динамических процессов топливной автоматики».

- 08-08-12058-офи «Моделирование рабочего процесса, проектирование и изготовление элементов топливной автоматики из наноструктурного алюминия».

С 2001 по 2016 гг. Е.В. Денисова явля-

лась организатором региональной программы РФФИ – Кабинет министров РБ, выполняла обязанности члена регионального экспертного совета как помощник Президента Академии наук РБ по работе с федеральными фондами.

В настоящее время выполняет обязанности Ученого секретаря Координационного совета УГНТУ – Йокогава (Япония), созданного в 2016 г. с целью повышения качества подготовки специалистов в области автоматизации технологических процессов.

Е.В. Денисова награждена Почетной грамотой Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН (2017 г.), Благодарностью и Почетной грамотой Уфимского федерального исследовательского центра РАН (2021 г.), Благодарственным письмом и Почетной грамотой Администрации Октябрьского района городского округа город Уфа (2017, 2021 гг.), Благодарственным письмом и Почетной грамотой Администрации городского округа город Уфа (2017, 2021 гг.), Почетной грамотой Академии наук Республики Башкортостан (2019 г.), Почетной грамотой Российской академии наук (2021 г.), Почетной грамотой Совета городского округа города Уфа Республики Башкортостан (2021 г.) и многими другими.

Коллектив журнала «Многофазные системы» от всей души поздравляет свою коллегу Екатерину Всеволодовну Денисову с юбилеем и желает ей прекрасного самочувствия, творческого вдохновения и активности, новых замечательных успехов на благо нашего Отечества!

Содержание

Галимзянов М.Н., Михайленко К.И., Налобина Е.А.

Подготовка статьи для журнала «Многофазные системы»: руководство для автора 1–7

Механика жидкости и газа

Садриддинов П.Б.

Численное исследование зависимости скорости волны фильтрационного горения газа от параметров процесса 8–13

Насибуллаев И.Ш.

Снижение систематической погрешности среднего расхода жидкости в осесимметричной компьютерной модели пьезоэлектрического микронасоса 20–31

Краткие сообщения

Болотнова Р.Х., Коробчинская В.А., Файзуллина Э.А.

Исследование динамики газа и газокапельной смеси при точечном взрыве на основе аналитического решения Седова 14–19

Валиев А.А., Низамова А.Д., Ахметов А.Т.

Влияние физических параметров на структуру «вязких пальцев» 32–37

Портрет ученого

К юбилею Екатерины Всеволодовны Денисовой 38–39

Contents

Galimzyanov M.N., Mikhaylenko C.I., Nalobina E.A.

Formatting of an article for the journal “Multiphase Systems”: a guide for the author 1–7

Liquid & Gas Mechanics

Sadriddinov P.B.

Numerical study of the dependence of the wave velocity of filtration gas combustion on the process parameters 8–13

Nasibullayev I.Sh.

Reducing the systematic error of the average fluid flow rate in axisymmetric computer model of piezoelectric micropump 20–31

Brief Communications

Bolotnova R.Kh., Korobchinskaya V.A., Faizullina E.A

Study the dynamics of gas and gas-drop mixture in a point explosion based on Sedov’s analytical solution 14–19

Valiev A.A., Nizamova A.D., Ahmetov A.T.

Influence of physical parameters on the “viscous fingers” structure 32–37

Profiles

Anniversary of Denisova Ekaterina Vsevolodovna (in Russian) 38–39