

ISSN: 2658–5782

Номер 3-4

2021

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org





Рассеяние звуковых волн на сферах: методы решения и основные характеристики (обзор)¹

Насибуллаева Э.Ш.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Исследование явления рассеяния звуковых волн на неоднородностях малых размеров имеет важное значение как для изучения фундаментальной природы данного явления, так и с практической точки зрения, поскольку на данном явлении основываются многие применения акустических волн, такие как гидролокация, зондирование атмосферы и океана, приборы неразрушающего контроля, создание позиционируемого 3D звука и т.п. Во многих исследуемых системах препятствия являются сферическими (или могут быть рассмотрены таковыми). Настоящий обзор посвящен анализу основных работ по теоретическим методам решения задач рассеяния акустических волн на сферах и определению основных характеристик данного явления, а также по существующим экспериментальным работам. Можно выделить два теоретических подхода к решению представленной задачи. В первом подходе предполагается, что распределение рассеивателей является случайным, и вычисляется среднее значение рассеянного поля. Во втором подходе, которому уделено основное внимание в настоящей статье, решение сводится к большим системам интегральных или линейных алгебраических уравнений с помощью различных методов, таких как метод Т-матриц, теоремы сложения для сферических функций, функции Грина, интегральные уравнения. Первый подход позволяет рассматривать системы с большим числом случайно распределенных рассеивателей, однако, из-за осреднения звукового поля невозможно определить давление в конкретной точке пространства. Второй подход дает возможность определять зоны повышения и понижения давления, однако, для большого числа сфер решение требует значительных затрат вычислительных ресурсов и процессорного времени. Анализ научных работ, в которых определяются основные характеристики явления рассеяния, такие как полное сечение рассеяния или сечение обратного рассеяния, показал, что аналитические формулы и численные исследования ограничены случаями одиночной сферы или систем с двумя сферами. Следовательно, задача определения выражения для данных характеристик в общем случае остается нерешенной и сохраняет свою актуальность.

Ключевые слова: акустическое рассеяние, звуконепроницаемая сфера, звукопроницаемая сфера, звуковое поле, полное сечение рассеяния, теоретические методы, эксперимент

1. Введение

При взаимодействии акустической волны с препятствиями малых размеров, отличающихся плотностью и (или) сжимаемостью от основной среды, появляются дополнительные (рассеянные) волны, распространяющиеся во все стороны от препятствий. Данное явление называют рассеяни-

ем (или дифракцией) звука. Когда излучение рассеивается только на одном локализованном препятствии, то это называется однократным рассеянием. Результирующее поле может быть представлено как сумма первичной волны, существовавшей в отсутствии препятствия, и рассеянной (вторичной) волны, возникшей в результате взаимодействия первичной волны с препятствием. При наличии множества препятствий волны от каждого из них рассеиваются повторно и многократно другими препятствиями, что называется многократным рассеянием.

¹Работа поддержана средствами государственного задания № 0246-2019-0052.

Изучение явления рассеяния звуковых волн на неоднородностях малых размеров имеет важное значение как для изучения фундаментальной природы данного явления, так и с практической точки зрения, прежде всего благодаря тому, что на данном явлении основываются многие применения акустических волн, которые позволяют, например,

- в гидролокации [1, 2] определять местоположение косяков рыб, отдельных крупных рыб или других подводных объектов и невидимых подводных препятствий;
- при зондировании атмосферы и океана [1–3] получать информацию о поверхности Земли и объектах на ней, атмосфере, океане и верхнем слое земной коры;
- в приборах неразрушающего контроля [4] измерять как геометрические параметры при одностороннем доступе к изделию, так и физико-механические свойства металлов и металлоизделий без их разрушения;
- в медицинских сканерах [5, 6] для диагностических целей визуализировать внутренние органы и процессы, протекающие в тканях;
- при создании позиционируемого 3D звука [7] придавать звуковой модели реализм и усиливать ощущения при восприятии звука слушателем.

Во многих исследуемых системах препятствия являются сферическими или могут быть рассмотрены таковыми, поэтому одной из актуальных акустических подзадач является исследование рассеяния на множествах сфер (твердых сферах или сферических пузырьках и каплях) при различных внешних воздействиях.

В фундаментальных работах [8–12] представлены решения классических (базовых) задач рассеяния от одиночных сфер с различными граничными условиями. Целью настоящей работы является обзор основных работ, выходящих за пределы классических постановок, по теоретическим методам решения задачи рассеяния акустических волн на сферах и определения основных характеристик данного явления в рамках поставленной задачи, а также по существующим экспериментальным работам.

Можно выделить два теоретических подхода к решению представленной задачи. В первом подходе предполагается, что распределение рассеивателей является случайным, вычисляется среднее значение рассеянного поля (или мощности) [1, 13, 14]. Во втором подходе (далее будет подробно рассмотрен) решение сводится к

большим системам интегральных или линейных алгебраических уравнений с помощью различных методов, например, таких как: метод Т-матриц (см. работы [15–17]), теоремы сложения для сферических функций (см. работы [18–20]), функции Грина (см. работы [21, 22]), интегральные уравнения (см. работы [23–25]).

2. Методы решения задачи рассеяния акустической волны на сферических препятствиях

2.1. Случай одиночной сферы

Случай одиночной сферы (сферическая твердая частица, пузырек или капля) достаточно хорошо изучен в литературе и интересен с практической точки зрения, поскольку позволяет проводить сравнения с существующими экспериментальными и расчетными данными других исследователей.

Впервые рассеяние акустической волны на твердой и жидкой сферах было исследовано Рэлеем [26, 27], который рассматривал сферу с размерами малыми по сравнению с длиной волны (так называемое рэлеевское рассеяние). При рэлеевском рассеянии на жидкой сфере в решении при разложении в ряд важны как члены нулевого порядка (зависят от сжимаемости сферы), так и члены первого порядка (зависят от плотности сферы). Установлено, что рассеивающая способность малой сферы существенно увеличивается с ростом частоты.

Экспериментальная проверка решения Рэля путем определения распределения давления на поверхности неподвижной жесткой сферы при воздействии плоской поступательной звуковой волны проведена в работе [28]. Получено достаточно хорошее согласование между теорией и экспериментом в диапазоне волновых радиусов $1/3 < ka < 10$, где k — волновое число падающей волны; a — радиус препятствия. В частности, экспериментально было подтверждено существование «яркого» пятна, диаметрально противоположного точке, ближайшей к источнику звука.

Существует ряд работ, где задача рассеяния от множества сферических газовых рассеивателей сводится к рассеянию на одиночной сфере, содержащей микронеоднородную среду. Так, например, в работе [29] рассмотрено рассеяние в жидкости низкочастотной плоской волны на облаке, имеющем сферическую форму, с равномерно распределенными в нем газовыми пузырьками. Показано, что образование устойчивых гроздей из пузырьков под действием звуковой волны является коллективным эффектом, возникновение которого за-

висит в основном от величины объемного газосодержания жидкости. А в работе [30] решалась задача рассеяния и поглощения звука на сферической границе раздела между жидкостью и областью, содержащей двухфазную среду с аномальной динамической сжимаемостью, имитирующей рыбные скопления ограниченных размеров (рыбные садки). Данная задача решалась с помощью модели микронеоднородной двухфазной среды [10], где акустические характеристики описывались осредненными величинами плотности и сжимаемости. Проведено сопоставление с аналогичными процессами, представленными в предыдущей работе авторов [31], где была рассмотрена задача об отражении звука при падении плоской волны на плоскую границу раздела между жидкостью (водой) и скоплениями газовых пузырей в жидкости, имитирующими промысловые косяки пузырных рыб.

В значительном числе работ изучалось рассеяние волны на одиночной сфере, содержащей однородную среду, при этом сфера являлась либо звуконепропускаемой (твердая сфера), когда волна не проходит через её границу, либо звукопроницаемой (жидкая капля или газовый пузырек), когда волна проходит через границу и распространяется в среде с физическими характеристиками, отличными от окружающей сферу среды. Представим основные из этих работ.

В работе [32] рассматривалась задача рассеяния звука от сферического жидкого препятствия, размер которого сравним с длиной волны, без учета диссипации энергии. Для сравнения также представлены предельные случаи рэлеевского рассеяния (когда радиус сферы много меньше длины волны) и рассеяния на неподвижной жесткой сфере.

Рассеяние плоской монохроматической звуковой волны на одиночной сфере с учетом поглощения энергии, обусловленного тепловым механизмом, рассмотрено в работе [33]. Показано, что данный вид поглощения энергии является существенным при рассеянии звука на высоких частотах, а также для мягких объектов, таких как пузырьки или сферы с физическими свойствами, близкими к свойствам жидкости.

Теоретические исследования рассеяния звука в окрестности сферы малого радиуса, движущейся в идеальной жидкости с постоянной скоростью, много меньшей скорости звука, представлены в работе [34]. Получено, что амплитуда рассеяния звука пропорциональна числу Маха и содержит как монополю с дипольной, так и квадрупольную компоненты; поля, рассеянные на неоднородностях течения среды, оказываются синфазными при рассеянии звука вперед и назад, а на поверхности

движущейся сферы — в противофазе.

В работе [35] рассматривалось рассеяние поля параметрической антенны на сфере, расположенной в области нелинейного взаимодействия, в случае, когда размеры данной антенны на порядок превышают радиус сферического рассеивателя. Получено достаточно хорошее совпадение теоретических выводов данной работы и экспериментальных результатов измерения вторичного низкочастотного поля волны разностной частоты при рассеянии на стальной и алюминиевой сферах.

Теоретические и экспериментальные результаты по измерению отклика на поверхности жесткой сферы представлены в работе [36]. Теоретическое решение получено с помощью техники, основанной на определении направленной передаточной функции (directional transfer function), которая в настоящее время используется для измерения передаточной функции головы человека (head-related transfer function) при разработке технологии создания позиционируемого 3D звука. Получено хорошее согласование экспериментальных данных с теоретическим решением.

Отметим книгу [8], где представлены точные решения «базовых» задач рассеяния плоской волны на одиночных звуконепропускаемой и звукопроницаемой сферах путем разложения по сферическим функциям. В частности, получено, что произвольная звукопроницаемая сфера малого волнового размера создает одновременно и монополю и дипольное рассеяния, а в случае пузырька монополю рассеяния оказывается существенно сильнее, чем дипольное, при этом амплитуда рассеянной волны имеет резонансный характер.

В обзорной работе [37] приведены выражения и определения для акустических поперечных сечений, резонансных частот и коэффициентов затухания сферически пульсирующего газового пузырька в бесконечной жидкой среде, а также вывод выражений для «резонансной частоты».

В работе [38] предложена и экспериментально исследована модель неподвижного газового пузырька в воде в виде пенопластового сферического образца. Численное моделирование проведено на основе модели рассеяния звуковых импульсов на абсолютно мягкой сфере [12]. Показано, что результаты измерений находятся в хорошем согласовании с теоретическими данными, полученными по классической модели.

Исследование акустического рассеяния от одиночной звуконепропускаемой сферы для двух видов внешнего воздействия (сферической волны от монополюсного источника излучения и плоской волны) проведено в работе [39]. Сравнение

численных результатов данной работы показало хорошее соответствие результатам экспериментальной работы [36]. В последующей работе [40] представлено обобщение на случай одиночной звукопроницаемой сферы; проведено сравнение с данными экспериментов [41] и также получено хорошее соответствие.

Теория акустического рассеяния плоской волны на сфере без асимптотического приближения на большие расстояния представлена в работе [42] с целью учета информации о расстоянии между целью и наблюдателем. В качестве примеров рассмотрено акустическое рассеяние на жесткой и нежесткой сферах. Показано, что при длинноволновом акустическом рассеянии необходимо учитывать эффекты вблизи цели.

2.2. Случай пары сфер

Работы, посвященные изучению рассеяния звуковых волн на двух сферах, интересны, поскольку, с одной стороны, имеет место взаимодействие друг с другом рассеянных от сфер полей, а, с другой стороны, данное взаимодействие является достаточно простым для того чтобы его можно было подробно изучить.

Теоретическое исследование сил, действующих на две твердые сферы произвольного размера, когда их центры расположены параллельно направлению распространения плоского звукового поля, проведено в работе [43]. Выражения для сил на каждой сфере получены в терминах расходящихся волновых функций и функций преобразования координат. Показано, что данные силы могут быть на несколько порядков больше, чем те, которые действовали бы на каждую из сфер, если бы они были изолированы, что обусловлено взаимным влиянием рассеянных от каждой из сфер полей.

В работе [19] решается задача рассеяния плоской волны на двух акустически жестких сферах одного и того же радиуса методом разделения переменных в сферических координатах. Представление коэффициентов перехода при разложении рядов производится с помощью коэффициентов Клебша–Гордана. Результаты сравниваются с предыдущей работой автора [18], где рассмотрен случай акустически мягких сфер.

Множественное рассеяние акустических волн двумя (или тремя) сферами было подробно изучено в работе [44] с использованием трех различных подходов: мультипольного разложения, геометрической оптики и экспериментов. В методе разложения по мультиполям применялась теорема трансляционного сложения для сферических волновых функций. Решения в замкнутой форме были по-

лучены для двух частных случаев: в приближении Рэлея и для большого расстояния между сферами.

В работе [21] решалась задача излучения и множественного рассеяния двух вибрирующих сфер с помощью метода функций Грина. Получены численные результаты, демонстрирующие влияние взаимодействия (рассеяния) на давление в ближнем и дальнем полях, а также зависимость импеданса излучения одной сферы от присутствия другой.

Явные формулы для рассеяния монохроматической волны от двух рассеивателей получены в работе [15] методом Т-матриц, а также представлены численные расчеты обратного и дифференциального сечений рассеяния двух сфер для различных параметров системы.

В работе [20] задача рассеяния плоской звуковой волны двумя взаимодействующими звукопроницаемыми сферами решалась с помощью теоремы сложения для сферических волновых функций (см., например, [45, 46]), которые допускают разложение поля, используя символы Вигнера ($3-j$). Получены аналитические аппроксимации решения данной задачи для частных случаев, таких как рассеяние в дальнем поле и большое расстояние между сферами.

Задача рассеяния плоской гармонической волны на двух близко расположенных импедансных сферах в работе [47] решается методом, основанным на представлении решения в виде рядов по сферическим функциям. Показано, что в области низких частот для акустически мягких сфер имеет место взаимное демпфирование колебаний, а в области высоких частот — полное или частичное затенение одной из сфер (независимо от краевых условий на сферах).

Теоретическое и экспериментальное исследование обратного рассеяния звука от двух пузырьков, расположенных симметрично оси, проходящей через источник звука (одновременно являющийся приемником отраженной волны) перпендикулярно оси, соединяющей центры рассеивателей, представлено в работе [41]. Теоретические расчеты поля рассеяния выполнялись с использованием точного решения в замкнутой форме, полученного из разложения множественного рассеяния.

В работе [48] теоретически, численно и экспериментально исследовано акустическое рассеяние двумя идентичными сферами. Применяется подход теории групповых представлений, при котором падающее и рассеянное поля раскладываются по различным неприводимым представлениям непрерывной группы симметрии рассеивателя. Затем из граничных условий для каждого неприводимого представления получается ко-

нечная система линейных комплексных алгебраических уравнений, в которой неизвестные коэффициенты рассеяния не связаны, что позволяет ускорить численные расчеты. Серия экспериментов, основанных на ультразвуковой спектроскопии, проведена в случае двух сфер из нержавеющей стали, погруженных в воду. Сравнение теоретических и экспериментальных результатов дало довольно хорошее согласование.

Задача о рассеянии двух тел, находящихся в первичном поле плоской волны, решалась в работе [23] путем учета многократного перерассеяния плоских волн между рассеивателями, что привело к интегральным уравнениям, позволяющим вычислять возмущенные амплитуды рассеяния через невозмущенные. Утверждается, что данный метод позволяет при наличии банка данных невозмущенных амплитуд рассеяния легко конструировать решение задач множественного рассеяния с произвольной конфигурацией рассеивателей, а не строить решение каждый раз заново, как при других подходах.

Рассеяние плоской звуковой волны на системе двух акустически проницаемых (жидких или жидкоподобных) или непроницаемых (жестких или мягких) сфер, расположенных на расстоянии друг от друга, когда одна из сфер имеет акустически малый радиус, изучалась в работе [49]. Задача решалась методом разделения переменных с помощью теорем трансляционного сложения для сферических волновых функций.

В работе [50] представлено обобщение математической модели [39] и методики расчета [17] на случай пары звуконепроницаемых сфер с произвольным акустическим импедансом и произвольно расположенным в пространстве монополюсным источником излучения. Проведены расчеты распределения давления вокруг двух жестких сфер при различных значениях расстояния между ними и расположениях монополюсного источника излучения. Показано, что при определенных параметрах возможно как повышение, так и понижение давления в рассмотренной системе.

Взаимодействие двух близких пузырьков в акустическом поле изучается в работе [51]. Моделирование осуществляется в рамках теории многократного рассеяния с использованием разложений по сферическим гармоникам и теоремы сложения. Получено точное характеристическое уравнение, обеспечивающее симметричный и антисимметричный резонансы двух пузырьков. Численные результаты показывают, что для описания акустического поля вокруг пузырьков требуется большое количество режимов вибрации.

2.3. Случай множества (ансамбля) сфер

В данном разделе представлены работы, посвященные исследованию рассеяния звука на системах, состоящих из множества сфер.

В работах [24, 25] показан вывод системы интегральных уравнений, которая определяет амплитуды многократного рассеяния для множества (двух и более) объектов в терминах соответствующих функций для изолированных объектов, при этом для двух малых объектов получаются «замкнутые формы», включающие дифференциальные операторы.

Метод связанных осцилляторов используется в работе [52] для описания коллективного акустического резонанса и рассеяния от множества пузырьков воздуха в воде. Задача рассеяния от множества объектов была разложена на задачу рассеяния от отдельных нормальных мод данного множества и проанализирована. Каждая мода обладала специфическими резонансными свойствами: «симметричные» моды, в которых пузырьки колеблются в фазе друг с другом, демонстрировали сдвиг в область низких частот и повышение затухания; «антисимметричные» моды, в которых некоторые или все пузырьки колеблются в противофазе, демонстрировали сдвиг в область высоких частот и уменьшение затухания. В последующей работе [53] для определения характеристик распространения пузырьковой воды применяется осреднение коллективного поведения симметричной моды по распределениям радиусов и местоположений пузырьков; данный метод учитывает все порядки многократного рассеяния и эффекты «экранирования» в среде. Получены новые теоретические выражения для фазовой скорости и затухания, которые сравниваются с экспериментальными данными [54, 55] путем интегрирования эффектов многократного рассеяния по так называемой области коллективного взаимодействия вокруг каждого пузырька.

Задача рассеяния акустического поля группой рассеивателей в работе [16] формулируется с помощью метода Т-матриц, а полученная система линейных уравнений решается с использованием многоуровневого быстрого мультиполюсного алгоритма (the multilevel fast multipole algorithm, MLFMA) и метода быстрых мультиполей (the fast multipole method, FMM). Точность методов оценивалась путем моделирования сферического рассеивателя, состоящего из множества маленьких сфер. Сравнение двух методов показало, что в целом MLFMA работает лучше, чем алгоритм FMM, однако, когда рассеиватели равномерно распределены по прямоугольной сетке, алгоритм FMM работает так же хорошо, как и MLFMA.

В работе [17] представлена численная техника разложения и повторного разложения мультиполей, основанная на методе Т-матриц, для решения задачи акустического рассеяния от множества звуконепроницаемых сфер с произвольным акустическим импедансом. Вычислительные эксперименты, проведенные с помощью данной техники и метода граничных элементов (в пакете программ СОМЕТ), показали, что предложенная в данной работе методика расчета достигает высокой точности получаемых результатов при минимальных затратах машинного времени. В частном случае, когда центры сфер расположены на одной оси, и задача может быть сведена к осесимметричной, получен более эффективный (по сравнению с общим случаем) алгоритм, использующий осесимметричные выражения для переразложения мультиполей. В последующей работе [56] представлено ускорение численной техники с помощью алгоритма FMM, представленного в [16], и быстрых рекурсивных алгоритмов и разложений для определения коэффициентов разложения по мультиполям, приведенных, например, в работе [57]. Представлены результаты модифицированной техники при решении тестовых задач для числа сфер $\sim 10^2 \div 10^4$ и различных значений волнового числа.

Теоретические исследования рассеяния плоской волны на множестве идеальных газовых сферических пузырьков в безграничной однородной жидкости проведены в работе [58] с помощью разложения решения по сферическим гармоникам. Показано, что в области низких частот данная теория сводится к монополюльному приближению. Численные сравнения между двумя представленными теориями показали, что приближение монополя хорошо подходит для исследований резонирующих пузырьков, даже когда пузырьки находятся близко друг к другу.

Теоретическая трактовка акустического рассеяния от облака пузырьков или других монополюльных рассеивателей как от скопления рассеивателей сферической формы представлена в работе [22]. Задача решается в рамках теории эффективной среды для случая скоплений сферической формы, где рассеянное поле раскладывается в ряд по функции Грина и осредняется в соответствии с теорией [13]. Получены явные выражения для амплитуды и поперечных сечений рассеяния, а также выражения в замкнутой форме для резонансной частоты и спектральной формы основной коллективной моды с использованием аналитических методов S-матрицы.

В работе [59] предлагается альтернативный подход к теории многократного рассеяния, в которой рассеянное отдельной частицей поле имеет

монополюльный, дипольный и ротационный типы рассеяния звука, а в работе [60] того же автора представлено решение для среднего звукового поля в средах, содержащих сферические частицы только с монополюльным типом рассеяния. Однако, данный подход из-за осреднения звукового поля, в отличие от традиционного, не позволяет определить давление в конкретной точке пространства, следовательно, такие эффекты, как повышение или понижение давления в некоторых зонах, не могут быть обнаружены.

Теоретическое выражение для силы акустического взаимодействия между мелкими сферическими частицами, взвешенными в идеальной жидкости, при воздействии внешней акустической волны, представлено в работе [61]. Под данной силой подразумевается часть силы акустического излучения на одну частицу, включающая рассеянные волны от других частиц. В приближении Рэлея силы акустического взаимодействия между частицами аппроксимируются градиентами потенциалов парного взаимодействия без каких-либо ограничений на расстояние между частицами. Данная теория применяется для изучения силы акустического взаимодействия на суспензии частиц как в стоячих, так и в бегущих плоских волнах.

Теоретическое и экспериментальное исследование генерации акустической гармоник второго порядка одним слоем пузырьков представлено в работе [62] с целью изучения взаимодействия между нелинейными эффектами и многократным рассеянием в данной системе. Показано, что модель, полученная с помощью метода возмущений для расчета генерации гармоник подобных структур, дает достаточно хорошее согласование с экспериментальными измерениями устойчивых, имеющих хорошие характеристики, образцов пузырьков экранов. Четко определена взаимосвязь между многократным рассеянием и нелинейностью, и показано существование оптимальной концентрации пузырьков, для которой уменьшение общего давления возбуждения из-за многократного рассеяния уравнивается количеством нелинейных источников.

В работе [63] обобщена численная техника разложения потенциала поля по мультиполям [17] на случай акустического рассеяния от множества звуконепроницаемых сфер с центрами, расположенными на одной оси, при прохождении сферической волны от монополюльного источника излучения, а в работе [64] — при падении плоской волны под произвольным углом к оси, соединяющей центры сфер. В последующей работе [65] был рассмотрен общий случай акустического рассеяния от множества зву-

копроницаемых сфер разных радиусов, произвольно расположенных в трехмерном пространстве, при воздействии акустическим полем. Проведена оптимизация алгоритма построения матрицы коэффициентов повторного разложения по мультиполям с целью минимизации используемого объема оперативной памяти. Диаграммы, построенные с помощью рассмотренного подхода к изучению рассеяния от множества сфер, в отличие от подходов, основанных на осредненных уравнениях, позволяют наглядно продемонстрировать картину распределения давления вне и внутри системы сфер, в том числе для определения зон повышения и понижения давления. Так, например, диаграммы распределения нормированного давления на расстоянии от рассеивающего слоя, представленные в работе [66] показали, что слой играет роль двумерной дифракционной решетки, имеющей различную степень прохождения акустических волн, которая зависит от соотношений физических параметров внешней и внутренней сред.

2.4. Определение числа членов ряда при усечении в методе разложения по сферическим функциям

В методе повторного разложения по мультиполям потенциалы раскладываются в ряды по специальным функциям, в результате решение сводится к бесконечномерной системе матричных уравнений. При численной реализации данного решения возникает вопрос правильного выбора числа членов n_{tr} при усечении полученных рядов, поскольку при малом числе n_{tr} точность расчетов будет низкой, а при большом — возрастут не только точность, но и объем памяти, необходимой для расчета, а также машинное время. В данном подразделе представим подходы к определению числа членов при усечении рядов.

Анализ научной литературы по данной проблематике показал, что можно выделить два подхода к определению числа n_{tr} .

Подход I: усечение рядов основывается на сравнении двух последовательных значений суммы искомого ряда (для n и $n + 1$ числа членов) — как только их абсолютная погрешность становится меньше некоторого фиксированного значения, дальнейшие вычисления прекращаются и принимается значение суммы ряда при $n_{tr} = n$ [36].

Подход II: происходит усечение всех рядов в каждом разложении при фиксированном числе n_{tr} , определяемом с помощью одной из эмпирических формул, выражения для которых далее будут приведены.

В работах [44, 67] при решении задачи рассея-

ния от одиночной сферы применялась следующая эмпирическая формула:

$$n_{tr} \approx [1 + ka + \alpha(ka)^{1/3}], \quad (1)$$

где $[z]$ — оператор, обозначающий целую часть числа z ; k — волновое число; a — радиус сферы; α — параметр, позволяющий контролировать точность расчета (в представленных работах $\alpha = 3$). Формула (1) была впервые получена в работе [68] для двумерного случая. В работе [44] это же значение числа n_{tr} применяется также для случая двух сфер одного радиуса, когда они расположены не слишком близко друг к другу или соприкасаются.

Оценки погрешности рядов при усечении для задач с одиночной сферой, представленные в работах [69, 70], позволили получить следующую эмпирическую формулу:

$$n_{tr} = [kd + \beta \log_{10}(kd + \pi)], \quad (2)$$

где d — расстояние от центра сферы до начала координат; β — параметр, позволяющий контролировать точность расчета. Последняя формула была модифицирована в работе [16] для задачи рассеяния группой сферических рассеивателей, где вместо параметра d брался параметр D — диаметр сферы, описывающей самую большую группу рассеивателей.

В работе [71] проведено сравнение формул (1) и (2) для различных значений параметров α и β . Показано, что лучшую аппроксимацию дает формула (1) с параметром $\alpha = 1.8 \left(\log_{10}(\varepsilon^{-1}) \right)^{2/3}$, где ε — требуемая погрешность искомой суммы ряда вследствие усечения. Данное выражение также предлагается использовать для больших значений ka в работе [56], а с подробным выводом можно ознакомиться, например, в книге [72].

В работе [48] для задачи двух сфер была применена эмпирическая формула

$$n_{tr} = \sup(8, [ka + 4(ka)^{1/3} + 1]),$$

полученная благодаря анализу проведенных в работах [73, 74] численных исследований. Численная проверка данной формулы показала, что такой порядок усечения обеспечивает семизначную точность вычислений для рассмотренной задачи рассеяния на двух сферах.

В работе [75] в случае рассеяния от множества объектов использовалась следующая эмпирическая формула:

$$n_{tr} = \left[ka_p + \left(\frac{\ln(2\sqrt{2}\pi ka_p \varepsilon^{-1})}{2\sqrt{2}} \right)^{\frac{2}{3}} (ka_p)^{\frac{1}{3}} + 1 \right], \quad (3)$$

где a_p — радиус p -го объекта. Вывод данной формулы представлен, например, в работах [76] (для одиночного рассеяния) и [77] (для множественного рассеяния).

При исследовании рассеяния от множества сфер в литературе (см., например, работы [17, 78]) использовалась также формула

$$n_{\text{tr}} = \begin{cases} [ekr_{pq}], & \text{для малых } k r_{pq}, \\ [ekr_{pq}/2], & \text{для больших } k r_{pq}, \end{cases} \quad (4)$$

где e — число Эйлера; r_{pq} — расстояние между центрами p -ой и q -ой сфер. В разложении по мультиполям используются сферические функции Ханкеля большого порядка вида $h_n(kr_{pq})$ (входят в матрицу перераспределения системы). Асимптотическое разложение данных функций при больших n и фиксированных kr_{pq} (см. справочник [79]) показывает, что их рост начинается при $n \approx ekr_{pq}/2$, это может привести к экспоненциальному росту части членов в разложении и, следовательно, к переполнению относительных ошибок. Поэтому данное значение и легло в основу формулы (4). Численный анализ, представленный в работах [64, 78], показал, что данная формула может быть использована как оценка верхней границы для определения числа усечения рядов n_{tr} .

Как правило, численный анализ эмпирических формул (3) и (4) сводится к определению искомой функции в зависимости от числа членов ряда при усечении только для нескольких расчетных точек. В работе [17] подобный анализ был проведен для обоснования формулы (4). А в работе [80] проведено сравнение результатов, полученных при выборе числа членов при усечении рядов по данным формулам, на примере одной расчетной точки, на основании чего делается вывод, что расчетная величина достигает устойчивого значения раньше при использовании формулы (3), и эта формула применяется в их дальнейших расчетах.

В работах [64, 78] для случая звукопроницаемых сфер проведено сравнение двух подходов к усечению рядов в разложении. Численный анализ показал, что для определения числа членов при усечении рядов, позволяющего вычислить искомую функцию с заданной точностью, оптимальным является применение комбинированного подхода. А именно, с помощью Подхода II по формулам (3) и (4) определяется минимальное значение n_{tr} . Затем, начиная с этой минимальной величины, применяется Подход I до достижения необходимой точности. Для предотвращения накопления ошибок, связанных с экспоненциальным ростом сферических функций Ханкеля большого порядка, необходимо контролировать результат при превышении

значений n_{tr} , полученных по формуле (4). В этом случае решение определяется в момент его стабилизации до начала экспоненциального роста, даже если заданная точность не достигнута.

3. Определение основных характеристик явления рассеяния

Для описания явления рассеяния традиционно вводится характеристика σ_s , называемая полным сечением рассеяния, величина которой определяется как отношение мощности рассеянной волны P_s к интенсивности падающей волны I_0 (см., например, [8, 9]), т.е. $\sigma_s = P_s/I_0$. Физический смысл величины σ_s — это площадь перпендикулярной потоку площадки (круга), попадая в которую налетающая частица испытывает рассеяние. В некоторых задачах рассматриваются также такие характеристики, как позиционное сечение рассеяния $\sigma(\theta, \varphi)$ (при рассмотрении интенсивности падающей волны в заданном направлении (θ, φ)) и сечение обратного рассеяния σ_L (при рассмотрении интенсивности рассеянной волны в направлении, противоположном падающей волне).

Впервые выражение полного сечения рассеяния для одиночного рассеивателя использовалось в классической работе [13]. В работе [32] получена формула для определения значения энергии рассеянной волны на идеальной жесткой сфере, что позволяет найти также и полное сечение рассеяния данной сферы. Расчеты показали, что в области, где диаметр сферы сравним с длиной волны, данная величина рассеяния является сложной функцией частоты, демонстрируя в некоторых случаях большие максимумы и минимумы.

Расчеты сечения рассеяния звука для воздушного пузырька в воде представлены в работе [81]. Показано, что помимо известного монопольного резонанса, существует большое число резонансов на более высоких частотах, которые меньше по величине, чем «гигантский» резонанс.

В работе [30] проведен численный анализ рассеянного поля вне сферы, заполненной пузырьками воздуха различных радиусов, имитирующей промышленные косяки пузырных рыб ограниченных размеров. Расчет сечения обратного рассеяния данной сферической (одиночной) области радиуса R в зависимости от волнового радиуса kR показал наличие глобального максимума, который обусловлен явлением резонанса системы вода–двухфазная область, аналогичного явлению резонанса воздушных пузырьков в жидкости; при дальнейшем увеличении kR имело место осцилляционное убывание, которое связано с характером интерференции волн, отраженных непосредственно от грани-

цы сферы и обогнувших ее, а также волн, прошедших внутрь сферы и вновь вышедших во внешнюю область; при $kR \rightarrow \infty$ величина обратного рассеяния выходит на асимптоту, которая определяется также, как и в случае плоской границы раздела вода–двухфазная среда [31]. В [30] также рассмотрена величина эффективного поперечного сечения поглощения сферической волны, анализ которой показал, что в случае реализации максимально возможного поглощения данная величина, как и величина обратного рассеяния, обратно пропорциональна $(kR)^2$ при $0 < kR \lesssim 1$.

Выражение сечения рассеяния на движущейся сфере малого радиуса a с постоянной скоростью, много меньшей скорости звука, получено в работе [34] для малых волновых радиусов ($ka \ll 1$) в приближении жесткой сферы. Показано, что в случае, когда звук распространяется по течению, интенсивность рассеянных полей уменьшается по сравнению с интенсивностью рассеянного поля на покоящейся сфере, а при распространении звука против течения — интенсивность увеличивается.

В работе [82] рассчитаны сечения рассеяния и поглощения резонансным газовым пузырьком в однородном жидком слое с учетом необратимых потерь энергии, которые вызывают силы пропорциональные скорости. Численно исследована зависимость сечений рассеяния и поглощения от потерь энергии. Получено, что сечение поглощения имеет максимум, который достигается при равенстве поглощенной и рассеянной мощности, а сечение рассеяния монотонно убывает.

Вывод формул для полного сечения рассеяния идеальной (звуконепроницаемой) и звукопроницаемой одиночных сфер при падении плоской волны представлен в работе [8]. Для идеальной сферы показано, что в случае малого волнового радиуса ($ka \ll 1$) полное сечение рассеяния малой мягкой сферы (когда рассеянное поле создается вследствие некоторого распределения нормальной скорости на ее поверхности) в четыре раза больше площади сечения сферы:

$$\sigma_s = 4\pi a^2,$$

тогда как сечение рассеяния малой жесткой сферы (когда рассеянное поле создается вследствие некоторого распределения давления на ее поверхности) во много раз меньше ее геометрического сечения пропорционально частоте в четвертой степени:

$$\sigma_s = \frac{7}{9}\pi a^2 (ka)^4,$$

что обуславливает усиление рассеяния в области высоких частот. А при рассеянии коротких волн ($ka \gg 1$) как для мягкой, так и для жесткой сфер,

полное сечение рассеяния равно удвоенной площади круга радиуса a :

$$\sigma_s = 2\pi a^2,$$

при этом для мягкой сферы оно в два раза меньше, чем на низких частотах. Для звукопроницаемой малой сферы при $ka \ll 1$ для окружающей среды и $k_1 a \ll 1$ для среды внутри сферы выражение полного сечения рассеяния принимает следующий вид:

$$\sigma_s = 4\pi a^2 \left[\left(\frac{1 - \chi_1/\chi}{3\chi_1/\chi} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1 - \rho_1/\rho}{1 + 2\rho_1/\rho} \right)^2 \right] (ka)^4,$$

где $\chi_1 = \rho_1 c_1^2$ — упругость вещества сферы; $\chi = \rho c^2$ — упругость окружающей среды; ρ и ρ_1 — плотность среды вне и внутри сферы; c и c_1 — скорость звука вне и внутри сферы. Последняя формула показывает, что рассеяние звука обладает следующими основными свойствами: если препятствие отличается от среды только сжимаемостью, т.е. $\rho_1 = \rho$, то рассеяние имеет монополярный тип; если только плотностью, т.е. $c_1 = c$, то — дипольный тип; сечение рассеяния пропорционально частоте в четвертой степени, что обуславливает увеличение рассеивающей способности препятствия с ростом частоты, т.е. обладает свойством рэлеевского рассеяния.

Формула для σ_s в случае звуконепроницаемой сферы с произвольным акустическим импедансом при падении сферической волны от монополярного источника излучения получена в работе [39]. Представлены численные расчеты зависимости данной характеристики от основных параметров системы (радиус и акустический импеданс сферы) для двух видов падающего поля (плоской волны и монополярного источника излучения). В работе [40] данная формула обобщена на случай звукопроницаемой одиночной сферы. Проведенный численный анализ влияния на данную характеристику таких физических параметров внешней и внутренней сред, как скорость звука c и плотность ρ при изменении значения волнового радиуса ka показал, что на рассеяние звуковой волны существенным образом влияет различие в скорости звука сред вне и внутри сферы, в то время как различие в плотности этих сред имеет несущественное значение.

Одной из первых работ, где исследовались характеристики рассеяния от пары сфер, является работа [19], в которой получено выражение сечения рассеяния для двух акустически жестких (или мягких) сфер одного и того же радиуса a при падении плоской волны с помощью теорем сложения для сферических волновых функций [83]. Показано, что в случае далеко расположенных друг

от друга сфер в рэлеевском приближении (при малом значении волнового числа ka) коэффициент рассеяния $\sigma_s / (2\pi a^2) \approx 8$ для акустически мягких сфер и $\sigma_s / (2\pi a^2) \approx 2(ka)^4 / 3$ для акустически жестких сфер.

Численные расчеты сечения обратного рассеяния и его аппроксимации на бесконечности приведены в работе [15] при исследовании системы двух сфер для различных краевых условий на поверхности сфер в зависимости от расстояния между сферами и геометрических углов.

В работе [20] представлены результаты расчетов поперечного сечения обратного рассеяния двух жестких сфер при $ka = 2$, которые согласуются с результатами работы [15]. Представлен также численный анализ функции формы (form function), определяемой как квадратный корень сечения обратного рассеяния, для пары взаимодействующих звуконепроницаемых сфер в широких частотных диапазонах (от среднечастотной до резонансной областей), а также в широком диапазоне расстояний между сферами (от очень близких, когда сферы соприкасались друг с другом, до достаточно удаленных). В частности получено, что при увеличении расстояния между сферами одного радиуса данная функция является удвоенной по сравнению с аналогичной функцией, вычисленной в случае одиночной сферы того же радиуса.

Результаты расчета интегрального сечения рассеяния плоской акустической волны на двух близко расположенных импедансных сферах представлены в работе [47]. Частотный анализ асимптотических случаев позволил выделить, при каких параметрах задачи необходим учет эффектов многократного рассеяния.

Эксперименты по определению обратного рассеяния звука от системы двух воздушных пузырьков в воде представлены в работе [41]. Получено хорошее согласование с результатами теоретических расчетов данной работы. Подтверждено, что многократное рассеяние вызывает колебательное поведение около уровня точного когерентного рассеяния с уменьшающейся амплитудой при увеличении расстояния между пузырьками. Для расстояния d между пузырьками примерно равном половине длины волны λ ($d \approx \lambda/2$) обратное рассеянное излучение достигает максимума, в то время как для $d < \lambda/2$ данное излучение существенно уменьшается благодаря интерференции волн.

Численные расчеты функции формы в дальнейшем поле для системы двух жестких сфер в зависимости от волнового радиуса ka представлены в работе [48] для различных расстояний между сферами. Также проведено сравнение функций формы для

двух сфер из нержавеющей стали в воде, полученных экспериментально и теоретически. Показано, что отклонения, обусловленные явлением интерференции, а также острые минимумы, соответствующие упругим резонансам, которые наблюдались в экспериментах, хорошо согласованы с теорией в случае бокового падения волны.

Численные расчеты сечения обратного рассеяния для простых кластеров из двух и трех пузырьков в различных конфигурациях и для разных углов падения плоской волны проведены в работе [58]. Получено, что для симметричных конфигураций взаимодействие между пузырьками приводит к понижению резонансной частоты кластера; для асимметричных конфигураций рассеяние порождает резкие резонансы на частотах, превышающих резонанс симметричной моды.

Аналитические выражения для сечений рассеяния (формфункции) системы, состоящей из двух сфер, одна из которых имеет акустически малый радиус, получены в работе [49]. С целью исследования влияния малой сферы на сечение рассеяния большой сферы приводятся и анализируются результаты расчетов по полученным формулам как для проницаемых, так и для непроницаемых сфер.

Выражение сечения рассеяния для системы из двух пузырьков было получено в работе [51] в приближении, что расстояние между центрами пузырьков меньше длины волны. Показано, что независимо от расстояния между двумя одинаковыми пузырьками поперечное сечение рассеяния имеет максимальное значение на частоте симметричной моды, в то время как резонанс на частоте антисимметричной моды не наблюдается. Однако утверждается, что усиление рассеяния, наблюдаемое вблизи симметричной резонансной частоты, связано с наличием антисимметричной моды.

Существующие работы по определению сечений рассеяния от множества (более двух) сфер ограничиваются рассмотрением предельных случаев. Так, в работе [22] представлена формула для полного сечения рассеяния для множества пузырьков в приближении

$$\left| \frac{4\pi n f_s^2}{k} \right| \ll 1,$$

где f_s — сила рассеяния отдельного рассеивателя (газового пузырька); n — объемная плотность рассеивателей в занимаемой ими области, которая является сферической радиуса R . Данное ограничение позволяет пренебречь обратным рассеянием между отдельными рассеивателями. В результате формула полного сечения рассеяния от системы пузырьков сводится к формуле σ_s для одиночной зву-

копроницаемой сферы радиуса R . Обоснованность данного подхода продемонстрирована на примере идеализированного сферического косяка рыб, имеющих плавательный пузырь.

4. Заключение

Представленный обзор научной литературы призван ознакомить с основными теоретическими методами решения задач акустического рассеяния волн от систем со сферическими рассеивателями и существующими экспериментальными работами по данной тематике, а также с анализом работ по теоретическому и численному определению основных характеристик явления рассеяния в решаемых задачах.

Подход, при котором вычисляется среднее значение рассеянного поля, позволяет рассматривать системы с большим числом случайно распределенных рассеивателей. Однако, из-за осреднения звукового поля при данном подходе нельзя определить давление в конкретной точке пространства, следовательно, такие эффекты, как повышение или понижение давления в некоторых зонах, не могут быть обнаружены. Второй подход позволяет найти решение в конкретной точке пространства, а значит и наглядно продемонстрировать полную картину распределения давления вне и внутри системы сфер, в том числе и для определения зон повышения и понижения давления. Однако, для большого числа сфер решение сводится к большим системам интегральных или алгебраических уравнений, что приводит к значительным затратам вычислительных ресурсов и процессорного времени. В рамках второго подхода предложен алгоритм построения вычислительного эксперимента, основанный на быстром методе мультиполей, адаптированный к задачам акустического рассеяния от множества сфер (см., например, [17] для звуконепроницаемых и [65] для звукопроницаемых сфер). Данная численная методика обеспечивает высокую точность результатов вычислительных экспериментов при минимальных затратах процессорного времени.

Анализ работ, в которых определяются основные характеристики явления рассеяния, такие как полное или сечение обратного рассеяния, применительно к задачам рассеяния акустических волн на сферах показал, что аналитические формулы и численные исследования ограничены случаями одиночной сферы или систем с двумя сферами. Следовательно, задача определения выражения для данных характеристик в общем случае для систем, состоящих из множества сфер в различных конфигурациях, сохраняет свою актуальность.

Список литературы

- [1] Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981. 280 с.
- [2] Сташкевич А.П. Акустика моря. Ленинград: Судостроение, 1966. 356 с.
- [3] Каллистратова М.А. Радиоакустическое зондирование атмосферы. Москва: Наука, 1985. 197 с.
- [4] Алешин Н.П., Щербинский В.Г. Радиационная, ультразвуковая и магнитная дефектоскопии металлоизделий. М.: Высшая школа, 1991. 271 с.
- [5] Хилл К. Применение ультразвука в медицине: Физические основы. М: Мир, 1989. 589 с.
- [6] Демин И.Ю., Прончатов–Рубцов Н.В. Современные акустические методы исследований в биологии и медицине / Учеб. метод. пособие. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. 121 с.
- [7] Технология создания позиционируемого 3D звука. <https://www.ixbt.com/multimedia/3dsound-tech.html> (accessed: 22.12.2021).
- [8] Гринченко В.Т., Вовк И.В., Мацыпура В.Т. Основы акустики. Киев: Наукова думка, 2009. 867 с.
- [9] Шендеров Е.Л. Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение. 1989. 304 с.
- [10] Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
- [11] Medwin H., Clay C.S. Fundamentals of Acoustical Oceanography. Academic Press, 1998. 739 p.
- [12] Морз Ф. Колебания и звук. М.: ГИТТЛ, 1949. 496 с.
- [13] Foldy L.L. The multiple scattering of waves. I. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers // Phys. Rev. 1945. V. 67. Pp. 107–109. DOI: 10.1103/PhysRev.67.107
- [14] Waterman P.C., Truell R. Multiple Scattering of Waves // Journal of Mathematical Physics. 1961. V. 2, No. 4. Pp. 512–537. DOI: 10.1063/1.1703737
- [15] Peterson B., Ström S. Matrix formulation of acoustic scattering from an arbitrary number of scatterers // J. Acoust. Soc. Am. 1974. V. 56, No. 3. Pp. 771–780. DOI: 10.1121/1.1903325
- [16] Koc S., Chew W.C. Calculation of acoustical scattering from a cluster of scatterers // J. Acoust. Soc. Am. 1998. V. 103, No. 2. Pp. 721–734. DOI: 10.1121/1.421231
- [17] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // J. Acoust. Soc. Am. 2002. V. 112, No. 6. Pp. 2688–2701. DOI: 10.1121/1.1517253
- [18] Марневская Л.А. К дифракции плоской скалярной волны на двух сферах // Акуст. журн. 1968. Т. 14, № 3. С. 427–434. http://www.akzh.ru/pdf/1968_3_427-434.pdf
- [19] Марневская Л.А. О рассеянии плоской волны на двух акустически жестких сферах // Акуст. журн. 1969. Т. 15, № 4. С. 579–583. http://www.akzh.ru/pdf/1969_4_579-583.pdf
- [20] Gaunard G.C., Huang H., Strifors H. Acoustic scattering by a pair of spheres // J. Acoust. Soc. Am. 1995. V. 98, No. 1. Pp. 495–507. DOI: 10.1121/1.414447
- [21] New R., Eisler T.J. Acoustic radiation from multiple spheres // Journal of Sound and Vibration. 1972. V. 22, No. 1. Pp. 1–17. DOI: 10.1016/0022-460x(72)90839-5
- [22] Hahn T.R. Low frequency sound scattering from spherical assemblages of bubbles using effective medium theory // J. Acoust. Soc. Am. 2007. V. 122, No. 6. Pp. 3252–3267. DOI: 10.1121/1.2793610

- [23] Шарфарец Б.П. Метод решения задач множественного рассеяния на нескольких телах в однородной безграничной среде // Акуст. журн. 2005. Т. 51, № 5. С. 672–681.
eLIBRARY ID: 9136307
- [24] Twersky V. Multiple Scattering of Waves and Optical Phenomena // Journal of the Optical Society of America. 1962. V. 52, No. 2. Pp. 145–171.
DOI: 10.1364/JOSA.52.000145
- [25] Twersky V. Multiple Scattering by Arbitrary Configurations in Three Dimensions // Journal of Mathematical Physics. 1962. V. 3, No. 1. Pp. 83–91.
DOI: 10.1063/1.1703791
- [26] Strutt J.W. (Lord Rayleigh) On the acoustic shadow of a sphere // Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A. 1904. V. 203. Pp. 87–99.
DOI: 10.1098/rsta.1904.0016
- [27] Стрэтт Дж.В. (Лорд Рэлей). Теория звука. В 2 т. М.: Гостехиздат, 1955. Т. 1. 503 с.; Т. 2. 475 с.
- [28] Wiener F.M. Sound Diffraction by Rigid Spheres and Circular Cylinders // J. Acoust. Soc. Am. 1947. V. 19, No. 3. Pp. 444–451.
DOI: 10.1121/1.1916501
- [29] Завтрак С.Т. Рассеяние звуковой волны на облаке газовых пузырьков // Акуст. журнал, 1988. Т. 34, № 1. С. 80–83.
http://www.akzh.ru/pdf/1988_1_80-83.pdf
- [30] Бабайлов Э.П., Дубов А.А., Каневский В.А. Рассеяние звука поглощающей сферой // Акуст. журн. 1991. Т. 37, № 5. С. 851–857.
http://www.akzh.ru/pdf/1991_5_851-857.pdf
- [31] Бабайлов Э.П., Дубов А.А. Отражение звука от скопления газовых пузырей в жидкости // Акуст. журн. 1989. Т. 35, № 5. С. 779–783.
http://www.akzh.ru/pdf/1989_5_779-783.pdf
- [32] Anderson V.C. Sound scattering from a fluid sphere // J. Acoust. Soc. Am. 1950. V. 22, No. 4. Pp. 426–431.
DOI: 10.1121/1.1906621
- [33] Буланов В.А., Бьорно Л. Рассеяние звука сферой с учетом поглощения энергии // Акуст. журн. 1992. Т. 38, № 2. С. 252–259.
http://www.akzh.ru/pdf/1992_2_252-259.pdf
- [34] Алексеев В.Н., Семенов А.Г. Рассеяние звука движущейся сферой // Акуст. журн. 1992. Т. 38, № 5. С. 789–797.
http://www.akzh.ru/pdf/1992_5_789-797.pdf
- [35] Аббасов И.Б., Заграй Н.П. Рассеяние взаимодействующих плоских акустических волн на сфере // Акуст. журн. 1994, Т. 40, № 4. С. 535–541.
eLIBRARY ID: 25627549
- [36] Duda R.O., Martens W.L. Range dependence of the response of a spherical head model // J. Acoust. Soc. Am. 1998. V. 104, No. 5. Pp. 3048–3058.
DOI: 10.1121/1.423886
- [37] Ainslie M.A., Leighton T.G. Review of scattering and extinction cross-sections, damping factors, and resonance frequencies of a spherical gas bubble // J. Acoust. Soc. Am. 2011. V. 130, No. 5. Pp. 3184–3208.
DOI: 10.1121/1.3628321
- [38] Анненкова Е.А., Цысарь С.А., Сапожников О.А. Построение ультразвуковых изображений мягких сферических рассеивателей // Акуст. журн. 2016. Т. 62, № 2. С. 167–177.
DOI: 10.7868/S0320791916020027
- [39] Насибуллаева Э.Ш. Исследование рассеяния от звукопроницаемой одиночной сферы при внешнем воздействии // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2017. Т. 12, № 1. С. 73–82.
DOI: 10.21662/uim2017.1.011
- [40] Насибуллаева Э.Ш. Исследование акустического рассеяния от одиночной звукопроницаемой сферы // Многофазные системы. 2018. Т. 13, № 4. С. 79–91.
DOI: 10.21662/mfs2018.4.012
- [41] Kapodistrias G., Dahl P.H. Effects of interaction between two bubble scatterers // J. Acoust. Soc. Am. 2000. V. 107, No. 6. Pp. 3006–3017.
DOI: 10.1121/1.429330
- [42] Zhou C.-C., Li W.-D., Dai W.-Sh. Acoustic scattering theory without large-distance asymptotics // J. Phys. Commun. 2018. V. 2, No. 4. Pp. 041002-1–041002-11.
DOI: 10.1088/2399-6528/aabb38
- [43] Embleton T.F.W. Mutual Interaction between Two Spheres in a Plane Sound Field // J. Acoust. Soc. Am. 1962. V. 34, No. 11. Pp. 1714–1720.
DOI: 10.1121/1.1909104
- [44] Bruning J.H., Lo Y.T. Multiple scattering by spheres. UIUC EM Lab Technical Report, 1969. 169 p.
- [45] Friedman B., Russek J. Addition theorems for spherical waves // Quarterly of Applied Mathematics. 1954. V. 12, No. 1. Pp. 13–23.
DOI: 10.1090/qam/60649
- [46] Sack R.A. Three-Dimensional Addition Theorem for Arbitrary Functions Involving Expansions in Spherical Harmonics // Journal of Mathematical Physics. 1964. V. 5, No. 2. Pp. 252–259.
DOI: 10.1063/1.1704115
- [47] Лебедев А.В., Хилько А.И. Интегральный поперечник рассеяния плоской акустической волны на двух близко расположенных импедансных сферах // Акуст. журн. 1997. Т. 43, № 5. С. 661–667.
http://www.akzh.ru/pdf/1997_5_661-667.pdf
- [48] Gabrielli P., Mercier-Finidori M. Acoustic Scattering by Two Spheres: Multiple Scattering and Symmetry Considerations // J. of Sound and Vibration. 2001. V. 241, No. 3. Pp. 423–439.
DOI: 10.1006/jsvi.2000.3309
- [49] Румелиотис Д.А., Котсис А.Д. Рассеяние звуковых волн на двух сферических телах, одно из которых имеет малый радиус // Акуст. журн. 2007. Т. 53, № 1. С. 38–49.
eLIBRARY ID: 9441413
- [50] Насибуллаева Э.Ш. Исследование акустического рассеяния от пары звукопроницаемых сфер при внешнем воздействии // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 1. С. 44–51.
DOI: 10.21662/mfs2019.1.006
- [51] Valier-Brasier T., Conoir J.-M. Resonant acoustic scattering by two spherical bubbles // J. Acoust. Soc. Am. 2019. V. 145, No. 1. Pp. 301–311.
DOI: 10.1121/1.5087556
- [52] Feuillade C. Scattering from collective modes of air bubbles in water and the physical mechanism of superresonances // J. Acoust. Soc. Am. 1995. V. 98, No. 2. Pp. 1178–1190.
DOI: 10.1121/1.413616
- [53] Feuillade C. The attenuation and dispersion of sound in water containing multiply interacting air bubbles // J. Acoust. Soc. Am. 1996. V. 99, No. 6. Pp. 3412–3430.
DOI: 10.1121/1.415216
- [54] Silberman E. Sound Velocity and Attenuation in Bubbly Mixtures Measured in Standing Wave Tubes // J. Acoust. Soc. Am. 1957. V. 29, No. 8. Pp. 925–933.
DOI: 10.1121/1.1909101
- [55] Fox F.E. Phase Velocity and Absorption Measurements in Water Containing Air Bubbles // J. Acoust. Soc. Am. 1955. V. 27, No. 3. Pp. 534–539.
DOI: 10.1121/1.1907955
- [56] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from clusters of spheres using the fast multipole method // J. Acoust. Soc. Am. 2005. V. 117, No. 4. Pp. 1744–1761.
DOI: 10.1121/1.1853017

- [57] Gumerov N.A., Duraiswami R. Recursions for the computation of multipole translation and rotation coefficients for the 3-D Helmholtz equation // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2003. V. 25, No. 4. Pp. 1344–1381.
DOI: [10.1137/s1064827501399705](https://doi.org/10.1137/s1064827501399705)
- [58] Skaropoulos N.C., Yagridou H.D., Chrissoulidis D.P. Interactive resonant scattering by a cluster of air bubbles in water // *J. Acoust. Soc. Am.* 2003. V. 113, No. 6. Pp. 3001–3011.
DOI: [10.1121/1.1572141](https://doi.org/10.1121/1.1572141)
- [59] Кобелев Ю.А. К теории многократного рассеяния звуковых волн на сферических частицах в жидких и упругих средах // *Акуст. журн.* 2011. Т. 57, № 4. С. 443–449.
eLIBRARY ID: [16525802](https://elibrary.ru/16525802)
- [60] Кобелев Ю.А. Многократное рассеяние монопольного типа звуковых волн на сферических частицах в жидких и упругих средах // *Акуст. журн.* 2011. Т. 57, № 6. С. 731–740.
eLIBRARY ID: [16525802](https://elibrary.ru/16525802)
- [61] Silva G.T., Bruus H. Acoustic interaction forces between small particles in an ideal fluid // *Phys. Rev. E*. 2014. V. 90, No. 6. Pp. 063007-1–063007-11.
DOI: [10.1103/PhysRevE.90.063007](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.90.063007)
- [62] Lombard O., Barrière C., Leroy V. Nonlinear multiple scattering of acoustic waves by a layer of bubbles // *Europhysics Letters*, 2015. V. 112, No. 2. Pp. 24002-p1–24002-p6.
DOI: [10.1209/0295-5075/112/24002](https://doi.org/10.1209/0295-5075/112/24002)
- [63] Насибуллаева Э.Ш. Численный анализ акустического рассеяния от звукопроницаемых сфер при внешнем воздействии // *Вестник УГАТУ*. 2021. Т. 25, № 2(92). С. 93–101.
DOI: [10.54708/19926502_2021_2529293](https://doi.org/10.54708/19926502_2021_2529293)
- [64] Насибуллаева Э.Ш. Численное моделирование акустического рассеяния от коаксиальных звукопроницаемых сфер // *Многофазные системы*. 2019. Т. 14, № 2. С. 115–124.
DOI: [10.21662/mfs2019.2.016](https://doi.org/10.21662/mfs2019.2.016)
- [65] Насибуллаева Э.Ш. Моделирование акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер в трехмерном пространстве // *Вычислительные технологии*. 2022. Т. 27, № 2. С. 19–36.
DOI: [10.25743/ICT.2022.27.2.003](https://doi.org/10.25743/ICT.2022.27.2.003)
- [66] Насибуллаева Э.Ш. Численный анализ акустического рассеяния от слоя звукопроницаемых сфер // *Многофазные системы*. 2021. Т. 16, № 2. С. 50–57.
DOI: [10.21662/mfs2021.2.008](https://doi.org/10.21662/mfs2021.2.008)
- [67] Senior T.B.A., Goodrich R.F. Scattering by a sphere // *PROC. IEE*. 1964. V. 111, No. 5. Pp. 907–916.
DOI: [10.1049/piee.1964.0145](https://doi.org/10.1049/piee.1964.0145)
- [68] Rokhlin V. Sparse diagonal forms for translation operations for the Helmholtz Equation in two dimensions. Dept. Comput. Sci. Yale Univ., New Haven, CT, Res. Rep. YALEU/DCS/RR-1095, 1995.
- [69] Koc S., Song J., Chew W.C. Error Analysis for the Numerical Evaluation of the Diagonal Forms of the Scalar Spherical Addition Theorem // *SIAM J. Numer. Anal.* 1999. V. 36, No. 3. Pp. 906–921.
DOI: [10.1137/s0036142997328111](https://doi.org/10.1137/s0036142997328111)
- [70] Darve E. The Fast Multipole Method I: Error Analysis and Asymptotic Complexity // *SIAM J. Numer. Anal.* 2000. V. 38, No. 1. Pp. 98–128.
DOI: [10.1137/S0036142999330379](https://doi.org/10.1137/S0036142999330379)
- [71] Song J., Chew W.C. Error Analysis for the Truncation of Multipole Expansion of Vector Green's Functions // *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*. 2001. V. 11, No. 7. Pp. 311–313.
DOI: [10.1109/7260.933781](https://doi.org/10.1109/7260.933781)
- [72] Gumerov N.A., Duraiswami R. *Fast Multipole Methods for the Helmholtz Equation in Three Dimensions*. Elsevier, 2004. 520 p.
DOI: [10.1016/b978-0-08-044371-3.x5000-5](https://doi.org/10.1016/b978-0-08-044371-3.x5000-5)
- [73] Young J.W., Bertrand J.C. Multiple scattering by two cylinders // *J. Acoust. Soc. Am.* 1975. V. 58, No. 6. Pp. 1190–1195.
DOI: [10.1121/1.380792](https://doi.org/10.1121/1.380792)
- [74] Nussenzweig H.M. *Diffraction Effects in Semiclassical Scattering*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 238 p.
DOI: [10.1017/CBO9780511599903](https://doi.org/10.1017/CBO9780511599903)
- [75] Antoine X., Chniti C., Ramdani K. On the numerical approximation of high-frequency acoustic multiple scattering problems by circular cylinders // *J. Comput. Phys.* 2008. V. 227, No. 3. Pp. 1754–1771.
DOI: [10.1016/j.jcp.2007.09.030](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.09.030)
- [76] Chew W.C., Jin J.M., Michielssen E., Song J. *Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics*. Artech House/Antennas and Propagation Library, Norwood, 2001. 932 p.
- [77] Carayol Q., Collino F. Error estimates in the fast multipole method for scattering problems. Part 1: Truncation of the Jacobi–Anger series // *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. 2004. V. 38, No. 2. Pp. 371–394.
DOI: [10.1051/m2an:2004017](https://doi.org/10.1051/m2an:2004017)
- [78] Насибуллаева Э.Ш. Определение числа членов при усечении рядов для численного решения задачи акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер // *Многофазные системы*. 2020. Т. 15, № 3–4. С. 176–182.
DOI: [10.21662/mfs2020.3.128](https://doi.org/10.21662/mfs2020.3.128)
- [79] Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. Москва: Наука, 1974. 832 с.
- [80] Amamou M.L. A theoretical and numerical resolution of an acoustic multiple scattering problem in three-dimensional case // *Acoustical Physics*. 2016. V. 62, No. 3. Pp. 280–291.
DOI: [10.1134/S1063771016030015](https://doi.org/10.1134/S1063771016030015)
- [81] Sage K.A., George J., Überall H. Multipole resonances in sound scattering from gas bubbles in a liquid // *J. Acoust. Soc. Am.* 1979. V. 65, No. 6. Pp. 1413–1422.
DOI: [10.1121/1.2016503](https://doi.org/10.1121/1.2016503)
- [82] Лапин А.Д. Резонансное рассеяние звука пузырьком газа в жидком слое // *Акуст. журн.* 1998. Т. 44, № 3. С. 426–427.
http://www.akzh.ru/pdf/1998_3_426-427.pdf
- [83] Иванов Е.А. *Дифракция электромагнитных волн на двух телах*. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.



Scattering of sound waves on spheres: methods and main characteristics (review)

Nasibullaeva E.Sh.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

The investigation of the sound wave scattering phenomenon on small-sized inhomogeneities is important both for studying the fundamental nature of this phenomenon and from a practical point of view, since many applications of acoustic waves are based on scattering phenomenon, such as sonar, sounding of the atmosphere and ocean, non-destructive testing devices, creation of a positioned 3D sound, etc. In many systems under consideration, obstacles are spherical (or can be considered as such). Present review is devoted to the analysis of the main works on theoretical methods for solving problems of acoustic wave scattering on spheres and determining the main characteristics of this phenomenon, as well as on existing experimental works. Two theoretical approaches to solving the presented problem can be distinguished. In the first approach, it is assumed that the distribution of scatterers is random, and the average value of the scattered field is calculated. In the second approach, which is given the main attention in this paper, the solution is reduced to large system of integral or linear algebraic equations using various methods, such as the T-matrix method, addition theorems for spherical functions, Green's functions, integral equations. The first approach allows one to consider systems with a large number of randomly distributed particles, however, due to the averaging of the sound field, it is impossible to determine the pressure at a specific point in space. The second approach makes it possible to determine the zones of increasing and decreasing pressure, however, for a large number of spheres, the solution requires significant computing resources and processor time. The analysis of scientific papers that define the main characteristics of the scattering phenomenon, such as the total or back scattering cross-section, has shown that analytical formulas and numerical studies are limited to the cases of a single sphere or systems with two spheres. Thus the problem of determining the formulae for these characteristics in the general case remains unsolved and is relevant.

Keywords: acoustic scattering, soundproof sphere, sound-permeable sphere, sound field, total scattering cross-section, theoretical methods, experiment

References

- [1] Ishimaru A. Wave Propagation Scattering in Random Media, 1st Edition. New York: Academic Press, 1978. 272 p.
- [2] Stashkevich A.P. [Acoustics of the sea] *Akustika morya*. Leningrad: Sudostroenie, 1966. 356 p. (in Russian).
- [3] Kallistratova M.A. [Radio-acoustic sounding of the atmosphere] *Radioakusticheskoe zondirovanie atmosfery*. Moscow: Nauka, 1985. 197 p. (in Russian).
- [4] Alyoshin N.P., Shcherbinsky V.G. [Radiation, ultrasonic and magnetic flaw detection of metal products] *Radiacionnaya, ul'trazvukovaya i magnitnaya defektoskopiya metalloizdelij*. Moscow: Vysshaya Shkola, 1991. 271 p. (in Russian).
- [5] Physical principles of medical ultrasonics / Eds.: C.R. Hill. Chichester: Ellis Horwood Ltd, 1986. 494 p.
- [6] Demin I.Yu., Pronchatov–Rubtsov N.V. [Modern acoustic research methods in biology and medicine] *Sovremennye akusticheskie metody issledovaniy v biologii i medicine / Educational methodological manual*. Nizhny Novgorod: Izdatel'stvo NNGU, 2007. 121 p. (in Russian).
- [7] Technology for creating positioned 3D sound. <https://www.ixbt.com/multimedia/3dsound-tech.html> (accessed: 22.12.2021).
- [8] Grinchenko V.T., Vovk I.V., Macypura V.T. [Basics of acoustics] *Osnovy akustiki*. Kiev: Naukova Dumka, 2009. 867 p. (in Russian).
- [9] Shenderov E.L. [Radiation and scattering sound] *Izluchenie i rasseyaniye zvuka*. Leningrad: Sudostroenie. 1989. 304 p. (in Russian).
- [10] Isakovich M.A. [General acoustics] *Obshchaya akustika*. Moscow: Nauka, 1973. 496 p. (in Russian).

- [11] Medwin H., Clay C.S. *Fundamentals of Acoustical Oceanography*. Academic Press, 1998. 739 p.
- [12] Morse P.M. *Vibration and Sound*, second edition. New York and London: McGraw-Hill Book Co., Inc., 1948. 468 p.
- [13] Foldy L.L. The multiple scattering of waves. I. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers. *Phys. Rev.* 1945. V. 67. Pp. 107–109.
DOI: [10.1103/PhysRev.67.107](https://doi.org/10.1103/PhysRev.67.107)
- [14] Waterman P.C., Truell R. Multiple Scattering of Waves. *Journal of Mathematical Physics*. 1961. V. 2, No. 4. Pp. 512–537.
DOI: [10.1063/1.1703737](https://doi.org/10.1063/1.1703737)
- [15] Peterson B., Ström S. Matrix formulation of acoustic scattering from an arbitrary number of scatterers. *J. Acoust. Soc. Am.* 1974. V. 56, No. 3. Pp. 771–780.
DOI: [10.1121/1.1903325](https://doi.org/10.1121/1.1903325)
- [16] Koc S., Chew W.C. Calculation of acoustical scattering from a cluster of scatterers. *J. Acoust. Soc. Am.* 1998. V. 103, No. 2. Pp. 721–734.
DOI: [10.1121/1.421231](https://doi.org/10.1121/1.421231)
- [17] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion. *J. Acoust. Soc. Am.* 2002. V. 112, No. 6. Pp. 2688–2701.
DOI: [10.1121/1.1517253](https://doi.org/10.1121/1.1517253)
- [18] Marnevskaia L.A. [On diffraction of a plane scalar wave on two spheres]. *Akusticheskij Zhurnal* [Acoustic Journal]. 1968. V. 14, No. 3. Pp. 427–434 (in Russian).
http://www.akzh.ru/pdf/1968_3_427-434.pdf
- [19] Marnevskaia L.A. [To scattering of a plane wave on two acoustic rigid spheres]. *Akusticheskij Zhurnal* [Acoustic Journal]. 1969. V. 15, No. 4. Pp. 579–583 (in Russian).
http://www.akzh.ru/pdf/1969_4_579-583.pdf
- [20] Gaunard G.C., Huang H., Strifors H. Acoustic scattering by a pair spheres. *J. Acoust. Soc. Am.* 1995. V. 98, No. 1. Pp. 495–507.
DOI: [10.1121/1.414447](https://doi.org/10.1121/1.414447)
- [21] New R., Eisler T.J. Acoustic radiation from multiple spheres. *Journal of Sound and Vibration*. 1972. V. 22, No. 1. Pp. 1–17.
DOI: [10.1016/0022-460x\(72\)90839-5](https://doi.org/10.1016/0022-460x(72)90839-5)
- [22] Hahn T.R. Low frequency sound scattering from spherical assemblages of bubbles using effective medium theory. *J. Acoust. Soc. Am.* 2007. V. 122, No. 6. Pp. 3252–3267.
DOI: [10.1121/1.2793610](https://doi.org/10.1121/1.2793610)
- [23] Sharfaret B.P. Method for solving the problems of multiple scattering by several bodies in a homogeneous unbounded medium. *Acoustical Physics*. 2005. V. 51, No. 5. Pp. 578–586.
DOI: [10.1134/1.2042578](https://doi.org/10.1134/1.2042578)
- [24] Twersky V. Multiple Scattering of Waves and Optical Phenomena. *Journal of the Optical Society of America*. 1962. V. 52, No. 2. Pp. 145–171.
DOI: [10.1364/JOSA.52.000145](https://doi.org/10.1364/JOSA.52.000145)
- [25] Twersky V. Multiple Scattering by Arbitrary Configurations in Three Dimensions. *Journal of Mathematical Physics*. 1962. V. 3, No. 1. Pp. 83–91.
DOI: [10.1063/1.1703791](https://doi.org/10.1063/1.1703791)
- [26] Strutt J.W. (Lord Rayleigh) On the acoustic shadow of a sphere. *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*. 1904. V. 203. Pp. 87–99.
DOI: [10.1098/rsta.1904.0016](https://doi.org/10.1098/rsta.1904.0016)
- [27] Strutt J.W. (Lord Rayleigh) *The Theory of Sound*, 2nd ed. Vols. 1 and 2. New York: Dover, 1945.
- [28] Wiener F.M. Sound Diffraction by Rigid Spheres and Circular Cylinders. *J. Acoust. Soc. Am.* 1947. V. 19, No. 3. Pp. 444–451.
DOI: [10.1121/1.1916501](https://doi.org/10.1121/1.1916501)
- [29] Zavtrak S.T. [Sound wave scattering on a cloud of gas bubbles]. *Akusticheskij Zhurnal* [Acoustic Journal]. 1988. V. 34, No. 1. Pp. 80–83 (in Russian).
http://www.akzh.ru/pdf/1988_1_80-83.pdf
- [30] Babaylov E.P., Dubov A.A., Kanevskii V.A. [Sound scattering by an absorbing sphere]. *Akusticheskij Zhurnal* [Acoustic Journal]. 1991. V. 37, No. 5. Pp. 851–857 (in Russian).
http://www.akzh.ru/pdf/1991_5_851-857.pdf
- [31] Babailov E.P., Dubov A.A. [Sound reflection from gas bubble groupings in a liquid]. *Akusticheskij Zhurnal* [Acoustic Journal]. 1989. V. 35, No. 5. Pp. 779–783 (in Russian).
http://www.akzh.ru/pdf/1989_5_779-783.pdf
- [32] Anderson V.C. Sound scattering from a fluid sphere. *J. Acoust. Soc. Am.* 1950. V. 22, No. 4. Pp. 426–431.
DOI: [10.1121/1.1906621](https://doi.org/10.1121/1.1906621)
- [33] Bulanov V.A., Bjorno L. [Sound scattering on a sphere taking account of the energy absorption]. *Akusticheskij Zhurnal* [Acoustic Journal]. 1992. V. 38, No. 2. Pp. 252–259 (in Russian).
http://www.akzh.ru/pdf/1992_2_252-259.pdf
- [34] Alexeev V.N., Semyonov A.G. [Sound scattering by moving sphere]. *Akusticheskij Zhurnal* [Acoustic Journal]. 1992. V. 38, No. 5. Pp. 789–797 (in Russian).
http://www.akzh.ru/pdf/1992_5_789-797.pdf
- [35] Abbasov I.B., Zagrai N.P. [Scattering of Interacting Plane Waves by a Sphere]. *Akusticheskij Zhurnal* [Acoustic Journal]. 1994. V. 40, No. 4. Pp. 535–541 (in Russian).
eLIBRARY ID: 25627549
- [36] Duda R.O., Martens W.L. Range dependence of the response of a spherical head model. *J. Acoust. Soc. Am.* 1998. V. 104, No. 5. Pp. 3048–3058.
DOI: [10.1121/1.423886](https://doi.org/10.1121/1.423886)
- [37] Ainslie M.A., Leighton T.G. Review of scattering and extinction cross-sections, damping factors, and resonance frequencies of a spherical gas bubble. *J. Acoust. Soc. Am.* 2011. V. 130, No. 5. Pp. 3184–3208.
DOI: [10.1121/1.3628321](https://doi.org/10.1121/1.3628321)
- [38] Annenkova E.A., Tsysar' S.A., Sapozhnikov O.A. Constructing ultrasonic images of soft spherical scatterers. *Acoustical Physics*. 2016. V. 62, No. 2. Pp. 169–178.
DOI: [10.1134/S1063771016020020](https://doi.org/10.1134/S1063771016020020)
- [39] Nasibullaeva E.Sh. [Investigation of scattering from sound-proof single sphere under external influence]. *Trudy Instituta mexaniki im. R.R. Mavlyutova Ufimskogo nauchnogo centra RAN* [Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics]. 2017. V. 12, No. 1. Pp. 73–82 (in Russian).
DOI: [10.21662/uim2017.1.011](https://doi.org/10.21662/uim2017.1.011)
- [40] Nasibullaeva E.Sh. [The study of acoustic scattering from a single sound-permeable sphere]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2018. V. 13, No. 4. Pp. 79–91 (in Russian).
DOI: [10.21662/mfs2018.4.012](https://doi.org/10.21662/mfs2018.4.012)
- [41] Kapodistrias G., Dahl P.H. Effects of interaction between two bubble scatterers. *J. Acoust. Soc. Am.* 2000. V. 107, No. 6. Pp. 3006–3017.
DOI: [10.1121/1.429330](https://doi.org/10.1121/1.429330)
- [42] Zhou C.-C., Li W.-D., Dai W.-Sh. Acoustic scattering theory without large-distance asymptotics. *J. Phys. Commun.* 2018. V. 2, No. 4. Pp. 041002-1–041002-11.
DOI: [10.1088/2399-6528/aabb38](https://doi.org/10.1088/2399-6528/aabb38)
- [43] Embleton T.F.W. Mutual Interaction between Two Spheres in a Plane Sound Field. *J. Acoust. Soc. Am.* 1962. V. 34, No. 11. Pp. 1714–1720.
DOI: [10.1121/1.1909104](https://doi.org/10.1121/1.1909104)
- [44] Bruning J.H., Lo Y.T. Multiple scattering by spheres. UIUC EM Lab Technical Report, 1969. 169 p.
- [45] Friedman B., Russek J. Addition theorems for spherical waves. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1954. V. 12, No. 1. Pp. 13–23.
DOI: [10.1090/qam/60649](https://doi.org/10.1090/qam/60649)

- [46] Sack R.A. Three-Dimensional Addition Theorem for Arbitrary Functions Involving Expansions in Spherical Harmonics. *Journal of Mathematical Physics*. 1964. V. 5, No. 2. Pp. 252–259. DOI: [10.1063/1.1704115](https://doi.org/10.1063/1.1704115)
- [47] Lebedev A.V., Hil'ko A.I. [The Integral Scattering Cross-Section of a Plane Acoustic Wave from Two Dose Impedance Spheres]. *Akusticheskij Zhurnal* [Acoustic Journal]. 1997. V. 43, No. 5. Pp. 661–667 (in Russian). http://www.akzh.ru/pdf/1997_5_661-667.pdf
- [48] Gabrielli P., Mercier-Finidori M. Acoustic Scattering by Two Spheres: Multiple Scattering and Symmetry Considerations // *J. of Sound and Vibration*. 2001. V. 241, No. 3. Pp. 423–439. DOI: [10.1006/jsvi.2000.3309](https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3309)
- [49] Roumeliotis J.A., Kotsis A.D. Acoustic scattering from two spheres, one with a small radius. *Acoustical Physics*. 2007. V. 53, No. 1. Pp. 33–43. DOI: [10.1134/S1063771007010046](https://doi.org/10.1134/S1063771007010046)
- [50] Nasibullaeva E.Sh. [Investigation of acoustic scattering from a pair soundproof spheres under external influence]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2019. V. 14, No. 1. Pp. 44–51 (in Russian). DOI: [10.21662/mfs2019.1.006](https://doi.org/10.21662/mfs2019.1.006)
- [51] Valier-Brasier T., Conoir J.-M. Resonant acoustic scattering by two spherical bubbles. *J. Acoust. Soc. Am.* 2019. V. 145, No. 1. Pp. 301–311. DOI: [10.1121/1.5087556](https://doi.org/10.1121/1.5087556)
- [52] Feuillade C. Scattering from collective modes of air bubbles in water and the physical mechanism of superresonances. *J. Acoust. Soc. Am.* 1995. V. 98, No. 2. Pp. 1178–1190. DOI: [10.1121/1.413616](https://doi.org/10.1121/1.413616)
- [53] Feuillade C. The attenuation and dispersion of sound in water containing multiply interacting air bubbles. *J. Acoust. Soc. Am.* 1996. V. 99, No. 6. Pp. 3412–3430. DOI: [10.1121/1.415216](https://doi.org/10.1121/1.415216)
- [54] Silberman E. Sound Velocity and Attenuation in Bubbly Mixtures Measured in Standing Wave Tubes. *J. Acoust. Soc. Am.* 1957. V. 29, No. 8. Pp. 925–933. DOI: [10.1121/1.1909101](https://doi.org/10.1121/1.1909101)
- [55] Fox F.E. Phase Velocity and Absorption Measurements in Water Containing Air Bubbles. *J. Acoust. Soc. Am.* 1955. V. 27, No. 3. Pp. 534–539. DOI: [10.1121/1.1907955](https://doi.org/10.1121/1.1907955)
- [56] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from clusters of spheres using the fast multipole method. *J. Acoust. Soc. Am.* 2005. V. 117, No. 4. Pp. 1744–1761. DOI: [10.1121/1.1853017](https://doi.org/10.1121/1.1853017)
- [57] Gumerov N.A., Duraiswami R. Recursions for the computation of multipole translation and rotation coefficients for the 3-D Helmholtz equation. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2003. V. 25, No. 4. Pp. 1344–1381. DOI: [10.1137/s1064827501399705](https://doi.org/10.1137/s1064827501399705)
- [58] Skaropoulos N.C., Yagridou H.D., Chrissoulidis D.P. Interactive resonant scattering by a cluster of air bubbles in water. *J. Acoust. Soc. Am.* 2003. V. 113, No. 6. Pp. 3001–3011. DOI: [10.1121/1.1572141](https://doi.org/10.1121/1.1572141)
- [59] Kobelev Yu.A. On the theory of multiple scattering of sound waves by spherical particles in liquid and elastic media. *Acoustical Physics*. 2011. V. 57, No. 4. Pp. 447–453. DOI: [10.1134/S1063771011040129](https://doi.org/10.1134/S1063771011040129)
- [60] Kobelev Yu.A. Multiple monopole scattering of sound waves from spherical particles in liquid and elastic media. *Acoustical Physics*. 2011. V. 57, No. 6. Pp. 749–758. DOI: [10.1134/S1063771011050095](https://doi.org/10.1134/S1063771011050095)
- [61] Silva G.T., Bruus H. Acoustic interaction forces between small particles in an ideal fluid. *Phys. Rev. E*. 2014. V. 90, No. 6. Pp. 063007-1–063007-11. DOI: [10.1103/PhysRevE.90.063007](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.90.063007)
- [62] Lombard O., Barrière C., Leroy V. Nonlinear multiple scattering of acoustic waves by a layer of bubbles. *Europhysics Letters*, 2015. V. 112, No. 2. Pp. 24002-p1–24002-p6. DOI: [10.1209/0295-5075/112/24002](https://doi.org/10.1209/0295-5075/112/24002)
- [63] Nasibullaeva E.Sh. [Numerical analysis of acoustic scattering from sound-permeable spheres under external influence]. *Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University)* [Vestnik UGATU]. 2021. V. 25, No. 2(92). Pp. 93–101 (in Russian). DOI: [10.54708/19926502_2021_2529293](https://doi.org/10.54708/19926502_2021_2529293)
- [64] Nasibullaeva E.Sh. [Numerical simulation of acoustic scattering from coaxial sound-penetrable spheres]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2019. V. 14, No. 2. Pp. 115–124 (in Russian). DOI: [10.21662/mfs2019.2.016](https://doi.org/10.21662/mfs2019.2.016)
- [65] Nasibullaeva E.S. [Simulation of acoustic scattering from a set of sound-permeable spheres in 3D space]. *Vychislitel'nye tekhnologii* [Computational technologies]. 2022. V. 27, No. 2. Pp. 19–36 (in Russian). DOI: [10.25743/ICT.2022.27.2.003](https://doi.org/10.25743/ICT.2022.27.2.003)
- [66] Nasibullaeva E.Sh. [Numerical analysis of acoustic scattering from a layer of sound-permeable spheres]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2021. V. 16, No. 2. Pp. 50–57 (in Russian). DOI: [10.21662/mfs2021.2.008](https://doi.org/10.21662/mfs2021.2.008)
- [67] Senior T.B.A., Goodrich R.F. Scattering by a sphere. *PROC. IEE.* 1964. V. 111, No. 5. Pp. 907–916. DOI: [10.1049/ptee.1964.0145](https://doi.org/10.1049/ptee.1964.0145)
- [68] Rokhlin V. Sparse diagonal forms for translation operations for the Helmholtz Equation in two dimensions. Dept. Comput. Sci. Yale Univ., New Haven, CT, Res. Rep. YALEU/DCS/RR-1095, 1995.
- [69] Koc S., Song J., Chew W.C. Error Analysis for the Numerical Evaluation of the Diagonal Forms of the Scalar Spherical Addition Theorem. *SIAM J. Numer. Anal.* 1999. V. 36, No. 3. Pp. 906–921. DOI: [10.1137/s0036142997328111](https://doi.org/10.1137/s0036142997328111)
- [70] Darve E. The Fast Multipole Method I: Error Analysis and Asymptotic Complexity. *SIAM J. Numer. Anal.* 2000. V. 38, No. 1. Pp. 98–128. DOI: [10.1137/S0036142999330379](https://doi.org/10.1137/S0036142999330379)
- [71] Song J., Chew W.C. Error Analysis for the Truncation of Multipole Expansion of Vector Green's Functions. *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*. 2001. V. 11, No. 7. Pp. 311–313. DOI: [10.1109/7260.933781](https://doi.org/10.1109/7260.933781)
- [72] Gumerov N.A., Duraiswami R. *Fast Multipole Methods for the Helmholtz Equation in Three Dimensions*. Elsevier, 2004. 520 p. DOI: [10.1016/b978-0-08-044371-3.x5000-5](https://doi.org/10.1016/b978-0-08-044371-3.x5000-5)
- [73] Young J.W., Bertrand J.C. Multiple scattering by two cylinders. *J. Acoust. Soc. Am.* 1975. V. 58, No. 6. Pp. 1190–1195. DOI: [10.1121/1.380792](https://doi.org/10.1121/1.380792)
- [74] Nussenzveig H.M. *Diffraction Effects in Semiclassical Scattering*. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 238 p. DOI: [10.1017/CBO9780511599903](https://doi.org/10.1017/CBO9780511599903)
- [75] Antoine X., Chniti C., Ramdani K. On the numerical approximation of high-frequency acoustic multiple scattering problems by circular cylinders. *J. Comput. Phys.* 2008. V. 227, No. 3. Pp. 1754–1771. DOI: [10.1016/j.jcp.2007.09.030](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.09.030)
- [76] Chew W.C., Jin J.M., Michielssen E., Song J. *Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics*. Artech House-Antennas and Propagation Library, Norwood, 2001. 932 p.
- [77] Carayol Q., Collino F. Error estimates in the fast multipole method for scattering problems. Part 1: Truncation of the Jacobi-Anger series. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. 2004. V. 38, No. 2. Pp. 371–394. DOI: [10.1051/m2an:2004017](https://doi.org/10.1051/m2an:2004017)

- [78] Nasibullaeva E.Sh. [Terms number determination at the series truncation for the numerical solution of the problem of acoustic scattering from a sound-permeable spheres set]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2020. V. 15, No. 3–4. Pp. 176–182 (in Russian).
DOI: [10.21662/mfs2020.3.128](https://doi.org/10.21662/mfs2020.3.128)
- [79] Korn G.A., Korn Th.M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. McGraw Hill Book Company, 1968. 943 p.
- [80] Amamou M.L. A theoretical and numerical resolution of an acoustic multiple scattering problem in three-dimensional case. *Acoustical Physics*. 2016. V. 62, No. 3. Pp. 280–291.
DOI: [10.1134/S1063771016030015](https://doi.org/10.1134/S1063771016030015)
- [81] Sage K.A., George J., Überall H. Multipole resonances in sound scattering from gas bubbles in a liquid. *J. Acoust. Soc. Am.* 1979. V. 65, No. 6. Pp. 1413–1422.
DOI: [10.1121/1.2016503](https://doi.org/10.1121/1.2016503)
- [82] Lapin A.D. [Resonance Sound Scattering of a Gas Bubble in a Layer of Liquid]. *Akusticheskij Zhurnal* [Acoustic Journal]. 1998. V. 44, No. 3. Pp. 426–427 (in Russian).
http://www.akzh.ru/pdf/1998_3_426-427.pdf
- [83] Ivanov Ye.A. *Diffraction of electromagnetic waves on two bodies*. Washington: National Aeronautics and Space Administration, 1970. 597 p.



Исследование собственных колебаний нефти в вертикальной скважине¹

Мамаева З.З., Рафикова Г.Р.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В нефтедобывающей промышленности важным аспектом при добыче углеводородов являются контроль за состоянием скважины и исследование прилегающей к ней призабойной зоны. С этой целью, применяются различные геофизические методы исследования скважин. Одним из таких методов является акустическая спектроскопия скважин, где по средствам возбуждения собственных колебаний жидкости могут быть исследованы характеристики скважины и пласта. В настоящей работе исследована задача о собственных колебаниях жидкости в вертикальной скважине, возникших вследствие резкого открытия или закрытия скважины. Для описания данного процесса построена математическая модель собственных колебаний столба жидкости в скважине, сообщающейся с пластом через проницаемые стенки открытого участка, с использованием уравнения сохранения масс и импульсов в области скважины, уравнения сохранения масс в области открытого участка скважины и уравнения фильтрации в пласте. С учетом начальных и граничных условий найдено аналитическое решение в виде стоячих волн для определения давления и скорости нефти в скважине. Показаны зависимости частоты колебаний, декремента и коэффициента затухания от проницаемости пласта, приведена динамика давления в скважине и рассмотрена амплитуда колебаний. Проведен сравнительный анализ изменения таких показателей, как частота колебаний, декремент и коэффициент затухания. Установлено влияние таких параметров, как длина призабойной зоны и коэффициент проницаемости, на характер изменения собственных колебаний флюида.

Ключевые слова: скважина, нефть, гидроудар, собственные колебания жидкости, частота колебаний, коэффициент и декремент затухания

1. Введение

Разработка нефтяных месторождений — это целый комплекс мер, ориентированных на извлечение максимального количества углеводородов из недр земли. Учитывая достаточно долгий срок эксплуатации большинства добывающих скважин, прослеживается снижение их продуктивности и возникает необходимость в проведении ремонтных работ. При этом прежде всего необходимо исследовать скважину и прилегающую к ней призабойную зону. Вследствие чего разрабатываются и применяются различные геофизические ме-

тоды исследования скважин (электрические, радиоактивные, акустические, магнитные, термические и др.) для технической оценки скважин [1, 2]. Одним из таких методов является акустическая спектроскопия, где по волновым характеристикам собственных колебаний столба жидкости в скважине возможно получить данные о состоянии скважины и призабойной зоны пласта. Колебания жидкости могут быть возбуждены путем гидроудара в стволе скважины. Отметим, что данная постановка задачи интересна в случае, когда процесс гидравлического удара возникает в реальных условиях при эксплуатации нефтяных скважин (например, при внезапной остановке насосов в ходе поломки). Математическая модель гидроудара в вертикальной скважине представлена в работе [3], где проведен сравнительный анализ полученных численных расчетов с экспериментальными данными

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-11-00207.

из [4]. В статье [5] показано, как по характеристикам скважины и закачиваемой жидкости возможно определить параметры гидроудара в колонне насосно-компрессорной трубы (НКТ), возникшего при работе импульсных устройств. В [6] описана математическая модель гидроудара многофазного потока в скважине, проведен анализ влияния прекращения подачи газа и значения протяженности скважины на динамику давления в скважине. Моделирование процесса гидроудара также рассмотрено в работе [7], где описано возникновение гидроудара при проведении необходимых работ по устранению солейотложений и коррозии оборудования. В представленной задаче проанализированы собственные колебания жидкости в скважине, которые возникли вследствие резкого открытия или закрытия скважины, изучена динамика их распространения. Исследованы зависимости волновых характеристик от протяженности столба жидкости, коллекторских характеристик пласта, примыкающего к скважине.

2. Основные уравнения и постановка задачи

Рассмотрим вертикальную скважину, схема которой представлена на рис. 1, где ось z направлена вертикально вниз, а начало координат находится на верхней границе столба жидкости. В стволе скважины при гидроударе возникают собственные колебания столба жидкости. Полагаем, что течение жидкости в скважине находится в покое до начала отчета времени; на верхней границе течение столба жидкости ограничено тяжелой крышкой; длина призабойной зоны намного меньше длины закрытого участка скважины, следовательно, возмущение давления на этом участке однородно.

Запишем основные уравнения для решения данной задачи:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{2\sigma}{a_c}, \quad 0 < z < l, \quad (1)$$

$$\sigma = \frac{\mu}{\sqrt{\pi v}} \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{\partial w}{\partial t} d\tau, \quad v = \frac{\mu}{\rho_0}, \quad \rho = \frac{P}{C^2},$$

$$\pi a^2 l_p \frac{\partial \rho_l}{\partial t} = \pi a_c^2 \rho_0 w_l - 2\pi a l_h \rho_0 u, \quad (2)$$

$$u = -\frac{k_p}{\mu} \left(\frac{\partial P_p}{\partial r} \right),$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \chi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial P_p}{\partial r} \right), \quad \chi = \frac{k_p \rho_0 C^2}{m_p \mu}, \quad (3)$$

$$l < z < l + l_p, \quad a < r < \infty,$$

где ρ — плотность жидкости; w — скорость; P — давление; σ — касательное напряжение в жидкости

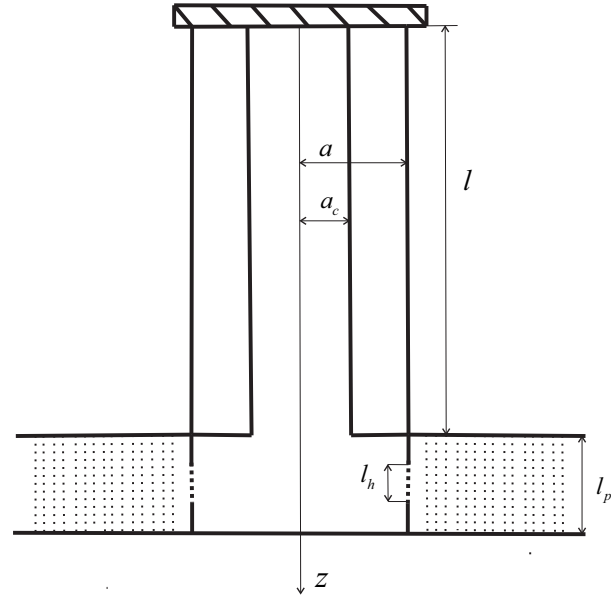


Рис. 1. Схема скважины, сообщающейся с пластом

на поверхности стенки скважины; μ , ν — динамическая и кинематическая вязкости; t — время; τ — шаг по времени; C — скорость звука в жидкости; a_c — радиус НКТ; a — радиус обсадной колонны скважины; l — протяженность скважины; l_p — протяженность призабойной зоны пласта; l_h — протяженность зоны перфорации; u — скорость фильтрации жидкости в окружающую среду через стенку открытого участка скважины; k_p — проницаемость призабойной зоны пласта; m_p — пористость пласта; r — радиальная координата призабойной зоны пласта; χ — коэффициент пьезопроводности. Индекс «0» соответствует невозмущенному состоянию. Нижние индексы: p — пористый пласт; f — жидкость; h — зона перфорации.

Система уравнений (1) включает уравнение сохранения массы жидкости в скважине и уравнение импульсов, записанные в линеаризованном приближении. Уравнение (2) описывает сохранения массы в призабойной зоне пласта. Выражение (3) является уравнением для упругого режима фильтрации в пласте вокруг скважины.

Запишем граничные условия для уравнений (1) и (3):

$$z = 0: w(t, 0) = 0; \quad z = l: P(t, l) = P_f(t), \quad (4)$$

$$w(t, l) = w_f(t),$$

$$r = a: P = P_f; \quad r \rightarrow \infty: P = 0, \quad (5)$$

где $P_f(t)$, $w_f(t)$ — неизвестные функции. Для определения данных функций необходимо использовать уравнение (2).

3. Аналитическое решение

Решение уравнений (1) будем искать в виде стоячей волны

$$P = A_p(z)e^{i\omega t}, \quad w = A_w(z)e^{i\omega t}, \quad (6)$$

где A_p — амплитуда колебаний давления в скважине; A_w — амплитуда колебаний скорости; $\omega = \Omega + i\delta$ — комплексная частота собственных колебаний, действительная часть Ω описывает период колебаний, а мнимая часть δ отвечает за интенсивность затухания.

Подставив (6) в систему уравнений (1), после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} \rho_0 i\omega(1 + 2/b)A_w(z) + \frac{dA_p(z)}{dz} &= 0, \\ \frac{i\omega}{\rho_0 C^2}A_p(z) + \frac{dA_w(z)}{dz} &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $b = \sqrt{i\omega a_c^2/\nu}$.

Исключив $A_w(z)$ из уравнений (7), получим

$$\frac{d^2 A_p(z)}{dz^2} + k^2 \frac{dA_p(z)}{dz} = 0, \quad (8)$$

где $k^2 = (1 + 2/b)\omega^2/C^2$ — комплексное волновое число.

Общее решение уравнения (8) ищем в виде

$$A_p(z) = C_1 \sin(kz) + C_2 \cos(kz).$$

Найдем решение уравнения (8) и после некоторых преобразований получим выражения для параметров P_f и w_f при $z = l$:

$$P_f = C_2 \cos(kl)e^{i\omega t}, \quad w_f = \frac{C_2 k \sin(kl)}{i\omega \rho_0 (1 + 2/b)} e^{i\omega t}. \quad (9)$$

Для определения фильтрационного потока в пласте вокруг открытого участка нахождения градиента давления на стенке открытого участка скважины решение уравнения (3) с граничными условиями (5) будем искать в виде

$$P = A_p(r)e^{i\omega t}. \quad (10)$$

Подставив (10) в (3), получим

$$r^2 A_p''(r) + r A_p'(r) - q r A_p(r) = 0, \quad q = \sqrt{i\omega/\chi}. \quad (11)$$

Решение уравнения (11) будет иметь вид:

$$A_p(r) = A_p(a) \frac{K_0(rq)}{K_0(aq)}, \quad (12)$$

где $K_0(x) = \int_0^\infty e^{-xch\xi} d\xi$ — функция Макдональда нулевого порядка.

Подставляя (12) и (10) в (2) с учетом граничных условий и выражений (9), выполнив некоторые преобразования, получим трансцендентное уравнение для определения частоты ω :

$$\operatorname{tg}(kl) = \left(\frac{a}{a_c}\right)^2 l_p k \left(\frac{2 l_h m K_0'(aq)}{a l_p q^2 K_0(aq)} - 1\right).$$

4. Численные результаты

В расчетах вместо P будем использовать нормированное значение $P/A_p(0)$ при $C_2 = 1$:

$$P = \cos(kz)e^{i\omega t}.$$

Численные результаты получены в предположении, что в скважине находится нефть, с использованием следующих физических параметров: $\rho = 890$ кг/м³, $C = 1225$ м/с, $\mu = 20 \cdot 10^{-3}$ Па·с. Для скважины и пласта принято: $a_c = 0.04$ м, $a = 0.1$ м, $l = 1500$ м, $l_h = 10$ м, $l_p = 20$ м, $m_p = 0.1$.

На рис. 2 приведена иллюстрация зависимостей собственной частоты Ω (а), коэффициента затухания δ (б) и декремента затухания (в), определяемого как $\Delta = (2\pi/\Omega)\delta$ от проницаемости пласта k_p при различных значениях протяженности призабойной зоны скважины l_p . Заметим, что при увеличении коэффициента проницаемости в диапазоне $10^{-15} \div 10^{-11}$ м² частота собственных колебаний заметно уменьшается, а именно: при $l_p = 20$ м на 11 %, при $l_p = 50$ м на 5 %, при $l_p = 100$ м на 3 %, соответственно увеличивается период колебаний. С ростом протяженности призабойной зоны пласта в данном диапазоне значений коэффициента проницаемости наблюдается уменьшение всех трех параметров (частоты, декремента и коэффициента затухания), что соответствует меньшему количеству колебаний и более медленному их затуханию. Видно, что для всех представленных параметров в диапазоне высоких проницаемостей $10^{-11} \div 10^{-9}$ м² влияние длины открытого участка на значения частот, коэффициента и декремента затухания незначительно.

На рис. 3 показана динамика давления датчиков, которые находятся в точках скважины 0 м (а), 750 м (б) и 1500 м (в) для различных коэффициентов проницаемости. Видно, что в случае значений проницаемости 10^{-12} и 10^{-10} м² затухание колебаний происходит быстрее и амплитуда колебаний уменьшается с увеличением глубины скважины. При значении проницаемости 10^{-14} м² самая низкая амплитуда колебаний наблюдается в точке 750 м, а в начале и в конце скважины — приблизительно равная амплитуда колебаний.

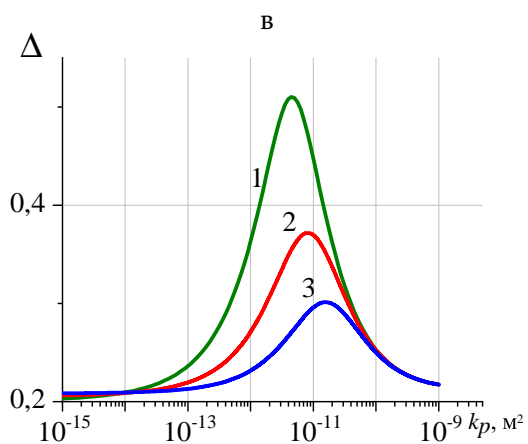
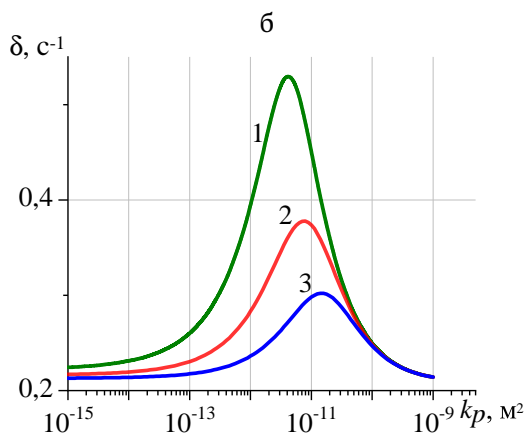
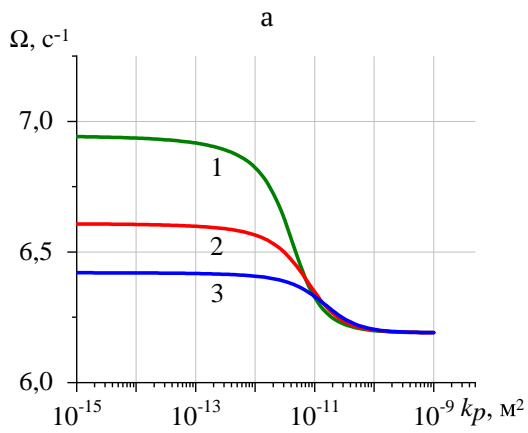


Рис. 2. Зависимость собственной частоты (а), коэффициента затухания (б), декремента затухания (в) от коэффициента проницаемости пласта при различных значениях протяженности призабойной зоны скважины: 1 – $l_p = 20$ м, 2 – 50 м, 3 – 100 м

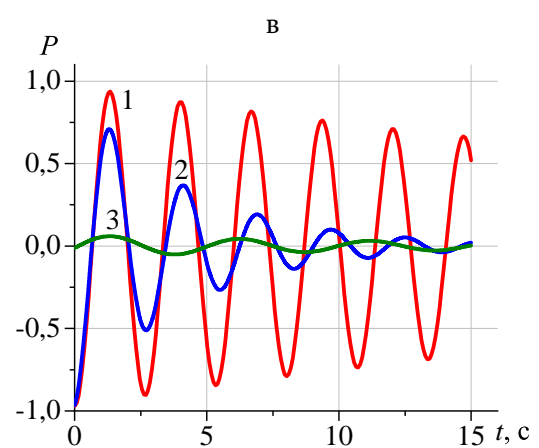
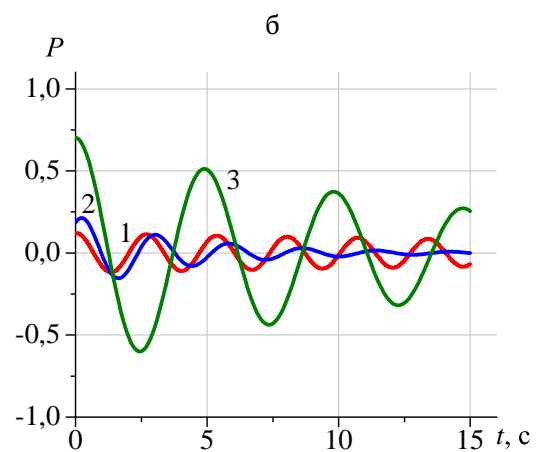
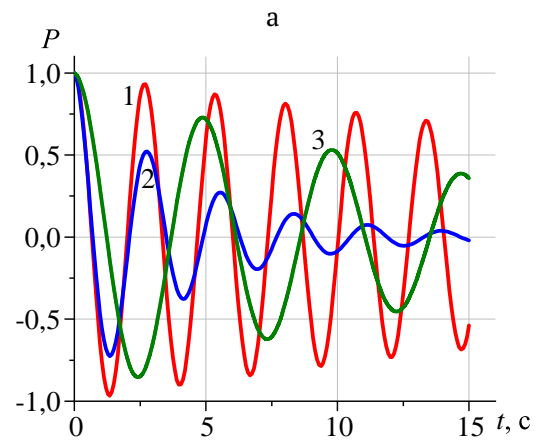


Рис. 3. Динамика давления в датчиках, расположенных в точках скважины 0 м (а), 750 м (б) и 1500 м (в) при различных значениях проницаемости пласта: 1 – $k_p = 10^{-14}$ м², 2 – 10^{-12} м², 3 – 10^{-10} м²

На рис. 4 показаны распределения амплитуды колебаний давления столба жидкости (а), сдвига по фазе (б) по глубине скважины при различных значениях коэффициента проницаемости пласта. Видно, что самая высокая амплитуда достигается в начале и в конце скважины, примерно на глубине $z = 750$ м наблюдается самая маленькая амплитуда колебаний. В низкопроницаемых пластах сдвиг фаз колебаний наблюдается в диапазоне $0 \div \pi$. Для высоких проницаемостей сдвиг фаз происходит в диапазоне $0 \div \pi/2$.

На рис. 5 представлены зависимости собственной частоты (а), коэффициента затухания (б) и декремента затухания (в) от проницаемости пласта для воды [8] и нефти. Видно, что количество колебаний нефти примерно в 2 раза превышает число колебаний воды. Для коэффициента и декремента затухания получены немонотонные зависимости,

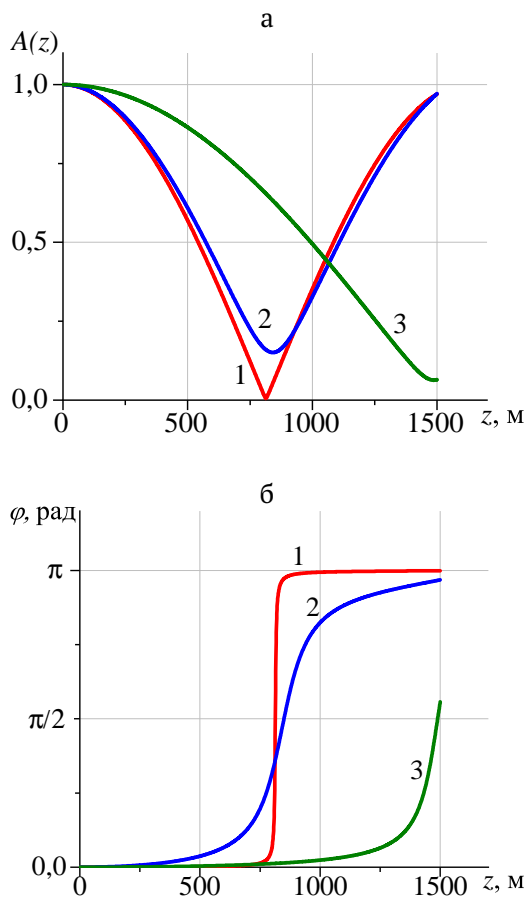


Рис. 4. Распределения амплитуды колебаний столба жидкости (а) и сдвига по фазе (б) по глубине скважины при различных значениях коэффициента проницаемостей: 1 – $k_p = 10^{-14}$ м², 2 – 10^{-12} м², 3 – 10^{-10} м²

сти, в пластах с низкой проницаемостью наблюдается более быстрое затухание колебаний воды, в высокопроницаемых пластах колебания нефти затухают интенсивнее.

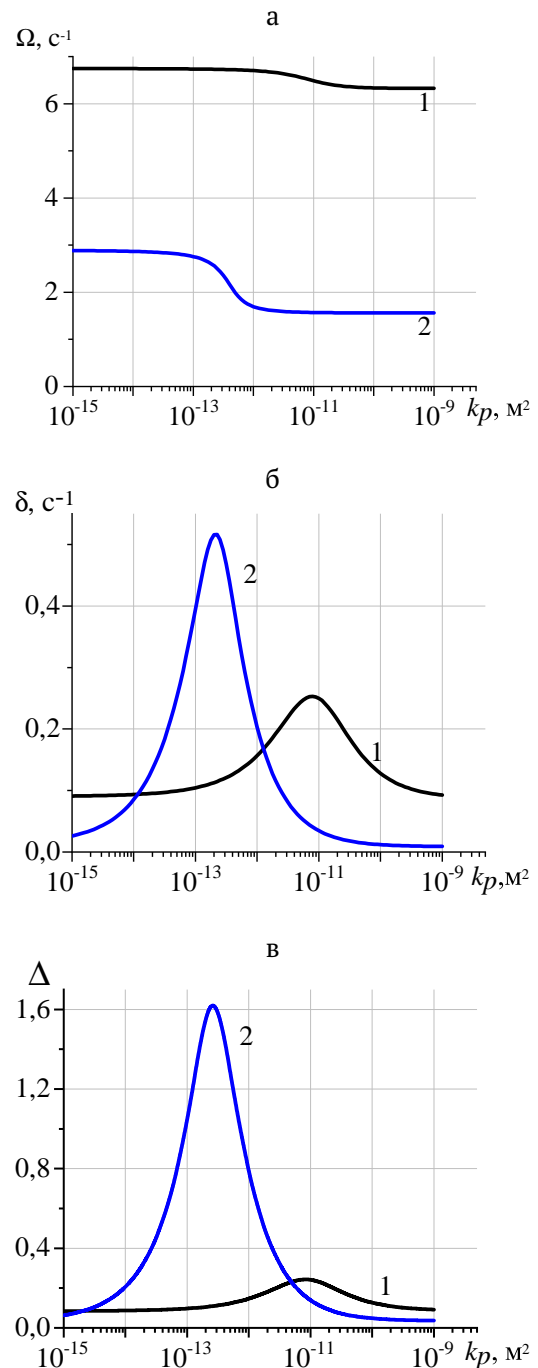


Рис. 5. Зависимость собственной частоты (а), коэффициента затухания (б), декремента затухания (в) от коэффициента проницаемости пласта для 1 – нефти, 2 – воды

5. Заключение

Выявлено, что изменение длины призабойной зоны скважины в основном влияет на собственные колебания жидкости при низких значениях проницаемости пласта, в диапазоне высоких проницаемостей изменения являются незначительными. Установлено, что на устье и забое скважины наблюдается самая высокая амплитуда колебаний, а самая маленькая амплитуда определена примерно на глубине $z = 750$ м. Сравнение таких показателей, как частота затухания, коэффициент и декремент затухания, при исследовании воды и нефти показали, что собственные колебания нефти затухают примерно в 2 раза быстрее в диапазоне проницаемостей $10^{-15} \div 10^{-9}$ м².

Список литературы

- [1] Горбачев Ю.И. Геофизические исследования скважин. Москва: Недр, 1990. 398 с.
- [2] Косков В.Н. Геофизические исследования скважин: Учеб. пособие / Перм. гос. техн. ун-т. Пермь, 2004. 317 с.
- [3] Ляпидевский В.Ю., Неверов В.В., Кривцов А.М. Математическая модель гидроудара в вертикальной скважине // Сиб. электрон. матем. изв. 2018. № 15. С. 1687–1696. DOI: 10.33048/semi.2018.15.140
- [4] Wang X., Hovem K., Moos D., Quan Y. Water Hammer Effects on Water Injection Well Performance and Longevity // SPE International Symposium and Exhibition on Formation Damage Control. 2008. DOI: 10.2118/112282-MS
- [5] Хабибуллин М.Я., Арсланов И.Г. Параметры неустановившегося движения закачиваемой жидкости в колонне насосно-компрессорных труб при работе импульсных устройств // Нефтегазовое дело: электронный научный журнал. 2014. № 1. С. 148–165. eLIBRARY ID: 22266850
- [6] Yu S., Wei J., Shuanggui L., Yingjie Yu C. Wellbore annulus water hammer pressure prediction based on transient multi-phase flow characteristics // Oil and Gas Science and Technology. 2019. Vol. 84 Pp. 1–107.
- [7] Людвиницкая А.Р., Шайдаков В.В., Драган Ф.В., Полетаева О.Ю. Насосные дозировочные системы для осложненных условий нефтедобычи // Нефтегазовое дело. 2009. Т. 7, № 2. С. 71–76. eLIBRARY ID: 17923747
- [8] Шагапов В.Ш., Башмаков Р.А., Рафикова Г.Р., Мамаева З.З. Затухающие собственные колебания жидкости в скважине, сообщающейся с пластом // Прикладная механика и техническая физика. 2020. Т. 61, № 4. С. 5–14. DOI: 10.15372/PMTF20200401
- [9] Горное дело: Терминологический словарь / ред. К. Н. Трубецкой, Д.Р. Каплунова. 5-е изд., перераб. и доп. Москва: Горная книга, 2016. 635 с.
- [10] Guoqing H., Kegang L., Siew H. K., Zhang Z. He, Ram K. T. Simulation of Multiphase Fluid-Hammer Effects During Well Startup and Shut-in // Oil and Gas Facilities. 2012. Vol. 6 Pp. 68–77. DOI: 10.2118/160049-MS
- [11] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Москва: Наука, 1986. 734 с.



Study of natural oscillations of oil in a vertical well

Mamaeva Z.Z., Rafikova G.R.

Mavlyutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa, Russia

In the oil industry, an important aspect in the production of hydrocarbons is the control of the state of the well and the study of the near-wellbore zone adjacent to it. For this purpose, various geophysical well survey methods (GIS) are used. One of the methods of well logging is acoustic spectroscopy of wells, where the characteristics of the well and reservoir can be studied by means of excitation of natural oscillations of the fluid. In this paper, the problem of natural oscillations of a fluid in a vertical well, which arose as a result of a sharp opening or closing of the well, is investigated. To describe this process, a mathematical model of natural oscillations of the liquid column in the well, which communicates with the reservoir through the permeable walls of the open area, is constructed using the mass and momentum conservation equation in the well area, the mass conservation equation in the open area of the well, and the filtration equation in the reservoir. Taking into account the initial and boundary conditions, an analytical solution was found in the form of standing waves to determine the pressure and velocity of oil in the well. The dependences of the oscillation frequency, decrement and damping factor on the reservoir permeability are shown, the pressure dynamics in the well is given and the amplitude of the oscillations is considered. A comparative analysis of changes in such indicators as oscillation frequency, decrement and damping coefficient has been carried out. The influence of such parameters as the length of the bottomhole zone and the permeability coefficient on the nature of the change in the natural fluctuations of the fluid has been established.

Keywords: well, oil, water hammer, natural fluid vibrations, vibration frequency, damping coefficient and decrement

References

- [1] Gorbachev Yu.I. Well logging. Moscow: Nedra, 1990. 398 p. (in Russian).
- [2] Koskov V.N. Geophysical survey of wells: Textbook. allowance / Perm. state tech. un-t. Permian, 2004. 122 p. (in Russian).
- [3] Lyapidevsky V.Yu., Neverov V.V., Krivtsov A.M. Mathematical model of a hydraulic shock in a vertical well // Sib. electron. mat. Izv. 2018. Vol. 15. Pp. 1687–1696. (in Russian). DOI: 10.33048/semi.2018.15.140
- [4] Wang X., Hovem K., Moos D., Quan Y. Water Hammer Effects on Water Injection Well Performance and Longevity. SPE International Symposium and Exhibition on Formation Damage Control. 2008. DOI: 10.2118/112282-MS
- [5] Khabibullin M.Ya., Arslanov I.G. Parameters of the unsteady motion of the pumped fluid in the tubing string during the operation of impulse devices // Oil and gas business: electronic scientific journal. 2014. No. 1. Pp. 148–165. (in Russian). eLIBRARY ID: 22266850
- [6] Yu S., Wei J., Shuanggui L., Yingjie Yu C. Wellbore annulus water hammer pressure prediction based on transient multi-phase flow characteristics // Oil and Gas Science and Technology. 2019. V. 74, No. 84. Pp. 1–107. DOI: 10.2516/ogst/2019058
- [7] Lyudvinskaya A.R., Shaidakov V.V., Dragan F.V., Poletaeva O.Yu. Pump dosing systems for complicated oil production conditions // Oil and gas business. 2009. V. 7, No. 2. Pp. 71–76. (in Russian). eLIBRARY ID: 17923747
- [8] Shagapov V.Sh., Bashmakov R.A., Rafikova G.R., Mamaeva Z.Z. Damped natural vibrations of a fluid in a well communicating with the formation // Applied Mechanics and Technical Physics. 2020. V. 61, No. 4(362). Pp. 5–14. (in Russian). DOI: 10.15372/PMTF20200401
- [9] Mining: Terminological Dictionary / ed. K.N. Trubetskoy, D.R. Kaplunov. 5 th ed., Rev. and add. Moscow: Mountain Book, 2016. 635 p. (in Russian).
- [10] Guoqing H., Kegang L., Siew H.K., Zhang Z. He, Ram K. T. Simulation of Multiphase Fluid-Hammer Effects During Well Startup and Shut-in // Oil and Gas Facilities. 2013. No. 6 Pp. 68–77. DOI: 10.2118/160049-MS
- [11] Landau L.D., Lifshits E.M. Hydrodynamics. Moscow: Science, 1986. 736 p. (in Russian).



Волны давления в трубе, заполненной жидкостью при наличии в ней пузырьковой области в форме тора¹

Галимзянов М.Н.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Задачи, в которых рассматривается фокусировка энергии волны в жидкости, связаны с проблемой создания гидроакустических аналогов лазерных систем, которые могли бы поглощать внешнее воздействие и переизлучать его с существенным увеличением амплитуды и концентрацией энергии в заданном направлении. В настоящей работе изучены двумерные осесимметричные волновые возмущения в канале с водой, содержащей тороидальный коаксиальный кластер, заполненный водовоздушной пузырьковой смесью. По результатам численных расчетов проанализирована зависимость максимальной амплитуды давления, формирующейся в канале, от геометрических параметров кластера и канала, а также от амплитуды первоначального воздействия. Установлено, что в случае цилиндрического кластера амплитуда волнового сигнала за пузырьковой зоной в несколько раз превышает амплитуду для случая цилиндрического тороидального кластера.

Ключевые слова: цилиндрический канал, пузырьковый кластер, пузырьковая жидкость, волна давления, тороидальный пузырьковый кластер

1. Введение

Задачи, связанные с фокусировкой энергии волны в жидкости, связаны с проблемой создания гидроакустических аналогов лазерных систем, которые сначала могут поглощать внешнее воздействие, а потом переизлучать ее с существенным увеличением амплитуды и возможной концентрацией энергии в заданном направлении [1]. Отметим работы, посвященные анализу фокусировки энергии волн пузырьковыми средами. В работе [2] изучена динамика распространения импульсных сигналов в жидкости, содержащей пузырьковую завесу конечных размеров, показано, что в зависимости от временной протяженности первоначального импульса внутри завесы может происходить нарастание амплитуды давления выше, чем амплитуда исходного сигнала. В [3] в рамках модели Иорданского, Когарко, Виингардена (ИКВ) выполнены

численные исследования «накачки» сферического пузырькового кластера и формирования в кластере башнеобразного импульса давления. Показано, что изменением величины объемной концентрации газовой фазы удается регулировать координату пятна фокусировки волны. При этом амплитуда волны, излученная кластером в жидкость, может на 1–2 порядка превышать амплитуду волны, возбуждающей кластер. Результаты численного моделирования ударной волны с тороидальным пузырьковым кластером в жидкости и возникновение направленного излучения в жидкость приведено в [4]. Экспериментальному изучению взаимодействия плоской ударной волны со сферическим пузырьковым кластером в жидкости посвящена работа [5]. Показано, что взаимодействие плоской ударной волны со сферическим пузырьковым кластером в жидкости приводит к генерации уединенной волны давления с амплитудой, значительно превышающей амплитуду ударной волны. Установлено, что структура уединенной волны давления определяется не только параметрами кластера и амплитудой ударной волны, но и отношением диаметров кла-

¹Работа поддержана средствами государственного бюджета по государственному заданию на 2019–2022 годы (№ 0246-2019-0052)

стера и рабочего участка. В работе [6] экспериментально исследованы эволюция и структура ударной волны умеренной амплитуды в жидкости, содержащей пузырьковые кластеры. В этой работе получены опытные данные по скорости и структуре ударных волн умеренной амплитуды в жидкости, содержащей сферические пузырьковые кластеры, и проведено сравнение с теоретическими моделями. Показано, что для волн малой амплитуды уравнение Буссинеска хорошо описывает структуру переднего фронта осциллирующей ударной волны. Также показано, что резонансное взаимодействие пузырьковых кластеров в волне может приводить к усилению амплитуды осцилляций в ударной волне. В [7] численно исследована структура и динамика волнового поля, излучаемого пузырьковой системой в виде аксиального пузырькового цилиндра (шнура) в результате его возбуждения плоской ударной волной, распространяющейся вдоль оси в осесимметричной ударной трубе. Показано, что в результате последовательного возбуждения пульсаций пузырьковой зоны в шнуре и в окружающей жидкости формируется квазистационарная ударная волна.

2. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим двумерные осесимметричные волновые возмущения в канале с водой, содержащей тороидальный коаксиальный кластер, заполненный водовоздушной пузырьковой смесью (рис. 1). Волновое движение в канале инициируется мгновенным повышением давления на границе $z = 0$ от равновесного p_0 до некоторого амплитудного значения $\Delta p_{\ell 0}$ и поддерживается все время расчета. Требуется определить динамику волнового процесса в канале при $t > 0$.

Используется полная система гидродинамических уравнений с учетом теплообменных процессов между жидкостью и газом в пузырьках. При этом рассматриваемая система использует основные допущения и упрощающие предположения [8], а именно:

- размеры пузырьков намного превышают молекулярно-кинетические размеры, но значительно меньше расстояний, на которых усредненные или макроскопические параметры смеси или фаз меняются существенно;
- пузырьки имеют сферическую форму одного и того же радиуса, а объемное содержание пузырьков α_{g0} существенно мало ($\alpha_{g0}^2 \ll 1$);
- пренебрегаем непосредственным взаимодей-

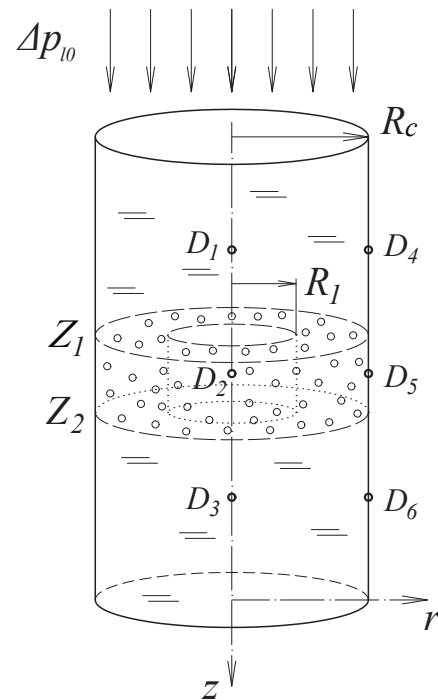


Рис. 1. Схема задачи: R_C и R_1 – радиусы канала и внутреннего тороидального кластера; Z_1 и Z_2 – координаты кластера; D_1 – D_6 – датчики давления

ствием пузырьков друг с другом и хаотическим движением пузырьков;

- отсутствуют процессы слипания, дробления и образования новых пузырьков;
- теплопроводность и вязкость существенны лишь в процессе межфазного взаимодействия и не проявляются в макроскопических процессах переноса импульса и энергии;
- давление газа внутри пузырьков считаем однородным.

В волновых процессах, имеющих место в жидкости с пузырьками, преобладающую роль играют механизмы диссипации, связанные с тепло-массообменными процессами, а не с относительным движением фаз. Поэтому при описании волновых процессов можно использовать односкоростную модель.

Кроме того, расчеты показывают, что даже при очень сильном сжатии пузырька ($p_\ell/p_0 \sim 10$, где p_ℓ – давление в жидкости), когда в пузырьке реализуется высокая температура, температура на

поверхности пузырька повышается незначительно ($T_\ell \approx 1.1 \cdot T_0$, где T_ℓ — температура в жидкости, а T_0 — начальная температура смеси) [8]. Давление в пузырьке при этом достигает значений, значительно превосходящих парциальное давление паров, соответствующих таким значениям температуры. Это обстоятельство говорит о несущественности межфазного массообмена. Следовательно, в случае газовых пузырьков можно пренебречь массообменом, а температуру жидкости считать постоянной ($T_\ell = T_0 = \text{const}$). Отметим, что этот вывод справедлив при не очень высоких давлениях и существенно упрощает задачу.

Для описания волнового движения с учетом вышесказанных допущений запишем систему макроскопических уравнений масс, числа пузырьков, импульсов и давления в пузырьках в приближении цилиндрической симметрии [8]:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_i}{dt} + \rho_i \frac{v_r}{r} + \rho_i \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= 0 \quad (i = l, g), \\ \frac{dn}{dt} + n \frac{v_r}{r} + n \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= 0, \\ \rho \frac{dv_r}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial r} = 0, \quad \rho \frac{dv_z}{dt} + \frac{\partial p_l}{\partial z} &= 0, \\ \frac{dp_g}{dt} = -\frac{3\gamma p_g}{a} w - \frac{3(\gamma - 1)}{a} q, \quad w = \frac{da}{dt}, \\ \left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right), \\ \alpha_l + \alpha_g = 1, \quad \alpha_g = \frac{4}{3} \pi n a^3, \\ \rho_i = \rho_i^0 \alpha_i, \quad \rho = \rho_g + \rho_l, \end{aligned}$$

где a — радиус пузырьков; γ — показатель адиабаты для газа; t — время; p_i — давления фаз; ρ_i^0 — истинные плотности фаз; α_i — объемные содержания фаз; q — интенсивность теплообмена; n — число пузырьков в единице объема; w — радиальная скорость пузырьков; v_r, v_z — радиальная и осевая составляющие скорости. Нижними индексами $i = l, g$ отмечены параметры жидкой и газовой фаз.

При описании радиального движения в соответствии с уточнением, предложенным в [9], будем полагать, что $w = w_R + w_A$, где w_R определяется из уравнения Рейля–Ламба, а w_A — из решения задачи о сферической разгрузке на сфере радиуса a в несущей жидкости в акустическом приближении:

$$a \frac{dw_R}{dt} + \frac{3}{2} w_R^2 + 4\nu_\ell \frac{w_R}{a} = \frac{p_g - p_\ell}{\rho_\ell^0}, \quad w_A = \frac{p_g - p_\ell}{\rho_\ell^0 C_\ell \alpha_g^{1/3}},$$

где ν_ℓ — вязкость жидкости; C_ℓ — скорость звука в «чистой» жидкости.

Будем полагать, что жидкость является линейно сжимаемой, а газ калорически совершенным:

$$p_\ell = p_0 + C_\ell^2 (\rho_\ell^0 - \rho_{\ell 0}^0), \quad p_g = \rho_g^0 R T_g,$$

где R — газовая постоянная. Здесь и в дальнейшем нижними индексами «0» снабжены параметры, относящиеся к начальному невозмущенному состоянию.

Тепловой поток q задается приближенным конечным соотношением [8]:

$$q = \text{Nu} \lambda_g \frac{T_g - T_0}{2a}, \quad \frac{T_g}{T_0} = \frac{p_g}{p_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^3,$$

$$\text{Nu} = \begin{cases} \sqrt{\text{Pe}}, & \text{Pe} \geq 100, \\ 10, & \text{Pe} < 100, \end{cases}$$

$$\text{Pe} = 12(\gamma - 1) \frac{T_0}{|T_g - T_0|} \frac{a|w|}{\kappa_g}, \quad \kappa_g = \frac{\lambda_g}{c_g \rho_g^0}.$$

где $T_0 = \text{const}$ — температура жидкости; c_g и λ_g — теплоемкость и теплопроводность газа; Nu и Pe — числа Нуссельта и Пекле.

Из данной математической модели в частном случае при $\alpha_{g0} = 0$ следует волновое уравнение для линейно сжимаемой жидкости. При исследовании взаимодействия волн в «чистой» жидкости с пузырьковой средой это обстоятельство в свою очередь позволяет использовать сквозные методы расчета.

3. Методика численного расчета

При численном решении задач гидродинамики, как и в ряде других областей, связанных с численными расчетами, основным критерием выбора используемого расчетного метода является сочетание точности, эффективности и экономичности применения. Для моделирования задач, связанных с распространением нелинейных волн и скачков большой амплитуды, наиболее предпочтительными в этом отношении оказываются методы, основанные на физической природе рассматриваемых процессов. В настоящей работе в качестве численного метода для решения системы дифференциальных уравнений в частных производных была выбрана конечно-разностная схема, основанная на использовании метода Рунге–Кутты. Данная схема приспособлена для решения задач газовой динамики. Применительно к рассмотренным процессам отметим, что этот метод не требует задания специальных шаблонов разностных схем на границах расчетной области.

3.1. Уравнения в переменных Лагранжа

Для численного анализа задачи об эволюции волн давления в цилиндрическом канале, содержащем тороидальный коаксиальный пузырьковый

кластер, удобнее воспользоваться системой уравнений, приведенной выше, записанной в лагранжевых координатах. Это, в частности, связано с тем, что в лагранжевых координатах первоначальные границы неоднородностей остаются неподвижными [10]. Из уравнений после некоторых преобразований можно получить следующую систему в лагранжевых переменных [11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_\ell}{\partial t} &= \frac{C_\ell^2 \rho_\ell^0}{1 - \alpha_g} \left[\frac{3\alpha_g}{a} w - \left(\frac{\alpha_g}{J} + \frac{\rho_{\ell 0}}{J^2 \rho_\ell^0} \right) \frac{\partial J}{\partial t} \right], \\ \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} &= \frac{3\alpha_g}{a} w - \frac{\alpha_g}{J} \frac{\partial J}{\partial t}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial r} &= \frac{r}{r_0} \frac{1}{J\rho} \left(\frac{\partial p_\ell}{\partial r_0} \frac{\partial r}{\partial z_0} - \frac{\partial p_\ell}{\partial z_0} \frac{\partial r}{\partial r_0} \right), \quad \frac{\partial z}{\partial t} = v_z, \\ \frac{\partial v_r}{\partial r} &= -\frac{r}{r_0} \frac{1}{J\rho} \left(\frac{\partial p_\ell}{\partial r_0} \frac{\partial z}{\partial z_0} - \frac{\partial p_\ell}{\partial z_0} \frac{\partial r}{\partial r_0} \right), \quad \frac{\partial r}{\partial t} = v_r, \\ \frac{\partial p_g}{\partial t} &= -\frac{3\gamma p_g}{a} w - \frac{3(\gamma - 1)}{a} q, \\ \frac{\partial a}{\partial t} &= w = w_R + w_A, \quad w_A = \frac{p_g - p_\ell}{\rho_\ell^0 C_\ell \alpha_g^{1/3}}, \\ \frac{\partial w_R}{\partial t} &= \left[\frac{p_g - p_\ell}{\rho_\ell^0} - \frac{3}{2} w_R^2 - 4\nu_\ell \frac{w_R}{a} \right] \frac{1}{a}, \\ q &= \text{Nu} \lambda_g \frac{T_g - T_0}{2a}, \quad \text{Nu} = \begin{cases} \sqrt{\text{Pe}}, & \text{Pe} \geq 100 \\ 10, & \text{Pe} < 100 \end{cases}, \\ \text{Pe} &= 12(\gamma - 1) \frac{T_0}{|T_g - T_0|} \frac{a|w|}{\kappa_g}, \\ k_g &= \frac{\lambda_g}{c_g \rho_g^0}, \quad \frac{T_g}{T_0} = \frac{p_g}{p_0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^3, \\ J &= \frac{r}{r_0} \left(\frac{\partial r}{\partial r_0} \frac{\partial z}{\partial z_0} - \frac{\partial r}{\partial z_0} \frac{\partial z}{\partial r_0} \right), \\ \frac{\partial J}{\partial t} &= \frac{v_r J}{r} + \frac{r}{r_0} \left(\frac{\partial r}{\partial r_0} \frac{\partial v_z}{\partial z_0} - \frac{\partial r}{\partial z_0} \frac{\partial v_z}{\partial r_0} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial v_r}{\partial r_0} \frac{\partial z}{\partial z_0} - \frac{\partial v_r}{\partial z_0} \frac{\partial z}{\partial r_0} \right), \end{aligned}$$

где z_0 и r_0 — лагранжевы переменные, в качестве которых берутся начальные эйлеровы координаты; J — якобиан перехода от лагранжевых к эйлеровым переменным [10].

Приведенная выше система решалась численно по явной схеме. Данная система уравнений из-за учета межфазного теплообмена и акустической разгрузки пузырьков является системой с достаточно сильной естественной диссипацией, поэтому не требуется вводить искусственную вязкость.

3.2. Начальные и граничные условия

Для проведения численных экспериментов используются следующие условия. **Начальные усло-**

вия при $t = 0$ и $z > 0$, соответствующие состоянию покоя неоднородной пузырьковой смеси в канале, запишутся в виде:

$$p = p_0, \quad v_r = v_z = 0, \quad \rho = \rho_0.$$

Тороидальный кластер, соприкасающийся с каналом (рис. 1):

$$\begin{cases} Z_1 \leq z_0 \leq Z_2 \cap r_0 \geq R_1: & \alpha_g = \alpha_{g0}, \quad \rho = \rho_{\ell 0}^0 (1 - \alpha_{g0}), \\ & p_g = p_0, \quad a = a_0, \quad w = 0, \\ 0 \leq z_0 < Z_1 \cap z_0 > Z_2 \cap 0 < r_0 < R_1: & \rho = \rho_{\ell 0}^0, \end{cases}$$

Граничные условия: на оси симметрии ($r_0 = 0$) и на стенке трубы ($r_0 = R_c$) задается условие непротекания жидкости $v_r = 0$, а на торцевой границе $z_0 = 0$ — граничное давление в виде «ступеньки»

$$z_0 = 0: \quad p_\ell(r_0, t) = p_0 + \Delta p_{\ell 0}, \quad 0 < r_0 < R_c.$$

Отметим, что случай задания давления на границе соответствует разрыву мембраны между камерой высокого давления, заполненной газом, и рабочей камерой, заполненной исследуемой системой.

На другой торцевой границе ($z_0 = L_z$) используется условие «протекания». Для того, чтобы возмущения «уходили» из области расчетов, не отражаясь от этой границы, используется импедансное соотношение, связывающее амплитуды давления и скорости: $\Delta p_{\ell 0} = \Delta v_z \rho_\ell^0 C_\ell$.

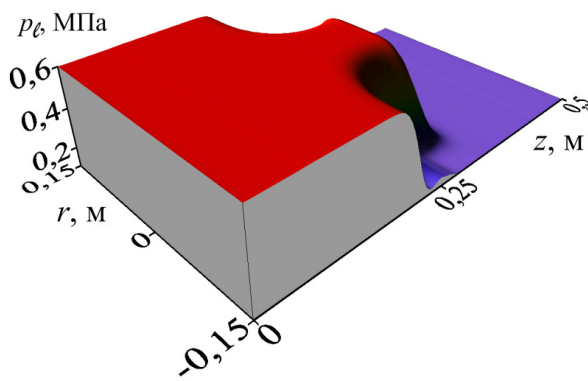
4. Результаты численных расчетов

Дальнейшие численные расчеты проводились при следующих теплофизических параметрах: $c_g = 1006$ Дж/кг·К, $\rho_{g0} = 1.29$ кг/м³, $\lambda_g = 0.026$ м·кг/К·с³, $\gamma = 1.14$ ($\kappa_g = 2.003 \cdot 10^{-5}$ м²/с) (для воздуха); $C_\ell = 1500$ м/с, $\rho_{\ell 0} = 10^3$ кг/м³, $\nu_\ell = 6 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $T_0 = 293$ К, $p_0 = 0.1$ МПа (для воды). При расчетах для h_{z_0}, h_{r_0} и τ применялись следующие значения: $h_{z_0} = h_{r_0} = 10^{-3}$ м, $\tau = 10^{-7}$ с.

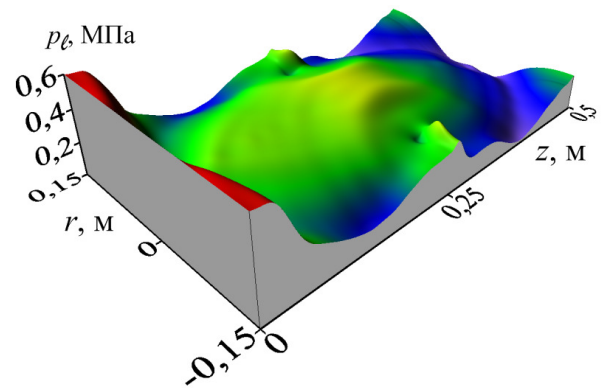
4.1. Фокусировка волны давления в тороидальном пузырьковом кластере

Рассмотрим случай, когда пузырьковый кластер тороидальной формы одной (a именно внешней) границей соприкасается со стенкой канала (см. рис. 1). Как и описано выше, в некоторый момент времени на нашу систему воздействуют импульсным давлением по направлению образующей канала.

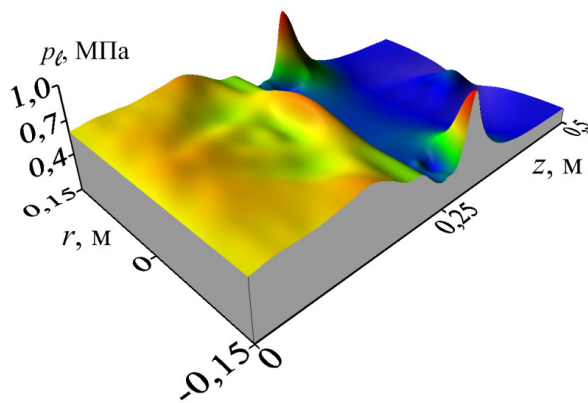
Примем следующие параметры для пузырьковой области: $Z_1 = 0.25$ м, $Z_2 = 0.3$ м, $R_1 = 0.1$ м,



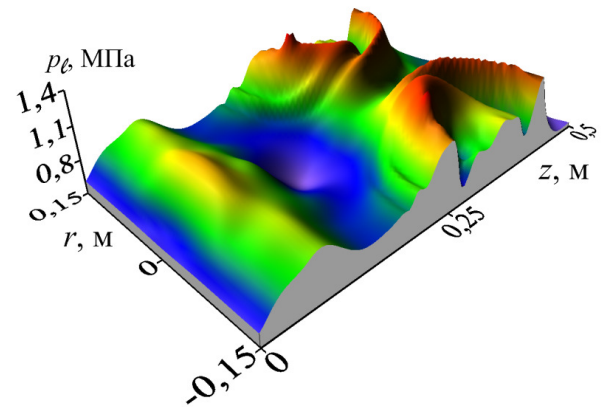
а) момент времени 0.236 мс



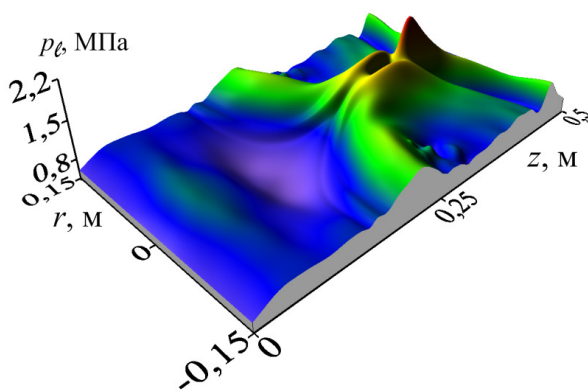
б) момент времени 0.402 мс



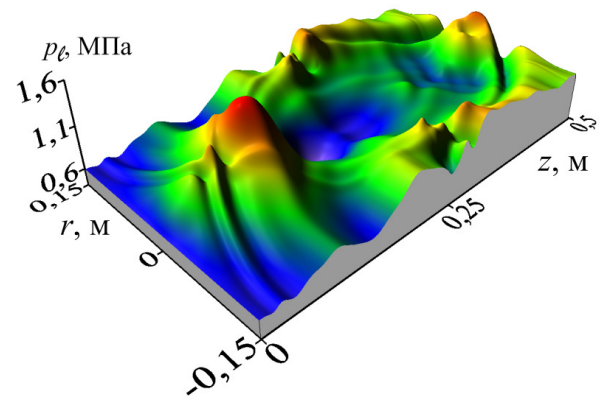
в) момент времени 0.530 мс



г) момент времени 0.772 мс



д) момент времени 0.804 мс



е) момент времени 0.888 мс

Рис. 2. Поля давлений в виде изобар, представленные для случая пристенного торoidalного пузырькового кластера в различные моменты времени

$\alpha_{g0} = 10^{-2}$, $a_0 = 10^{-3}$ м. Длина и радиус канала равны $L_z = 0.5$ м и $R_c = 0.15$ м. Амплитуда волнового импульса $\Delta p_{\ell 0} = 0.5$ МПа.

Под воздействием граничного давления $\Delta p(0, r) = p_0 + \Delta p_{\ell 0}$ в канале формируется волна

давления, которая распространяется вдоль положительного направления оси z и воздействует на кольцевой пузырьковый кластер. С течением времени из-за двумерного волнового движения происходит фокусировка волны в область сильно

сжимаемой пузырьковой жидкости [2, 3, 12, 13] (рис. 2(в)), а именно, на границе канала. Скорость волны в кольцевой пузырьковой зоне более, чем в 10 раз меньше скорости волны в «чистой» жидкости, поэтому за время взаимодействия волны с кольцевым пузырьковым слоем волна в «чистой» жидкости многократно успеваает отразиться от границ $z = 0$ (где поддерживается граничное давление) и $z = Z_1$. Из-за фокусировки волны в пузырьковом слое, а также из-за многократных отражений на границах $z = 0$ и $z = Z_1$ амплитуда результирующей волны увеличивается по сравнению с амплитудой первоначальной волны. На рис. 2(г) распределение давления представлено в момент времени, когда волна воздействует на стенку цилиндрического канала, амплитуда волны при этом достигает приблизительно 1.5 МПа. В дальнейшем происходит «переизлучение» сигнала от тороидального кластера и фокусировка волны на оси канала (рис. 2(д)). Для данного случая пиковое значение давления на оси составило 2.4 МПа. Так как «переизлучение» происходит во все стороны, то в левый конец канала (сторона входа импульса давления) также распространяется сфокусированная волна на оси канала (рис. 2(е)). Таким образом, наличие пристеночной кольцевой пузырьковой зоны в цилиндрическом канале, заполненном жидкостью, приводит к увеличению амплитуды волны типа «ступенька», воздействующей через торцевую границу, из-за фокусировки волны в области сильно сжимаемого пузырькового кольца и многократных отражений от границы, где поддерживаются граничное давление и давление границ кольца.

Показания датчиков, расположенных на оси канала и на стенке, представлено на рис. 3. Осциллограммы датчиков приведены для «больших» времен, намного превышающих время распространения волны от границы $z = 0$ до границы пузырькового кластера, поэтому многочисленные осцилляции на осциллограммах связаны с многократными переотражениями волны на границах кластера и на границе $z = 0$, где постоянно поддерживается граничное давление амплитудой $\Delta p_{\ell 0} = 0.5$ МПа. Из показаний датчиков D_1, D_2, D_3 следует, что пристеночная пузырьковая зона приводит к увеличению амплитуды волны в осевой зоне цилиндрического канала более трех раз. Увеличению амплитуды происходит также на стенках канала, находящихся близко к кольцевому пузырьковому кластеру. Согласно показаниям датчиков D_4, D_5, D_6 амплитуда первоначальной волны увеличивается более, чем в два раза по сравнению с амплитудой первоначальной волны типа «ступенька». Таким образом,

по показаниям датчиков, которые одинаково отстоят от границы $z = 0$ (D_1 и D_4, D_2 и D_5, D_3 и D_6) следует, что амплитуда волны в осевой зоне канала больше, чем на стенке. Этот эффект связан с геометрической фокусировкой результирующей волны, сформировавшейся на кластере при ее движении к осевой зоне.

В дальнейшем были проведены исследования по влиянию амплитуды начального импульса на динамику максимального значения давления в канале. Было установлено, что при увеличении начальной амплитуды с 0,3 до 3,0 МПа максимальное значение давления на стенке канала увеличивается от 1,0 до 25,0 МПа. Для данного распределения начальной амплитуды проанализировано место возникновения максимального давления. Координата максимального значения амплитуды давления «регистрируемая» на стенке канала до значения первоначальной амплитуды 1,0 МПа соответствует зоне пузырькового кластера. При дальнейшем увеличении амплитуды происходит незначительное смещение (порядка нескольких мм) координаты максимума амплитуды давления в сторону увеличения координаты z .

Была исследована зависимость максимального значения амплитуды давления от объемного содержания газа при прочих одинаковых параметрах системы. Установлено, что с увеличением объемного содержания газа в пузырьковой зоне с 0.001 до 0.06 происходит увеличение максимального значения амплитуды волны, реализованного на стенке канала. При объемном содержании газа, меньше 0.0007, увеличения амплитуды практически не происходит.

Проведен анализ зависимости максимального значения амплитуды давления «регистрируемая» на стенке канала от линейных размеров кольцевого пузырькового слоя. Установлено, что данная зависимость носит немонотонный характер. Результаты численных расчетов показывают, что с увеличением линейных размеров пузырькового кольца с 0.01 до 0.05 м происходит увеличение максимальной амплитуды с 1.4 до 2.8 МПа. Дальнейшее увеличение размеров завесы приводит к снижению максимальной амплитуды давления, например, при $\Delta z = 0.07$ м амплитуда давления равна 2.0 МПа.

5. Заключение

Исследована динамика волн типа «ступенька» в канале с водой, содержащей соосный пузырьковый кластер в виде тороида. На основе численных расчетов установлены следующие закономерности:

– при определенных параметрах кластера про-

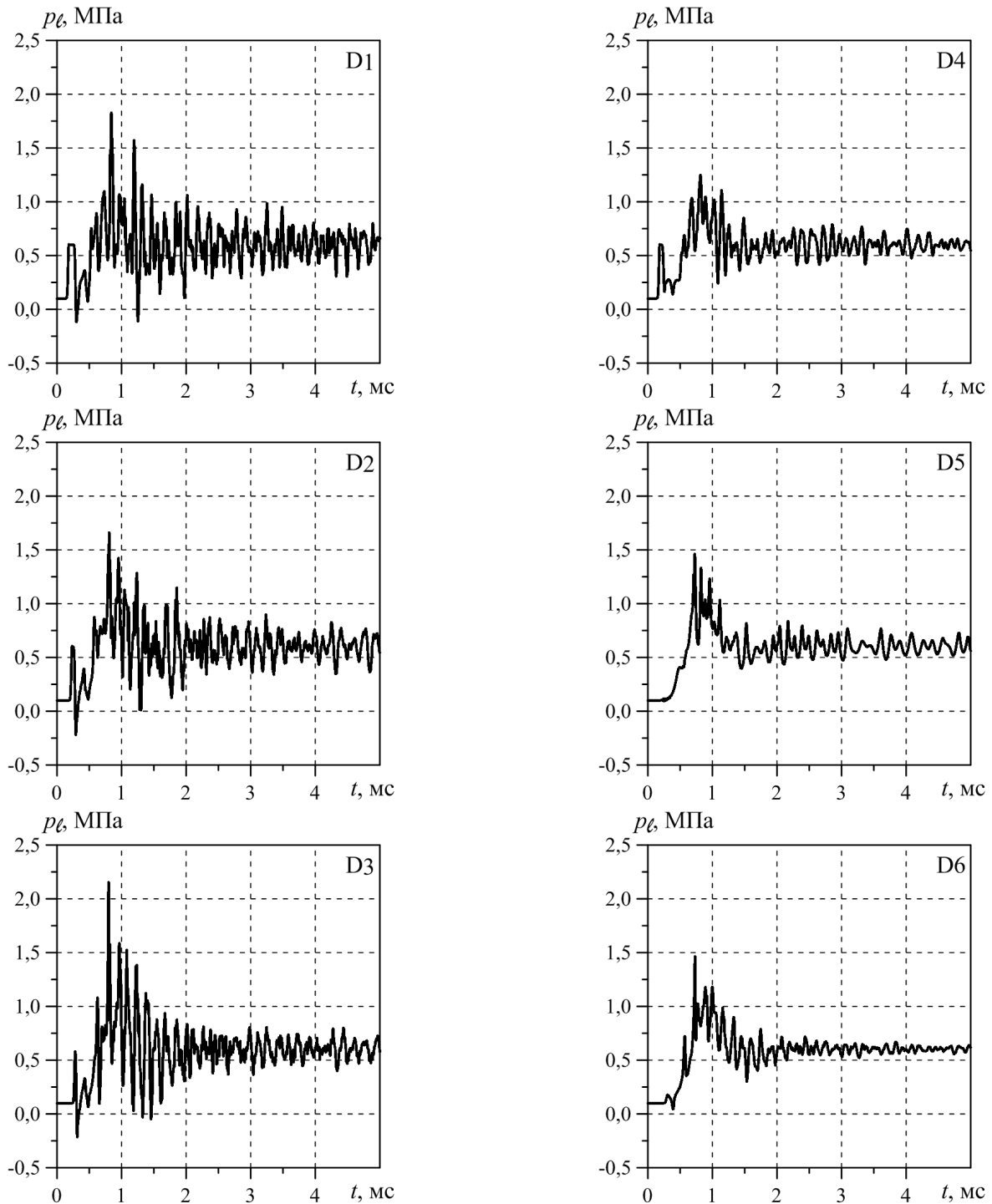


Рис. 3. Показания датчиков D_1, D_2, D_3 , расположенных на оси канала, и D_4, D_5, D_6 , расположенных на стенке на расстояниях $l_{D_1} = l_{D_4} = 0.15$ м, $l_{D_2} = l_{D_5} = 0.275$ м, $l_{D_3} = l_{D_6} = 0.35$ м от плоскости $z = 0$

исходит фокусировка волны давления на оси цилиндрического канала;

– увеличение амплитуды первоначальной волны до некоторого значения приводит к росту амплитуды результирующей волны, сфокусирован-

ной на оси канала, более, чем в десять раз. Дальнейшее увеличение амплитуды первоначальной волны приводит к насыщению амплитуды результирующей волны;

– с увеличением внутреннего радиуса кластера

амплитуда результирующей волны на оси уменьшается. Существует критическое значение внутреннего радиуса кластера, зависящее от параметров системы (геометрических размеров кластера и канала, дисперсности и объемного содержания пузырьков в кластере), при котором амплитуда результирующей волны на оси канала меньше, чем амплитуда башнеобразного всплеска внутри пузырькового кластера.

Список литературы

- [1] Кедринский В.К. Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели. Новосибирск: изд-во СО РАН, 2000. 435 с.
- [2] Галимзянов М.Н., Гималтдинов И.К., Шагапов В.Ш. Двумерные волны давления в жидкости, содержащей пузырьки // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2002. № 2. С. 139–147. eLIBRARY ID: 39274845
- [3] Кедринский В.К., Шокин Ю.И., Вшивков В.А. и др. Генерация ударных волн в жидкости сферическими пузырьковыми кластерами // Докл. РАН. 2001. Т. 381, № 6. С. 773–776. eLIBRARY ID: 44446961
- [4] Кедринский В.К., Вшивков В.А., Лазарева Г.Г. и др. Фокусировка осциллирующей ударной волны, излученной тороидальным облаком пузырьков // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2004. Т. 125, вып. 6. С. 1302–1310. eLIBRARY ID: 16264217
- [5] Донцов В.Е. Взаимодействие ударной волны со сферическим газожидкостным кластером // Прикладная механика и техническая физика. 2004. Т. 45. № 1 (263). С. 3–11. eLIBRARY ID: 17249170
- [6] Донцов В.Е. Распространение волн давления в газожидкостной среде кластерной структуры // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46. № 3 (271). С. 50–60. eLIBRARY ID: 15175928
- [7] Кедринский В.К., Вшивков В.А., Лазарева Г.Г. Формирование и усиление ударных волн в пузырьковом «шнуре» // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46. № 5. С. 46–52. eLIBRARY ID: 15175963
- [8] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Т. 1, 2 М.: Наука, 1987. 360 с., 464 с.
- [9] Шагапов В.Ш., Вахитова Н.К. Волны в пузырьковой системе при наличии химических реакции в газовой фазе // Физика горения и взрыва. 1989. № 6. С. 14–22. https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=120135&ARTICLE_ID=135857
- [10] Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975. 432 с.
- [11] Гималтдинов И.К. Двумерные волны в пузырьковой жидкости. Дисс... д-ра физ.-мат. наук. 2005. <https://dlib.rsl.ru/01003305512>
- [12] Гималтдинов И.К., Кочанова Е.Ю. Фокусировка волны давления на границе пузырьковой жидкости // Инженерно-физический журнал. 2021. Т. 94, № 2. С. 507–512. eLIBRARY ID: 45759252
- [13] Нигматулин Р.И., Шагапов В.Ш., Гималтдинов И.К., Галимзянов М.Н. Двумерные волны давления в жидкости, содержащей пузырьковые зоны // Доклады академии наук. 2001. Т. 378, № 6. С. 763–768. eLIBRARY ID: 44438446



Pressure waves in a tube filled with a liquid with a bubble region in it in the form of a torus

Galimzyanov M.N.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

Problems considering the focusing of wave energy in a liquid are related to the problem of making hydroacoustic analogs of laser systems that could absorb an external action and re-emit it with a significant increase in amplitude and energy concentration in an adjusted direction. In this paper, we study two-dimensional axisymmetric wave perturbations in a channel with water containing a toroidal coaxial cluster filled with a water-air bubble mixture. Based on the results of numerical calculations, the dependence of the maximum pressure amplitude formed in the channel on the geometric parameters of the cluster and channel, as well as on the amplitude of the initial impact, is analyzed. It has been established that in the case of a cylindrical cluster the amplitude of the wave signal behind the bubble zone is several times higher than the amplitude for the case of a cylindrical toroidal cluster.

Keywords: cylindrical channel, bubble cluster, bubble liquid, pressure wave, toroidal bubble cluster

References

- [1] Kedrinskii V. K. *Gidrodinamika vzryva: eksperiment i modeli* [Explosion hydrodynamics: experiment and models]. Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 2000. (in Russian)
- [2] Galimzyanov M.N., Gimaltdinov I.K. and Shagapov V.Sh. Two-dimensional pressure waves in a fluid with bubbles // *Fluid Dynamics*. 2002. V. 37, No. 2. Pp. 294–301. doi10.1023/A:1015818602291
- [3] Kedrinskii V. K., Shokin Yu. I., Vshivkov V. A., Dudnikova G. I., Lazareva G. G. *Doklady Akademii nauk*. 2001. Vol. 381. No. 6. Pp. 773–776. (in Russian)
eLIBRARY ID: 44446961
- [4] Kedrinskii V. K., Vshivkov V. A., Lazareva G. G. i dr. Fokusirovka osilliruyushchei udarnoi volny, izluchennoi toroidal'nym oblakom puzyr'kov. *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki*. 2004. Vol. 125. No. 6. Pp. 1302–1310. (in Russian)
eLIBRARY ID: 16264217
- [5] Dontsov V.E. Propagation of pressure waves in a gas-liquid medium with a cluster structure // *Prikladnaya mehanika i tehnikeskaya fizika*. 2004. Vol. 45. No. 1. Pp. 3–11.
eLIBRARY ID: 17249170
- [6] Dontsov V.E. Propagation of pressure waves in a gas-liquid medium with a cluster structure // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2005. Vol. 46. No. 3. Pp. 346–354.
DOI: 10.1007/s10808-005-0084-7
- [7] Kedrinskii V.K., Vshivkov V.A., Lazareva G.G. Formation and amplification of shock waves in a bubble "cord" // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2005. Vol. 46. No. 5. Pp. 652–657.
DOI: 10.1007/s10808-005-0119-0
- [8] Nigmatulin R.I. *Dynamics of Multiphase Media*. New York: Hemisphere, 1991, vols. 1 and 2. P. 360 and P. 464
- [9] Shagapov V.Sh., Vakhitova N.K. Waves in Bubble Systems in the Presence of Chemical Reactions in the Gas Phase // *Fiz. Goreniya Vzryva* 25(6), 14 (1989). (in Russian)
https://www.sibran.ru/journals/issue.php?ID=120135&ARTICLE_ID=135857
- [10] Samarsky A.A., Popov Yu.P. *Difference schemes of gas dynamics*. M.: Nauka, 1975. 432 p. (in Russian)
- [11] Gimaltdinov I.K. *Two-Dimensional Waves in Bubbly Fluids*. Doctoral Dissertation in Mathematics and Physics, Ufa (2005). (in Russian)
<https://dlib.rsl.ru/01003305512>
- [12] Gimaltdinov I.K., Kochanova E.Y. Focusing Of A Compression Wave At The Boundary Of A Bubble Liquid // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2021. T. 94. № 2. C. 490–495.
DOI: 10.1007/s10891-021-02319-4
- [13] Nigmatulin R.I., Shagapov V.Sh., Gimaltdinov I.K. et al. Two-dimensional pressure waves in a liquid containing bubble zones // *Doklady Physics*. 2001. V. 46, No. 6. Pp. 445–451.
DOI: 10.1134/1.1384945



Использование свободного ПО для визуализации результатов моделирования динамических процессов¹

Насибуллаев И.Ш.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В работе представлен обзор современных свободных инструментов динамической визуализации и даны рекомендации для выбора инструментов в зависимости от метода исследования, формы представления исходных данных и специфики исследуемого явления. Для удобства использования материалов работы приводятся исходные коды как для программ вычислительных экспериментов классических задач, так и для создания графического отображения результатов моделирования. Для анимации процесса, описываемого аналитическими формулами, предлагается использовать терминал `gif` программы `gnuplot` или Python-библиотеки визуализации. Приведен пример применения данного подхода для решения модифицированного уравнения Ферхюльста–Пирла, описывающего изменение популяции при периодическом внешнем влиянии. При изучении нестационарных распределенных в пространстве явлений результаты могут быть представлены в видеоформате. Проведено моделирование задачи естественной конвекции в горизонтальном слое жидкости или газа в программе решения дифференциальных уравнений методом конечных элементов `FreeFem++` с конвертацией результатов с помощью программ `GhostScript` и `MEncoder` в видеоформат. Приведен пример использования метода конечных разностей при моделировании автоколебательных химических реакций в среде `Qt` с сохранением кадров анимации в виде графических файлов. Для отображения результатов моделирования трехмерных динамических процессов предлагается использовать программу компьютерной графики `Blender`. Представлены моделирование и визуализация колебаний упругого маятника с помощью встроенного интерпретатора `Blender Python API`. Показан подход разделения вычислительного эксперимента и визуализации его результатов, позволяющий повысить эффективность использования вычислительных ресурсов. Предложен универсальный Python-скрипт для построения трехмерных траекторий движения объектов по внешним исходным данным.

Ключевые слова: свободное ПО, `Gnuplot`, `Matplotlib`, `FreeFem++`, `Qt`, `MEncoder`, `Blender`

1. Введение

Многие природные явления являются нестационарными и пространственно распределенными: ламинарное, вихревое или турбулентное течение в механике жидкости и газа [1, 2]; динамические процессы в многофазных и дисперсных средах; автоколебательные процессы в химии (например, реакция Белоусова–Жаботинского [3]); взаимодействие популяций в распределенных ареалах обитания в нелинейной популяционной ди-

намике [4]. Для изучения и понимания этих явлений могут потребоваться инструменты для динамической визуализации в виде анимации. В связи с этим особый интерес представляет свободное программное обеспечение (ПО).

Широкое распространение получила программа интерактивной обработки и визуализации данных `ParaView` [5–7] (например, результаты мониторинга климатических изменений [8], космологических наблюдений [9, 10], моделирования задач механики сплошных сред, инженерного проектирования). Программа может работать с большими массивами данных, используя распределенную память и одно- и многопроцессорные системы, позволяет анализировать и отображать расчетные сетки, по-

¹Работа выполнена за счет средств государственного задания № FWGZ-2019-0089.

ля переменных, их срезы в статическом и динамическом видах. *ParaView* может использоваться как постпроцессор во многих программах, например:

- в открытой интегрируемой платформе для численного моделирования механики сплошных сред *OpenFOAM* [11];
- в параметрической системе автоматизированного проектирования *FreeCAD* [12] (экспорт в формат *VTK* результатов моделирования встроенным решателем *CalculiX* [13]);
- в модульной открытой платформе численного моделирования *Salome* [14] (входит как стандартный модуль);
- в математическом пакете для решения междисциплинарных физических задач методом КЭ *Elmer* [15] (входит как стандартный модуль).

Существует большое количество библиотек для создания статической, динамической и интерактивной визуализаций данных, написанных для языка программирования *Python* [16, 17], например:

- *Matplotlib* [18–20] поддерживает двумерные и трехмерные графики и диаграммы, анимацию, отображение математических формул в стандарте \LaTeX ; может быть интегрирована в приложения *PyQt* [21, 22], *GTK+* [23], *wxWidgets* [24];
- *Seaborn* [20, 25] основана на *Matplotlib* и предлагает более удобный для использования синтаксис высокого уровня, но с меньшим количеством параметров настройки;
- *Plotly* [26] поддерживает анимацию и интерактивные элементы управления (кнопка, ползунок), интерактивное управление графикой (масштабирование, выделение области данных), \LaTeX , интеграцию в веб-станции, подключение в приложениях *Python*, *JavaScript*, *R*, *Julia*;
- библиотека декларативной статистической визуализации *Altair* [27, 28] создает интерактивную визуализацию (панорамирование, масштабирование), связанные графики, содержит инструменты преобразования данных;
- *Folium* [29] позволяет привязывать данные к локациям на интерактивных картах с возможностью подключения дополнительных плагинов (например, *Altair*).

Во многих свободных интегрированных средах разработки программ (например, *Qt* [30],

wxWidgets [24], *Lazarus* [31]) имеются инструменты для отображения и сохранения в графическом формате статических изображений. Анимация достигается перерисовкой окна приложения (для контроля скорости анимации используется таймер). Для работы с трехмерной графикой подключают библиотеки (например, анимация *OpenGL* [32] с помощью библиотек *GLUT* [33], *SDL* [34] или *VTK* [35]).

Приведем примеры использования этих сред в научных исследованиях:

- *Qt* (язык программирования *C++*): рентгеновская навигационная система [36], многозадачная и многопоточная вставляемая система управления автомобилем с графическим терминалом [37], модуль визуализации аэродинамических расчетов [38], программа для отслеживания движения сердца по изображением магнитно-резонансной томографии [39];
- *Lazarus* (язык программирования *Object Pascal*): построение трехмерной модели кровеносной системы [40].

Некоторые свободные программы моделирования физических и инженерных задач содержат либо встроенные инструменты визуализации, либо эти инструменты реализованы в постпроцессоре: программа решения дифференциальных уравнений, записанных в вариационной форме, методом конечных элементов (КЭ) *FreeFem++* [41, 42] имеет возможность двумерной и трехмерной визуализации (анимации) результатов (КЭ-сеток, полей КЭ-функций) непосредственно в процессе моделирования [43], а также их сохранения в виде файлов в формате *EPS*; *CalculiX CrunchiX* [13], предназначенный для решения задач механики сплошных сред, содержит постпроцессор *CalculiX GraphiX* [13] для трехмерной визуализации геометрии, расчетных сеток, полей КЭ-функций и их сечений с возможностью сохранения изображений в графическом формате, а для автоматизации можно использовать командный файл.

Приведем примеры использования этих программ в исследованиях динамических процессов:

- *FreeFem++* — трехмерная модель регулирования течения жидкости сжатием упругой трубки [44] и осесимметричная модель пьезоэлектрического микронасоса [45, 46]; модель генерации течения жидкости колебаниями погруженного в нее пьезопривода с поперечным изгибом [47]; моделирование взаимодействия жидкости с конструкцией и силы удара по язычковому клапану [48]; моделирование системы охлаждения микрозахвата при нестационарном течении охлаждающей жидкости и

аналитический анализ смены рабочего режима [49, 50]; параллельные вычисления при моделировании фазового перехода твердого тела в жидкость с естественной конвекцией [51]; адаптивное численное моделирование генерации и распространения волн цунами [52];

- *CalculiX* — термомеханический анализ переходных процессов в модели двигатель-система подачи вторичного воздуха [53]; автоматическая методика аэромеханического анализа лопаток турбомашин [54]; анализ влияния типа КЭ на результаты трехмерного моделирования биомеханической модели человеческого оптического нерва и глазного дна [55].

Для преобразования графических файлов из одного формата в другой можно использовать конвертеры *GhostScript* [56] или *ImageMagick* [57], или программы для работы с растровой графикой *Gimp* [58]. Для создания научной графики высокого качества можно использовать пакеты *Tikz* или *PGFPlots* настольной издательской системы *L^AT_EX* [59]. Для сборки набора изображений в видеоформат применяется конвертер *MEncoder* [60].

При изучении трехмерных объектов многие исследователи используют программу компьютерной графики *Blender* [61]. Встроенная поддержка интерпретатора языка *Python* (*Blender Python API*) позволяет не только отображать статические трехмерные объекты, но и проводить компьютерное моделирование динамических процессов с последующей визуализацией. В качестве примера приведем применение *Blender* для исследования кинематики робототехнических систем: кинематическая модель манипулятора, состоящего из четырех сегментов с одной степенью свободы между сегментами [62]; управление техническими устройствами по данным, полученным с внешних датчиков [62]; модель многосегментного манипулятора, позволяющая с помощью видеокамеры и сенсоров отслеживать движение человека [63]; моделирование движения роботизированной руки робота с параллельным управлением, через USB порт, реальным роботом [64]; трехмерная модель конфигурирования модульного колесного робота-инспектора в трубе [65]. Отметим, что в области моделирования робототехнических систем набирает популярность робототехническая операционная система (ROS) [66, 67] с модулями моделирования, управления и визуализации *Gazebo* [68].

Blender используется и в других областях исследований: кинематическая модель человеческого тела, основанная на данных трехмерного сканирования, предназначенная для разработки персо-

нализированной одежды [69]; инструмент для создания шаблона хирургической реконструкции, собранный по данным сканирования [70]; создание компьютерной модели трубы по данным лазерного сканера [71]; трехмерный анализ камнепада в зависимости от формы камней и сравнение результатов моделирования с реальным процессом [72]; динамические молекулярные модели и модели фрагмента дна Северного Ледовитого океана, построенные по расчетным и экспериментальным данным, представленным как численно, так и в форме графических изображений [73]. В работе [74] проверяется эффективность распараллеливания на 16 GPU различных модификаций модуля трассировщика пути для массового рендеринга *Blender Cycle*.

В настоящей работе представлены три набора инструментов для визуализации данных:

- *Gnuplot* и *Matplotlib* для построения научных графиков с анимацией;
- *Ghostsript* и *MEncoder* для конвертации результатов моделирования двумерных физических процессов в видеоформат;
- *Blender* для построения трехмерных динамических моделей и визуализации траекторных задач по исходным данным из внешнего источника.

Представлены примеры проведения вычислительных экспериментов методом конечных элементов в программе *FreeFem++* и методом конечных разностей в программе *Qt*, имеющие инструменты для визуализации в графическом окне в процессе моделирования с возможностью сохранения результатов в виде графических файлов.

2. Анимация графиков в Gnuplot и Matplotlib

При проведении параметрического анализа эволюционных систем удобно отображать полученную информацию в виде последовательно сменяющихся при изменении параметров графиков, т.е. провести визуализацию результатов исследования в виде анимации.

В качестве тестовой задачи выберем эволюционное дифференциальное уравнение первого порядка с начальным условием

$$\frac{dx}{dt} = ax \left(1 - \frac{x}{K}\right) (1 + c \sin(bt)), \quad x(0) = x_0. \quad (1)$$

Смысл данного уравнения следующий: в начальный момент времени имеется популяция плотностью равной x_0 ; со временем t плотность популя-

ции $x(t)$ будет изменяться в зависимости от параметров a (скорость роста популяции) и K (поддерживающая емкость среды обитания, максимальная плотность популяции); скорость роста популяции зависит от времени так, что отклонения от среднего значения гармонические с амплитудой c и периодом T ; параметр $b = 2\pi/T$ означает частоту колебаний изменения численности.

Разделяя переменные и интегрируя уравнение (1), получим решение в следующем виде:

$$x(t) = K / \left(1 + \frac{K-x_0}{x_0} \exp \left(-at - \frac{ac}{b} (1 - \cos(bt)) \right) \right). \quad (2)$$

При отсутствии колебаний скорости рождаемости при $c = 0$ или $T \rightarrow \infty$ (соответственно $b \rightarrow 0$), с учетом того, что

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(bt)}{b} = 0,$$

уравнение (1) переходит в логистическое уравнение Ферхюльста–Пирла [4] для популяции в ограниченной среде с внутренней конкуренцией.

Проведем параметрический анализ решения (2) для различных значений a , используя *Gnuplot*-терминал для создания *GIF* анимации *term gif*. Результат показан на рис. 1. Настройка терминала содержит следующие опции: графический файл поддерживает анимацию *animate*; задержка между кадрами *delay* (100 соответствует 1 секунде); размер графика *size*; шрифт текста *font*; обрезка пустых полей *crop*. Подключаем отображение сетки *set grid*:

```
set term gif animate delay 200 \
size 600, 600 font "Times-Roman,16"
set grid
```

Определяем параметры модели:

```
k=1;a=0.4;T=2.0;b=2*3.14/T;c=0.5;x0=0.5;
n=4;t1=15;
```

Задаем функцию $f(t, i) = x(t)$, соответствующую решению (2) и параметру скорости роста a для i -го расчета:

$$a = a_m i / n, \quad i = (-n, n),$$

где a_m — амплитуда измерения параметра $a \in [-a_m, a_m]$; общее количество кадров равно $2n + 1$. Отрицательные значения скорости роста a могут означать, например, ухудшение экологии среды обитания или увеличение промысла изучаемой популяции. Дополнительная функция $g(i)$ используется для цветового обозначения *set style line* характера зависимости (2) (полное вымирание, снижение популяции, ее рост или насыщение).

```
f(x,i)=k/(1.0+(k/x0-1)*exp(-a*(1.0*i/n)*\
(x+(cos(b*x)-1)/b)))
g(i)=(i==n)?1:(i<x0)?2:(i==n)?4:3
set style line 1 lw 3 lc rgb 'red'
set style line 2 lw 3 lc rgb 'pink'
set style line 3 lw 3 lc rgb 'sea-green'
set style line 4 lw 3 lc rgb 'green'
set style line 5 lw 3 lc rgb 'blue'
```

Указываем имя выходного файла *output*; диапазон значений по осям координат *xrange* и *yrange*, подписи осей *xlabel* и *ylabel* и текст *label*:

```
set output "animate.gif"
set size square
set xrange[0:20]
set yrange[0:1.29]
set xlabel "{/Times-Italic t}, годы"
set ylabel "{/Times-Italic x}"
set label 2 at 1,1.05 'Gnuplot'
set label 3 at 1,1.15 '{/Times-Italic x}'
({/Times-Italic t})' tc rgb 'blue'
```

Отследим плотность популяции в момент времени $t_1 = 15$ лет (стрелка *set arrow 1* и подпись к ней *set label 1* со значением $x(t_1)$). Кадры формируются в цикле *do for*. Дополнительно отобразим асимптоты для полного вымирания $x = 0$, нулевого изменения плотности популяции $x = x_0$ и полного насыщения $x = K$:

```
do for [i=-n:n] {
set arrow 1 from t1,x0 to t1,f(t1,i) ls 5 front
set arrow 2 from t1,0 to t1,1 ls 5 lw 1 nohead
set label 1 at x1+0.2,0.5*(x0+f(x1,i))+0.02 \
sprintf("{/Times-Italic x} = %5.3f", f(x1,i))
plot 0 w l ls 1 title 'x = 0', \
0.99*x0 w l ls 2 notitle, \
x0 w l ls 3 title 'x = x_0', \
k w l ls 4 title 'x = K', \
f(x,i) w l ls g(i) title sprintf(\
"x(t), a = %4.2f", a*(1.0*i/n))}
```

В результате выполнения скрипта создается анимированный файл *animate.gif* (отдельные кадры файла показаны на рис. 1). Формат *GIF* поддерживает одновременное использование не более 256 цветов в формате (A)RGB (по два байта на значения прозрачности, красного, зеленого и синего цветов). Прозрачный фон создается при указании опции *transparent*. Этот файл можно открыть в большинстве программ для просмотра графических файлов, а так же в веб-браузерах.

Анимацию можно встроить в *PDF*-файл с помощью *pdfLaTeX*. Для этого разбиваем файл с анимацией на графические файлы с отдельными кадрами консольной командой:

```
convert -coalesce animate.gif ani.png
```

В документе \LaTeX подключаем пакет *animate*:

```
\usepackage{animate}
```

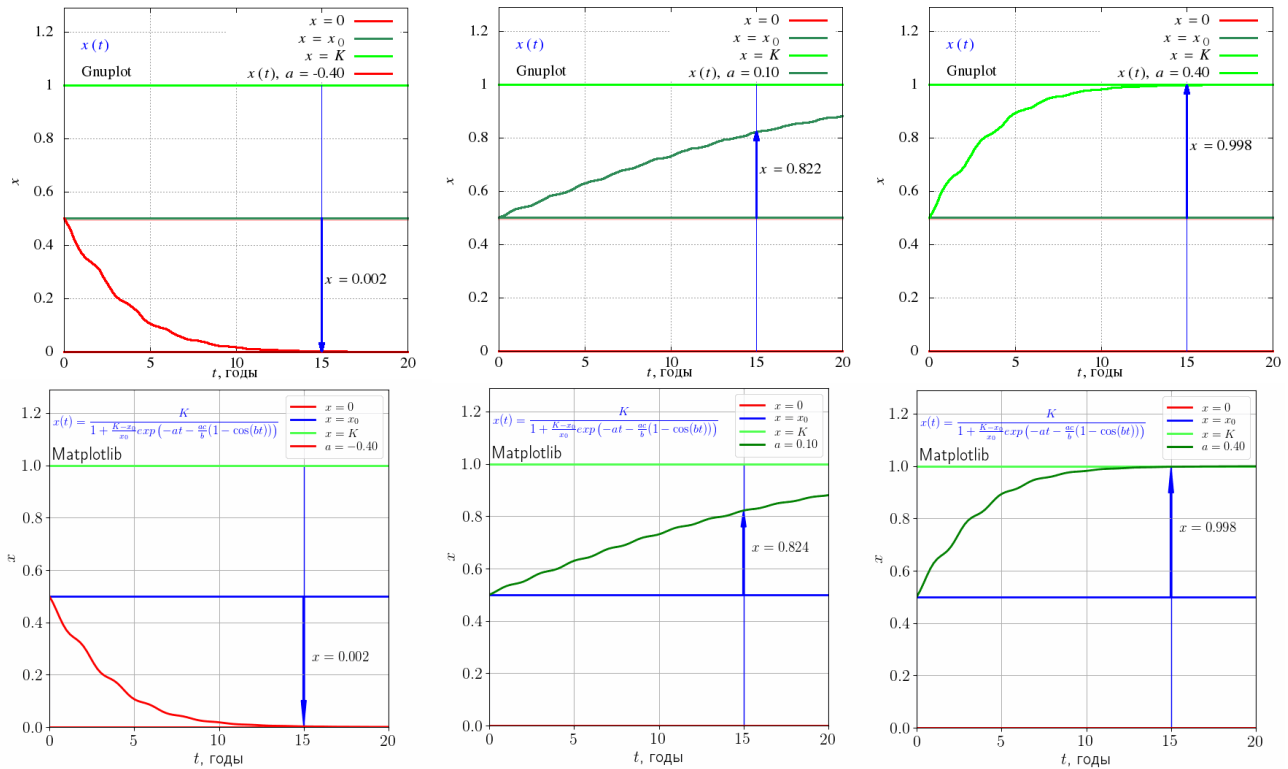


Рис. 1. Кадры анимации, построенные в Gnuplot (сверху) и Matplotlib (снизу)

Анимацию подключаем с помощью команды *animategraphics* со следующими опциями: непрерывное воспроизведение *loop*; автозапуск *autoplay*; вывод кнопок управления *controls*. Обязательные параметры: число кадров в секунду; неизменяемая часть имени файлов; номера первого и последнего кадров (можно указать подынтервал для воспроизведения группы файлов):

```
\begin{figure}[h]
\centering
\animategraphics[loop,autoplay,
width=0.49\textwidth,controls]{10}{ani/ani-}
{0}{80}
\caption{Встроенная в PDF анимация для $n=40$}
\label{fig:gnuplot:anim}
\end{figure}
```

Использование анимации в PDF-файле позволяет повысить уровень восприятия материала в презентациях и электронных лекциях. Воспроизведение анимации полностью поддерживает только программа *Adobe Acrobat* (в других программах будет показан только первый кадр анимации).

Дополнительная информация по включению аудио и видео в учебные PDF-файлы (например, лекции) доступна в работе [75].

Для сравнения с Gnuplot построим анимацию графика, используя Python-библиотеку визуализации Matplotlib (результат показан на рис. 1). В

текстовом редакторе создаем файл *animate.py*. Подключаем библиотеки, поддержку \LaTeX и кириллических символов:

```
# coding: utf-8
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import rc
rc('figure', figsize=[6,6])
rc('xtick', labelsz=16)
rc('ytick', labelsz=16)
rc('text', usetex=True)
rc('text.latex', unicode=True)
rc('text.latex', \
preamble=r'\usepackage[utf8]{inputenc}')
rc('text.latex', \
preamble=r'\usepackage[russian]{babel}')
from matplotlib.patches import Arrow
import matplotlib.animation as animation
from math import exp, cos
import numpy as np
```

Задаем параметры:

```
k=1
a0 = 0.4
da=0.1
a = -a0-da
T=2.0
b=2*3.14/T
c=0.5
x0=0.5
t1=15.0
t2=20.0
m=100
```

Запишем функцию, определяющую диапазон данных по осям, и подписи осей, используя \LaTeX формулы:

```
def init():
    ax.set_xlim(0, 20)
    ax.set_ylim(0, 1.29)
    ax.set_xlabel(r'$t$'u', годы', fontsize=16)
    ax.set_ylabel(r'$x$' , fontsize=16)
    line.set_data(xd, yd)
    return line,
```

Здесь одномерные массивы x_d и y_d задают точки кривой в виде $(x_d[i], y_d[i]), i = 0, m$.

Запишем функцию построения графика для текущего значения параметра роста $a \in [-0.4, 0.4]$, меняющегося с шагом da . Новые точки кривой обновляются в функции `set_data()`:

```
def run(j):
    global a
    global arr
    a = a+da
    for i in range(0, len(xd)):
        yd[i]=k/(1.0+(k/x0-1)*\
            exp(-a*(xd[i]+(cos(b*xd[i])-1)/b)))
    line.set_data(xd, yd)
```

Для положительного параметра роста кривая (и соответствующая линия в легенде) будет иметь зеленый цвет, а для отрицательного — красный:

```
if a > 0:
    line.set_color('g')
    legs.legendHandles[3].set_color('g')
if a < 0:
    line.set_color('r')
    legs.legendHandles[3].set_color('r')
```

Обновляем стрелку, пояснительный текст со значениями популяции $x(t_1)$ и значение параметра a в легенде:

```
arr.remove()
arr = ax.add_patch(Arrow(t1,x0,0,\
    yd[75]-x0,width=0.5, color='b'));
txt.set_y((x0+yd[75])/2.0)
txt.set_text(r'$x = '+str("{:5.3f}" .\
    format(yd[75]))+'$')
legs.texts[3].set_text(r'$a = '+\
    str("{:4.2f}" .format(a))+r'$')
return line,
```

В основном коде программы создаем рисунок `fig`, оси `ax`, кривую `line`, стрелку `arr`, вспомогательные линии с постоянным значением для нулевой, средней и максимальной популяций, пояснительный текст со значением популяции $x(t_1)$ `txt` и надпись, содержащую большую формулу в формате \LaTeX . Все кривые дополняются меткой `label` для автоматического построения легенды `legs`:

```
fig, ax = plt.subplots()
ax.grid()
ax.plot([t1, t1], [0, 2*x0], 'b', lw=1)
ax.plot([0, t2], [0, 0], 'r', lw=2,\
    label='$x=0$')
ax.plot([0, t2], [x0, x0], 'b', lw=2,\
    label='$x=x_0$')
ax.plot([0, t2], [2*x0, 2*x0], '#44FF44',\
    lw=2, label='$x=K$')
line,=ax.plot([], [], color='0', lw=2, label='$a$')
arr = ax.add_patch(Arrow(0,0,t1,x0, color='b'))
txt = ax.text(t1+0.5,x0+0.01,'0', fontsize=14)
legs = ax.legend(loc=1, prop={'size': 12},\
    labelspacing=0.0)
ax.text(0.2,1.10,r'$\displaystyle x(t)=\
r'\frac{K}{1+\frac{K-x_0}{x_0}\exp\left(\
r'-at-\frac{ac}{b}\bigl(1-\cos(bt)\bigligr)\
r'\right)}$', color='b', fontsize=12)
ax.text(0.2,1.02,r'Matplotlib',\
    fontsize=16)
```

Создаем массив с линейным распределением x_d и соответствующий массив y_d :

```
xd = np.linspace(0,t2,m)
yd = [0] * m
```

Задаем аргументы для функции построения анимации: имя рисунка `fig`; функция, которая вызывается в начале каждого кадра (обновление координат точек кривой для нового параметра a) `run`; количество кадров; время задержки между кадрами в миллисекундах `interval`; функция инициализации графика `init` и запрет циклического воспроизведения `repeat`:

```
ani = animation.FuncAnimation(fig, run,\
    abs(int(2*a/da))-1, interval=10,\
    init_func=init, repeat=False)
plt.show()
```

Анимацию сохраняем в файл `ani.gif`:

```
a=-a0-da
writergif = animation.PillowWriter(fps=10)
ani.save("ani.gif", writer=writergif)
plt.close()
exit()
```

Скрипт запускаем в консоли:

```
python animate.py
```

Представленные скрипты для `Gnuplot` и `Matplotlib` создают графику высокого качества. `Matplotlib` за счет поддержки математических формул \LaTeX может создавать более сложное и качественное текстовое содержание (в `Gnuplot` формулы \LaTeX используются в терминале `term epslatex`, который не поддерживает анимацию). В отличие от `Gnuplot` (близкого по функциональности скрипта) `Matplotlib` требует значительно больше строк кода (77 вместо 27) и имеет более сложный синтаксис.

Для сравнения используемых вычислительных ресурсов были запущены оба скрипта для построения анимационного файла, содержащего 801 кадр с разрешением 600×600 точек. *Gnuplot* создал файл анимации размером 6.8 МБ за 6.6 с, используя 3.4 МБ оперативной памяти (ОЗУ). *Matplotlib* создал файл размером 31.7 МБ за 115 с, используя 1.5 ГБ ОЗУ. При запуске скрипта *Matplotlib* без создания файла (только анимация в графическом окне) продолжительность визуализации (процессорное время, уменьшенное на величину суммарной задержки между кадрами) составила 34 с с использованием 65.9 МБ ОЗУ. Таким образом, для динамической анимации данных, полученных из аналитических зависимостей или текстовых файлов с данными, *Gnuplot* использует вычислительные ресурсы более эффективно при сопоставимом качестве визуализации.

Отметим, что вычислительные возможности *Gnuplot* ограничены. Для анимации более сложных наборов данных (результаты численных расчетов, базы данных экспериментов) библиотека *Matplotlib* или другие *Python* библиотеки визуализации имеют преимущество, поскольку базовые возможности этих библиотек значительно расширяются функциональностью языка программирования *Python* (например, использованием численных и научных модулей). Важной особенностью этих библиотек является возможность их встраивания в другие приложения (например, в графические интерфейсы, написанные на *Qt*, *GTK*, *Jupiter* и др.).

3. Динамическая визуализация FreeFem++/GhostScript/MEncoder

Рассмотрим нестационарную пространственную задачу естественной тепловой конвекции в горизонтальном плоском слое жидкости или газа — конвекцию Рэлея–Бенара [76]. Область имеет размер $L_x \times L_y$. Геометрия задачи показана на рис. 2.

В безразмерном виде уравнения для скорости жидкости $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ имеют вид [77]:

$$\frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + Ra T \mathbf{e}_y + \Delta \mathbf{u}, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \varepsilon_p p,$$

где t — время; ∇ и Δ — операторы набла и Лапласа; p — давление; T — температура среды относительно температуры окружающей среды; \mathbf{e}_y — единичный орт вдоль оси Oy ; $\varepsilon_p = 10^{-6}$ — малый параметр, используемый для стабилизации численной схемы; безразмерные параметры Pr и Ra — числа

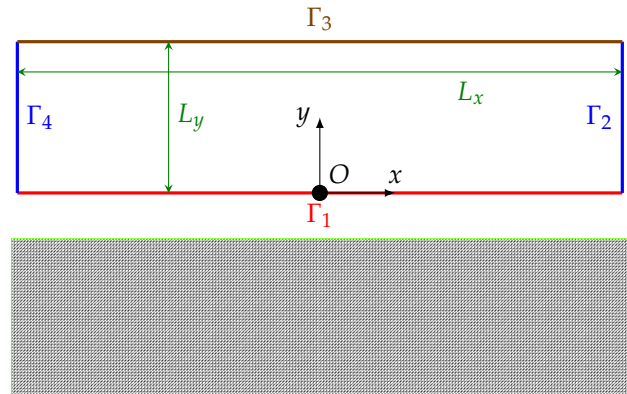


Рис. 2. Геометрия задачи и граничные условия (сверху) и расчетная сетка (снизу)

Прандтля и Рэлея:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad Ra = \frac{g\beta L^3}{\nu\alpha} \delta T.$$

Здесь ν — кинематическая вязкость; α — коэффициент температуропроводности; g — ускорение свободного падения; β — коэффициент объемного расширения; L — характерный размер (высота слоя); δT — перепад температуры между нижней и верхней границами слоя. Плотность ρ зависит от температуры по закону (приближение Буссинеска)

$$\rho(T) = \rho_0(1 - \beta T).$$

Уравнение переноса тепла в безразмерной форме имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \Delta T. \quad (4)$$

Начальные условия соответствуют неподвижной жидкости $\mathbf{u} = 0$ с температурой $T = T_0$. Граничные условия для жидкости определяются условием залипания $\mathbf{u} = 0$ на нижней границе Γ_1 и на боковых границах Γ_2 и Γ_4 . На верхней границе Γ_3 вертикальная компонента скорости $u_y = 0$. Температура на верхней границе равна температуре окружающей среды $T = T_0$, а на нижней — $T = T_0 + \delta T$.

Решим уравнение с помощью программы для решения дифференциальных уравнений методом конечных элементов *FreeFem++* [42]. Результаты моделирования показаны на рис. 3.

Уравнения запишем в вариационной форме, дискретизацию по времени проведем по неявной схеме Эйлера.

Задаем длину L_x и высоту L_y слоя и количество узлов n_x и n_y в направлении Ox и Oy :

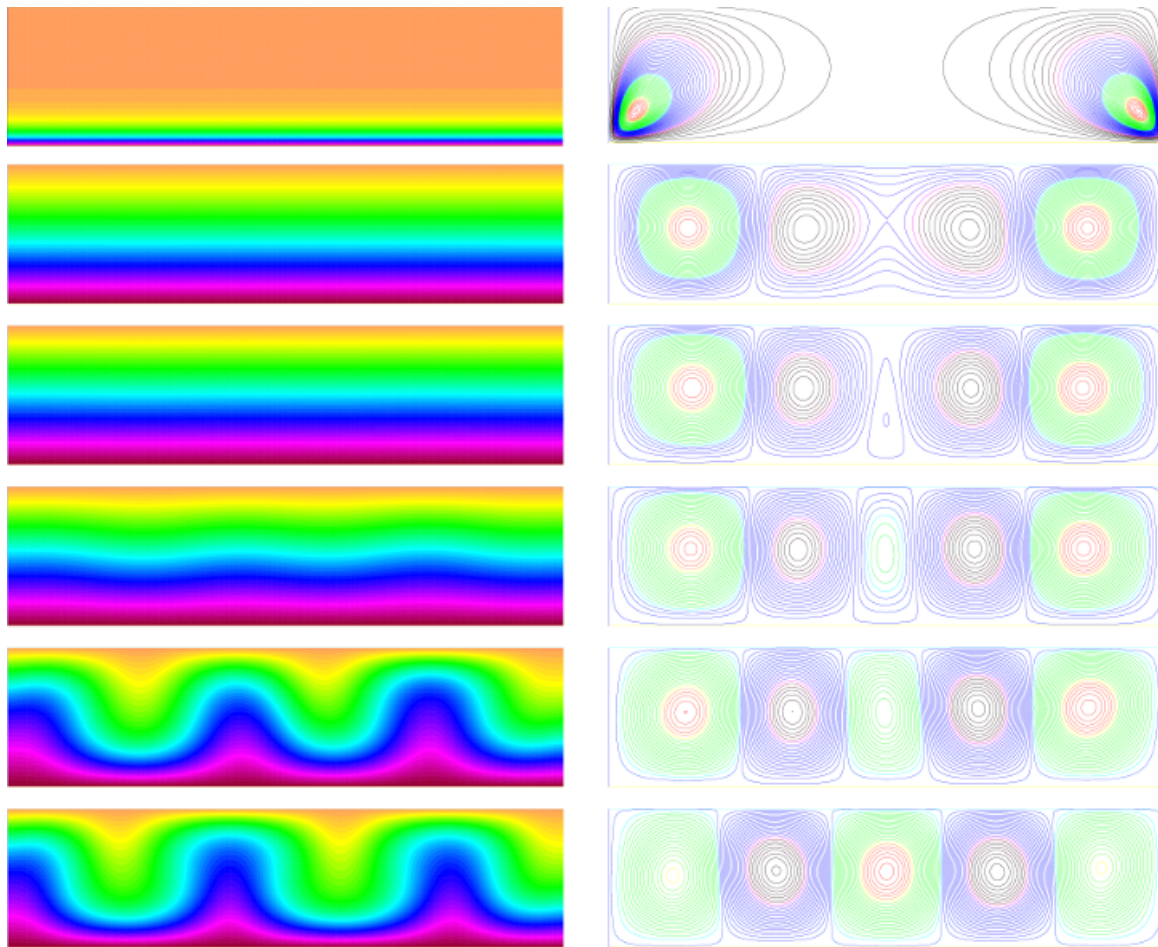


Рис. 3. Распределение температуры (слева) и линии тока (справа) для кадров {1, 5, 10, 15, 20, 60} (сверху вниз)

```
real lx=4, ly=1;
int nx=200, ny=50;
```

Создаем расчетную сетку размером $L_x \times L_y$ и записываем ее изображение в графический файл *mesh.eps* (см. рис. 2):

```
mesh Th=square(nx, ny, [lx*x, ly*y]);
plot(Th, ps="mesh.eps");
```

Задаем следующие параметры: числа Прандтля и Рэлея; коэффициент искусственной сжимаемости ϵ_p в уравнении неразрывности (второе уравнение (3)); шаг по времени δt и коэффициент при полной производной по времени в уравнении Навье–Стокса $\tau = 1/(\delta t Pr)$ (левая часть первого уравнения (3)); температуры нижней T_1 и верхней T_2 границ; количество шагов по времени *steps* (обычно полное время вычислительного эксперимента $steps \cdot \delta t$ имеет тот же порядок, что и параметры, характеризующие процесс, например, характерное время релаксации скорости). Результаты расчетов будем записывать в файл тогда, когда текущий шаг

по времени кратен переменной *save*:

```
real pr = 0.8, ra=3000.0, epsp=1.e-6;
real dt=0.01, tau=1/(dt*pr);
real T0=0, T1=1.0;
real nc, np, eps;
cout << "Pr=" << pr << ", Ra=" << ra << endl;
int steps=300, save=5, k=0;
```

Определяем переменные и начальные условия: температура, давление, функция линии тока и соответствующие им пробные функции задаются конечно-элементными функциями первого порядка *P1*, а компоненты скорости течения жидкости и соответствующие им пробные функции — функциями второго порядка *P2*:

```
fespace Mh(Th, P1);
Mh T=T0, Tp=T0, dT=0, vT, p, vp, s, vs;
fespace Xh(Th, P2);
Xh ux=0, uy=0, uxp=0, uyp=0, ua, vx, vy;
```

Определяем количество интервалов в легенде *nb* и их значения *visou* для модуля скорости, а также область отображения для графических файлов:

```
int nb=51;
real[int] visou(nb);
for (int j = 0; j < visou.n; j++)
    visou[j] = 14.0*j/(visou.n-1);
func bbs = [[-0.01,-0.01],[1.01*lx,1.01*ly]];
func bbu = [[-0.01,-0.01],[1.2*lx,1.01*ly]];
string filePost;
```

В главном цикл программы решаем уравнения теплопроводности (4)

```
int i;
for (i=0; i<=steps; i++){
    solve Heat(T, vT, solver=UMFPACK,init=i) =
    int2d(Th) ( tau*T*vT
    +(dx(T)*dx(vT) + dy(T)*dy(vT))
    +int2d(Th)(-tau*convect([uxp, uyp],-dt, Tp)*vT)
    +on(1,T=T1)+on(3,T=T0);
    Tp=T;
```

и уравнения гидродинамики (3):

```
solve NSPicard(ux, uy, p, vx, vy, vp,
    solver=UMFPACK,init=i) =
    int2d(Th) (
    tau*( ux*vx + uy*vy )
    + ( dx(ux)*dx(vx) + dy(ux)*dy(vx)
    + dx(uy)*dx(vy) + dy(uy)*dy(vy) )
    - p*(dx(vx)+dy(vy))
    + epsp *p*vp + (dx(ux)+dy(uy))*vp)
    - int2d(Th) (
    tau*( convect([uxp, uyp],-dt, uxp)*vx
    + convect([uxp, uyp],-dt, uyp)*vy)
    - int2d(Th) ( ra * Tp * vy )
    +on(1,2,4, ux=0, uy=0)+on(3, uy=0);
    uxp=ux; uyp=uy;
```

Определяем модуль скорости по формуле

$$u_a = \sqrt{u_x^2 + u_y^2},$$

норму модуля скорости в виде

$$n_c = \max(|u_a|)$$

и сходимость к стационарному решению с помощью относительного изменения n_c за один шаг по времени:

```
ua=sqrt(ux^2+uy^2);
np=nc;
nc=ua[.].linfy;
if (nc) eps=100.0*abs(1.0-np/nc);
cout << "i=" <<i<< ", Ra=" <<ra<< ", ua.max="
<< ua[.].max << ", eps=" << eps << "%" << endl;
```

Функция тока определяется решением уравнения [80]

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} = \Delta s,$$

с граничными условиями на твердых стенках $s = 0$:

```
solve streamlines(s,vs,solver=UMFPACK) =
    int2d(Th)( dx(s)*dx(vs) + dy(s)*dy(vs))
    + int2d(Th)( vs*(dy(ux)-dx(uy)))
    + on(1,2,3,4,s=0.0);
```

На каждом *save*-шаге по времени сохраняем результаты для температуры, модуля скорости, вектора скорости и линии тока в графические файлы (перед запуском программы необходимо создать соответствующие папки):

```
if (i % save == 0) {
    filePost=(k<10?"0:"")+ (k<100?"0:"")
    +k+".eps";
    plot(T,fill=1, nbiso=nb, bb=bbs,
    ps="t/"+filePost);
    plot(ua,fill=1,value=1, viso=visou,
    nbiso=visou.n, ps="a/"+filePost);
    plot([ux,uy],coef=0.5, ps="c/"+filePost);
    plot(s,nbiso=nb, bb=bbs, ps="s/"+filePost);
    k++;}
}
```

После того, как программа создала набор *eps*-файлов, их можно объединить в видеофайл с помощью скрипта (конвертируем *eps* файлы в формат *png* с помощью *GhostScript*, а затем собираем видеофайл из *png* фреймов с помощью *MEncoder*):

```
cd ./t/
for i in $( ls *.eps ); do
    eps2eps $i $i.2eps
    gs -dSAFER -dBATCH -dNOPAUSE -dEPSCrop -r300 \
    -sDEVICE=pngal pha -dBackgroundColor=16#FFFFFF \
    -sOutputFile=$i.png $i.2eps
done
mencoder mf://*.png -mf fps=5:type=png -ovc \
    lavc -lavcopts vcodec=mpeg4:vbitrate=500000 \
    -o t.avi
rm -f *.2eps
rm -f *.png
mv t.avi ../t.avi
cd ..
```

Величина $save*dt$ определяет промежуток времени процесса между двумя кадрами. Параметр $fps=N$ означает, что видео будет показывать N кадров в секунду, т.е. время процесса t_s соотносится с реальным временем t_r как $t_s = save \cdot dt / N \cdot t_r$.

4. Динамическая визуализация Qt/MEncoder

Рассмотрим инструменты визуализации Qt (среды разработки кроссплатформенного программного обеспечения на языке программирования C++) на примере классической автоколебательной химической реакции Белоусова–Жаботинского [78]. Простейшей математической формулировкой, допускающей колебательный режим, является модель брюсселятора [79], которая

имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} X_t &= A - (B + 1)X + X^2Y = f_1(X, Y), \\ Y_t &= BX - X^2Y = f_2(X, Y), \end{aligned} \quad (5)$$

где A и B — постоянные концентрации реагентов, а X и Y — переменные; $X_t = \partial X / \partial t$ и $Y_t = \partial Y / \partial t$ — частные производные по времени t .

Уравнения реакции (5) имеют одну особую точку: $X_f = A$, $Y_f = B/A$. При $B \leq 1 + A^2$ данная точка устойчива (при $t \rightarrow \infty$ концентрации $X \rightarrow X_f$ и $Y \rightarrow Y_f$). При $B > 1 + A^2$ особая точка неустойчива и на фазовой плоскости (X, Y) решение уравнений (5) образует предельный цикл (автоколебательная химическая реакция).

Уравнения (5) с начальными условиями $X(0) = 0.5$, $Y(0) = 2$ решались явным методом Эйлера на промежутке времени $[0, t]$:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= X_k + \tau f_1(X_k, Y_k), \\ Y_{k+1} &= Y_k + \tau f_2(X_k, Y_k), \end{aligned} \quad (6)$$

где индексы k и $k + 1$ относятся к предыдущему и текущему моменту времени; τ — шаг по времени.

Для изучения поведения пространственно распределенной системы строилась сетка размером $N \times N$ с узлами (x_i, y_j) , $i = 0, \dots, N - 1$, $j = 0, \dots, N - 1$. Для каждого узла записывались уравнения реакции-диффузии:

$$\begin{aligned} X_t(x_i, y_j) &= f_1(X(x_i, y_j), Y(x_i, y_j)) + \\ &+ D_1(X_{xx}(x_i, y_j) + X_{yy}(x_i, y_j)), \\ Y_t(x_i, y_j) &= f_2(X(x_i, y_j), Y(x_i, y_j)) + \\ &+ D_2(Y_{xx}(x_i, y_j) + Y_{yy}(x_i, y_j)), \end{aligned} \quad (7)$$

где D_1 и D_2 определяют скорость диффузии реагентов X и Y ; $X_{xx} = \partial^2 X / \partial x^2$ и $X_{yy} = \partial^2 X / \partial y^2$ — частные производные по координатам x и y .

Начальные условия для X и Y в каждом узле (x_i, y_j) задавались следующим образом:

$$X(x_i, y_j) = X(t_r), \quad Y(x_i, y_j) = Y(t_r), \quad (8)$$

где $t_r = \text{rand}(0, t)$ — случайный момент времени на интервале $[0, t]$, а $X(t_r)$ и $Y(t_r)$ — соответствующие этому моменту времени концентрации, полученные решением уравнений реакции (6). Для каждого узла значение t_r определялось заново.

В качестве краевых условий заданы периодические граничные условия:

$$x_{-1} = x_{N-1}, \quad x_N = x_0, \quad y_{-1} = y_{N-1}, \quad y_N = y_0. \quad (9)$$

Уравнения (7) с начальными (8) и граничными условиями (9) решались методом конечных разностей (правая разность для производной по времени; центральная разность для второй производной по координате) в два этапа.

На первом этапе рассчитывалась диффузионная часть уравнений (7):

$$\begin{aligned} X_{k,D}(x_i, y_j) &= \tau \frac{D_1}{L^2} (X_k(x_{i-1}, y_j) + X_k(x_{i+1}, y_j) + \\ &+ X_k(x_i, y_{j-1}) + X_k(x_i, y_{j+1}) - 4X_k(x_i, y_j)), \\ Y_{k,D}(x_i, y_j) &= \tau \frac{D_2}{L^2} (Y_k(x_{i-1}, y_j) + Y_k(x_{i+1}, y_j) + \\ &+ Y_k(x_i, y_{j-1}) + Y_k(x_i, y_{j+1}) - 4Y_k(x_i, y_j)), \end{aligned} \quad (10)$$

где L — расстояние между соседними узлами по x и y .

На втором этапе решались уравнения реакции с добавлением ранее рассчитанной диффузии (10):

$$\begin{aligned} X_{k+1}(x_i, y_j) &= X_k(x_i, y_j) + \\ &+ \tau (f_1(X_k(x_i, y_j), Y_k(x_i, y_j)) + X_{k,D}(x_i, y_j)), \\ Y_{k+1}(x_i, y_j) &= Y_k(x_i, y_j) + \\ &+ \tau (f_2(X_k(x_i, y_j), Y_k(x_i, y_j)) + Y_{k,D}(x_i, y_j)). \end{aligned} \quad (11)$$

Результаты моделирования показаны на рис. 4. В начале, за счет диффузии происходит локальное выравнивание концентраций. Затем образуются области с четко выраженной структурой. Со временем происходит рост этих структур. После выхода реакции на периодический режим образуются динамические волны концентрации реагентов.

Подготовим проект в Qt, который будет показывать анимацию в графическом окне, а также сохранять кадры в заданном графическом формате. Создадим текстовый файл *main.cpp*. Подключаем библиотеки:

```
#include <QtGui/QApplication>
#include <QWidget>
#include <QPainter>
#include <QImage>
#include <QString>
#include <cmath>
#include <iostream>
```

Создаем производный от класса *QWidget* класс окна приложения *iW*:

```
class iW : public QWidget{
public:
    iW(QWidget *parent = 0);
    ~iW();
```

Событие *paintEvent* отвечает за перерисовку графического окна:

```
protected:
    void paintEvent(QPaintEvent *event);
```

Задаем параметры и переменные:

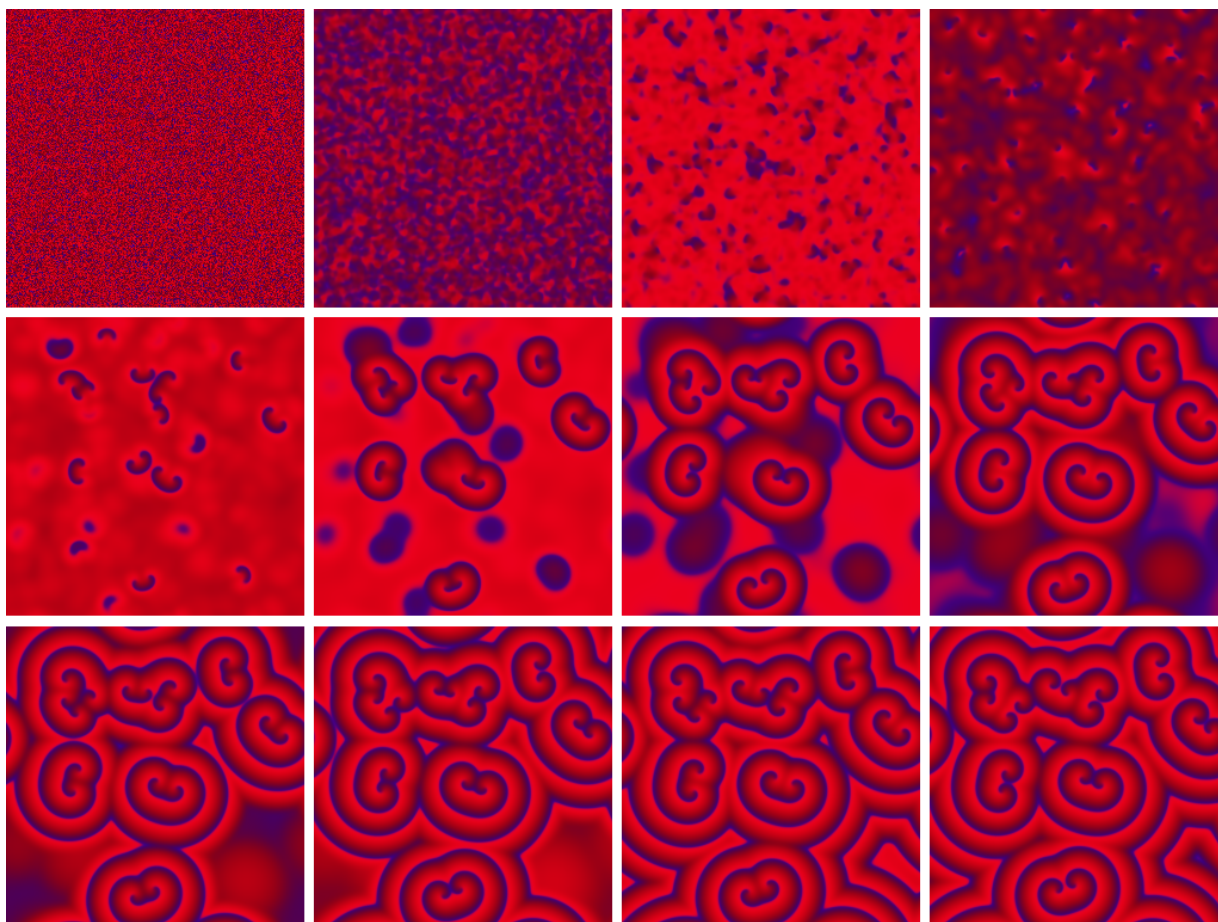


Рис. 4. Распределение концентрации реагентов X (синий) и Y (красный) в модели брусслейатора для кадров $\{1, 5, 10, 20, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 400, 500\}$

```
private:
int N=250,M=5000,P=1000,S1=10,S2=10;
double A=1,B=3,D1=1,D2=0.05,S=50,dt=0.1;
double** X;
double** Y;
double** XD;
double** YD;
```

Создаем объект класса *QImage*, отвечающий за инструмент рисования *Qt*:

```
QImage *image;
```

Определяем функции f_x , f_y для вычисления реакционной части уравнений (5), функции вычисления полной системы уравнений в текущий момент времени $solve$ и полного цикла анимации $animate$:

```
double fx(double x,double y)
{return A-(B+1)*x+x*x*y;};
double fy(double x,double y)
{return B*x-x*x*y;};
void solve();
void animate();
};
```

Поскольку для переменных X , Y , X_D , Y_D используется динамическое выделение памяти, опишем деструктор класса:

```
iW::~iW(){
for(int i=0; i<N; ++i) {
delete [] X[i]; delete [] XD[i];
delete [] Y[i]; delete [] YD[i];
}
delete [] X; delete [] XD;
delete [] Y; delete [] YD;
}
```

В конструкторе выделяем память для динамических переменных:

```
iW::iW(QWidget *parent) : QWidget(parent) {
X = new double*[N]; X0 = new double*[N];
Y = new double*[N]; Y0 = new double*[N];
for(int i=0; i<N; ++i) {
X[i]=new double[N]; X0[i]=new double[N];
Y[i]=new double[N]; Y0[i]=new double[N];
}
}
```

Задаем начальное пространственное распределение концентраций реагентов (9):

```
double xx[P],yy[P]; xx[0]=0.5; yy[0]=2.0;
for (int i = 0; i < P-1; i++){
  xx[i+1] = xx[i] + 0.01*fx(xx[i],yy[i]);
  yy[i+1] = yy[i] + 0.01*fy(xx[i],yy[i]);
};
int c;
for (int i = 0; i < N; i++)
  for (int j = 0; j < N; j++){
    c=rand()%P; X[i][j]=xx[c]; Y[i][j]=yy[c];
  };
```

Задаем размеры изображения, создаваемого объектом класса *QImage*, и размеры главного окна *setFixedSize*:

```
image = new QImage(N,N,QImage::Format_RGB32);
setBackgroundRole(QPalette::Base);
setAutoFillBackground(true);
setFixedSize(N,N);
show();
animate();
this->setAttribute(Qt::WA_DeleteOnClose);
}
```

Функция *show* отображает главное окно. Эту функцию нужно вызывать до начала рисования результатов моделирования в окне приложения, иначе окно станет видимым только после отработки всего цикла моделирования. Параметр *Qt::WA_DeleteOnClose* означает, что при закрытии окна будет запущен деструктор класса.

Каждый раз, когда возникает событие *paintEvent*, окно будет перерисовываться с учетом текущего распределения концентраций реагентов *X* (доля синего) и *Y* (доля красного) с масштабным множителем *S*:

```
void iW::paintEvent(QPaintEvent *) {
  QPainter painter(this);
  for (int i = 0; i < N; i++)
    for (int j = 0; j < N; j++) {
      painter.setPen(
        QColor(Y[i][j]*S,0,X[i][j]*S));
      painter.drawPoint(i,j);
    }
}
```

В цикле по времени вызываем функцию *solve* и отображаем полученные результаты следующим образом: каждый *S2* шаг по времени вызываем функцию *repaint*, что создает событие *paintEvent*; каждый *S1* шаг по времени создаем изображение *QImage* с результатом моделирования для текущего шага по времени и сохраняем в файл формата *PNG* в папку *data*:

```
void iW::animate() {
  QString str;
  for (int f = 0; f < M; f++) {
    solve();
    if (f%S2 == 0) repaint();
    if (f%S1 == 0) {
      for (int i = 0; i < N; i++)
```

```
for (int j = 0; j < N; j++)
  image->setPixel(i,j,
    qRgb(Y[i][j]*S,0,X[i][j]*S));
  str.sprintf("./data/%04d.png", f/S1);
  image->save(str, "PNG", 100);
}
}
```

В функции *solve* сначала вычисляем диффузионную часть уравнений (10):

```
void iW::solve() {
  for (int i = 0; i < N; i++)
    for (int j = 0; j < N; j++) {
      int ip=(i==N-1)?0:i+1, jp=(j==N-1)?0:j+1;
      int im=(i==0)?N-1:i-1, jm=(j==0)?N-1:j-1;
      X0[i][j]=D1*(X[ip][j]+X[im][j]+X[i][jp]
        +X[i][jm]-4.0 * X[i][j]);
      Y0[i][j]=D2*(Y[ip][j]+Y[im][j]+Y[i][jp]
        +Y[i][jm]-4.0 * Y[i][j]);
    }
}
```

Затем реакцию с добавлением диффузии (11):

```
for (int i = 0; i < N; i++)
  for (int j = 0; j < N; j++) {
    X[i][j]+=(fx(X[i][j],Y[i][j])+X0[i][j])*dt;
    Y[i][j]+=(fy(X[i][j],Y[i][j])+Y0[i][j])*dt;
  }
}
```

Основная функция создает главное окно приложения в виде объекта класса *iW*:

```
int main(int argc, char *argv[]) {
  QApplication app(argc, argv);
  iW *w = new iW;
  w->show();
  return app.exec();
}
```

Для компиляции программы создаем файл *brusselator.pro*:

```
TEMPLATE = app
SOURCES += main.cpp
```

Создаем *Makefile*, содержащий инструкции для компиляции программы в консоли (запускается один раз):

```
qmake
```

Компиляция проводится командой (запускается после каждого изменения исходного кода программы)

```
make
```

Сборка видеофайла осуществляется скриптом

```
cd data
mencoder mf://*.png -mf fps=25:type=png -ovc\
lavc -lavcopts vcodec=mpeg4:vbitrate=500000\
-o brusselator.avi
mv brusselator.avi ..
```

5. Трехмерная анимация в Blender

Рассмотрим следующую динамическую задачу: груз массой m подвешен в поле силы тяжести с ускорением свободного падения g на невесомом растяжимом стержне с коэффициентом упругости k и длиной ℓ_0 . При $k \rightarrow \infty$ система представляет собой математический маятник с собственной частотой колебаний $f_g = \sqrt{g/\ell_0}$. При конечном значении k в поле силы тяжести система представляет собой пружинный маятник с частотой колебаний в вертикальном направлении $f_k = \sqrt{k/m}$. При отклонении стержня в вертикальной плоскости на угол α движение груза будет представлять суперпозицию колебаний угла отклонения $\alpha(t)$ и длины стержня $\ell_0 + \ell(t)$, где t — время; ℓ — изменение первоначальной длины стержня ℓ_0 .

При математическом описании данного динамического процесса выберем в качестве обобщенных координат угол $\alpha(t)$ и удлинение стержня $\ell(t)$. Лагранжиан \mathcal{L} механической системы представляет собой разность кинетической и потенциальной энергии:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{\ell}^2 + (\ell_0 + \ell)^2\dot{\alpha}^2) - \frac{1}{2}k\ell^2 + mg(\ell_0 + \ell)\cos\alpha, \quad (12)$$

где \dot{x} обозначает частную производную по времени. Уравнения движения представляют собой систему уравнений Эйлера–Лагранжа [81]:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ell} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\ell}} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}} = 0. \quad (13)$$

Подставляя (12) в (13) получим уравнения движения:

$$\begin{aligned} \ddot{\ell} &= (\ell_0 + \ell)\dot{\alpha}^2 - f_k^2\ell + g\cos\alpha, \\ \ddot{\alpha} &= -\frac{g}{\ell_0 + \ell}\sin\alpha - \frac{2\dot{\ell}}{\ell_0 + \ell}\dot{\alpha}, \end{aligned} \quad (14)$$

где \ddot{x} означает вторую частную производную по времени.

Начальные условия задают величины начального угла отклонения и угловой скорости, начальное удлинение стержня и скорости растяжения или сжатия:

$$\alpha(0) = \alpha_0, \quad \dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}_0, \quad \ell(0) = \ell_1, \quad \dot{\ell}(0) = \dot{\ell}_1. \quad (15)$$

Дискретизация уравнений (15) по времени выполнялась по схеме Эйлера первого порядка с введением новых переменных для снижения порядка дифференциальных уравнений

$$y_i = \dot{x}_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{\tau}, \quad \ddot{x}_i = \dot{y}_i,$$

где индексы $i-1$ и i означают предыдущий и текущий момент времени, а τ — шаг по времени.

Моделирование уравнений (14) с граничными условиями (15) проведем на языке программирования *Python* с визуализацией динамики процесса в программе трехмерного моделирования *Blender*. Результаты моделирования показаны на рис. 5.

Приведем код *Python*-скрипта с комментариями. Вначале подключаем библиотеки для работы с объектами *Blender* и математические функции:

```
import bpy
from math import pi, sin, cos
from mathutils import Vector
```

Во время отладки приходится запускать скрипт несколько раз, что приводит к созданию объектов-клонов, засоряющих рабочее пространство. Этого можно избежать, если поместить в начале скрипта код, удаляющий все объекты заданного типа, т.е. очищающий рабочее пространство от результатов предыдущего запуска:

```
for o in scene.objects:
    if o.type == 'MESH':
        o.select = True
    else:
        o.select = False
bpy.ops.object.delete()
```

Описываем переменные и задаем начальные условия (15) с $\alpha_0 = \pi/6$, $\dot{\alpha}_0 = 0$, $\ell_1 = 0$, $\dot{\ell}_1 = 0$, $\tau = 0.01$:

```
g = 9.8
w = 100.0
l0 = 1
l = 0
lp = l
l1 = 0
l1p = l1
a = pi/6.0
ap = a
a1 = 0
a1p = a1
r0 = 0.01
r1 = 0.005
r2 = 0.01
dt = 0.01
```

Определяем продолжительность процесса в кадрах:

```
st = 1000
scene = bpy.context.scene
scene.frame_start = 0
scene.frame_end = st
```

Строим модель маятника, состоящего из сферы (точка подвеса), стержня и сферы, обозначающей груз. Все три элемента объединяем в один объект. Порядок создания объектов важен, поскольку

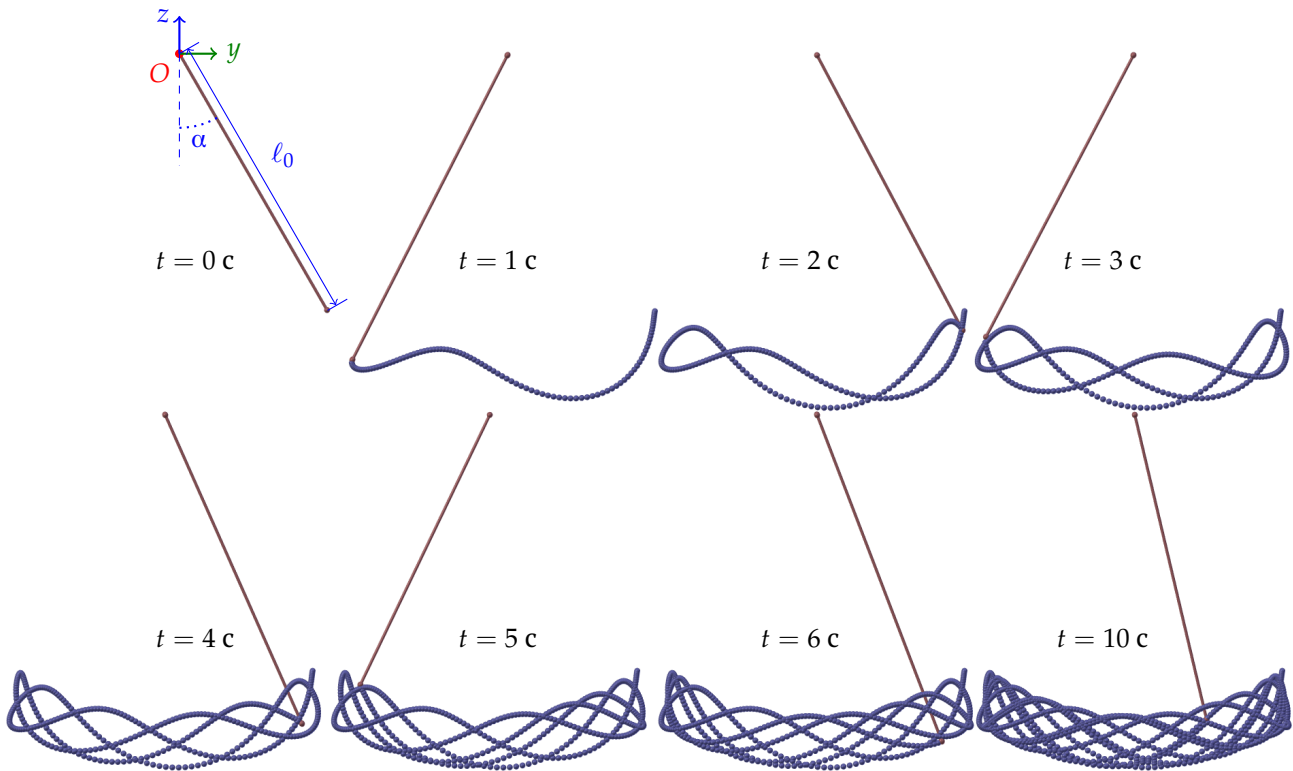


Рис. 5. Траектория движения груза и конфигурация маятника в различные моменты времени

начало отсчета в объекте определяется геометрическим центром последнего созданного объекта. Начальная конфигурация объекта устанавливается поворотом относительно оси Ox на угол α_0 . Колебания маятника будут проходить в плоскости Oyz . Маятнику задаем материал красного цвета:

```
m = bpy.ops.mesh
c0 = Vector((0,0,0))
c1 = Vector((0,0,-l0/2))
c2 = Vector((0,0,-l0))

m.primitive_cylinder_add(radius=r1, depth=l0,\
location=c1)
cyl = bpy.context.object
m.primitive_uv_sphere_add(size=r2,location=c2)
s2 = bpy.context.object
m.primitive_uv_sphere_add(size=r0,location=c0)
s0 = bpy.context.object

cyl.select=True
s2.select=True
s0.select=True
bpy.ops.object.join()
p = bpy.context.object
p.rotation_euler.rotate_axis("X", a)
red = bpy.data.materials.new('Red')
red.diffuse_color = (0.6, 0.2, 0.2)
red.specular_hardness = 200
p.data.materials.append(red)
```

Для того чтобы отображать положения гру-

за создаем пустой массив сфер синего цвета (при определении координат груза в каждый момент времени будем добавлять сферу как новый элемент массива):

```
ball = []
blue = bpy.data.materials.new('Blue')
blue.diffuse_color = (0.2, 0.2, 0.6)
blue.specular_hardness = 200
```

В цикле по времени (реализуем как итерации $i = (0, st - 1)$ по кадрам анимации) решаем уравнения (14):

```
for i in range (0, st):
    scene.frame_set(i)
    ap = a
    a1p = a1
    lp = l
    l1p = l1
    ll = l0+lp
    l1 = l1p + dt * (ll*l1p*l1p-w*lp+g*cos(ap))
    l = lp + l1*dt
    print(l)
    a1 = a1p - dt * (g*sin(ap)-2.0*l1p*a1p)/ll
    a = ap + a1*dt
```

Поворачиваем маятник на величину изменения угла α за текущий шаг по времени и растягиваем стержень на величину $1 + l/l_0$:

```
p.rotation_euler.rotate_axis("X", a1*dt)
p.scale[2]=1+l/l0
```


Отметим, что в данном коде реализуется вращение объекта в связанной с ним локальной системе координат. Данный вариант является «безопасным» способом поворота в отличие от вращения объекта относительно глобальной системы координат, где поворот на эйлеровы углы может привести к блокировке оси (если при повороте на угол ось объекта совпадает с глобальной осью, то они становятся неразличимыми, т.е. последующий поворот одной оси ведет к аналогичному повороту другой; данный эффект называется Gimbal Lock или шарнирный клин).

Координаты груза определяются формулами

$$y = (\ell_0 + \ell) \sin \alpha, \quad z = -(\ell_0 + \ell) \cos \alpha.$$

Создаем сферу с центром в данных координатах и делаем ее невидимой; включаем видимость сферы, созданной в предыдущий момент времени:

```
yz = Vector((0, ll*sin(a), -ll*cos(a)))
m.primitive_uv_sphere_add(size=r0, location=yz)
ball.append bpy.context.object
ball[i].data.materials.append(blue)
ball[i].hide = True;
if i>0:
    ball[i-1].hide = False;
```

Поясним необходимость управления видимостью сфер. При выполнении скрипта *Blender* создает новые или трансформирует существующие объекты и связывает их параметры с кадрами анимации. После выполнения скрипта созданные объекты становятся доступны на всех кадрах анимации. В процессе анимации путем управления видимостью сфер достигается их последовательное отображение.

Включаем в кадр поворот маятника, его перемещение (удлинение) и статус видимости сфер, отображающих положение груза в предыдущие моменты времени:

```
p.keyframe_insert(data_path='rotation_euler')
p.keyframe_insert(data_path='scale')
ball[i-1].keyframe_insert(data_path='hide')
ball[i].keyframe_insert(data_path='hide')
```

При моделировании динамического процесса можно повысить эффективность использования вычислительных и временных ресурсов с помощью разделения вычислительного этапа и этапа обработки и визуализации результатов моделирования. Для этого используются различные программные средства, при выборе которых учитываются следующие особенности:

- для вычислительного модуля используются быстрые программы-компиляторы с оптимизированными под быстроедействие библиотеками (например, *C++*, *Fortran*,

BLAS/Lapack), в которых инструменты визуализации отсутствуют или могут быть ограничены по функциональности;

- программы визуализации обычно используют более медленные интерпретаторы (обычно, *Python*) и обладают широким набором инструментов, оптимизированных для работы с графикой (что компенсирует скорость интерпретации кода для работы с графикой, но при интерпретации численных алгоритмов быстроедействие может значительно снижаться);
- при моделировании с малым шагом по времени получаются избыточные для визуализации данные, поэтому сохраняются результаты только в отдельные моменты времени (например, для создания 24 кадров в секунду);
- программы трехмерного моделирования используют большие объемы памяти и процессорного времени (особенно во время рендеринга, т.е. создания плоского изображения трехмерной модели), поэтому их оптимально использовать для визуализации заранее обработанных данных;
- для повышения скорости расчетов в вычислительном модуле могут использоваться технологии параллельного программирования [82], позволяющие запускать на процессорах с общей (*OpenMP* для языков программирования *Fortran 77/90*, *C* и *C++*) или распределенной (*MPI* для языков программирования *Fortran 77/90*, *Java*, *C* и *C++*) памятью одновременно несколько потоков. Для распараллеливания вычислений на графическом процессоре используются специальные библиотеки, ориентированные на графические карты (например, библиотека *CUDA* для графических процессоров *Nvidia* доступная для языков программирования *C*, *C++*, *Fortran*, *Python* и *MATLAB*).

Приведем пример отдельной реализации вычислительного эксперимента на примере моделирования траектории движения модулей колесного робота [65]. Моделирование проводилось программой, написанной на языке программирования *C++*, которая сохраняла каждую 2000-ю точку траекторий в файл *trajectoryN*, где *N* — номер модуля ($N = (0, 9)$) в следующем формате: время, координаты геометрического центра, координаты крайнего контакта правого и левого колес с поверхностью.

Визуализация проводилась в программе *Blender* с помощью *Python*-скрипта (рис. 6). Для корректной работы скрипта рекомендуется запускать *Blender* из консоли, открытой в той же папке,

где расположены файлы с исходными данными. В консоль будут выводиться сообщения об ошибках (при их наличии) и результаты выполнения команды `print`.

Подключаем основную библиотеку *Blender*:

```
import bpy
```

На время отладки удаляем лишние объекты:

```
for o in bpy.context.scene.objects:
    o.select = False
    if o.type == 'MESH':
        o.select = True
    if o.type == 'CURVE':
        o.select = True
bpy.ops.object.delete()
```

В начале определим функцию рисования кривой `sj` со следующими аргументами: имя создаваемого объекта, его цвет, индекс модуля робота и позиция первой координаты в файле данных (номер колонки). Создаем трехмерную кривую шириной `bevel_depth`:

```
def MakeLine(on, c, j, s):
    cd=bpy.data.curves.new(name=on,type='CURVE')
    cd.dimensions = '3D'
    cd.bevel_depth = 0.01
```

Создаем объект *Blender* и присваиваем ему цвет по следующему принципу: для первого модуля черный цвет ($j = 0$), а для остальных — цвет, передаваемый в функцию:

```
od = bpy.data.objects.new(on, cd)
if ( j ):
    od.data.materials.append(c)
else:
    od.data.materials.append(black)
bpy.context.scene.objects.link(od)
```

Определяем тип кривой *POLY* для кусочно-линейной интерполяции. Для сглаживания кривой можно использовать кривые Безье *BEZIER* [83] или B-сплайн *NURBS* [84]. Задаем координаты в формате 4-х мерного вектора (x, y, z, w) , где w — весовой коэффициент, используемый при сглаживании кривой:

```
pl = cd.splines.new('POLY')
pl.points.add(len(d[j])-1)
for i in range(len(d[j])):
    pl.points[i].co = (d[j][i][s], \
        d[j][i][1+s], d[j][i][2+s], 1)
pl.order_u = len(pl.points)-1
pl.use_endpoint_u = True
```

Для разделения групп кривых определим следующие цвета: черный (траектория первого модуля), красный (траектория геометрического центра), синий и зеленый (крайние точки контакта правого и левого колес с поверхностью):

```
red = bpy.data.materials.new('Red')
red.diffuse_color = (1,0,0)
black = bpy.data.materials.new('Black')
black.diffuse_color = (0,0,0)
blue = bpy.data.materials.new('Blue')
blue.diffuse_color = (0,0,1)
green = bpy.data.materials.new('Green')
green.diffuse_color = (0,1,0)
```

Зададим количество модулей и загрузим координаты из файла данных:

```
n = 10
d = []
for i in range(n):
    with open('./trajectory'+str(i)) as f:
        d.append( [[float(x) for x in line.split()] \
            for line in f] )
```

Отообразим траектории для каждого из модулей:

```
for j in range(n):
    MakeLine('mC'+str(j), red, j, 1)
    MakeLine('mCR'+str(j), blue, j, 6)
    MakeLine('mCL'+str(j), green, j, 9)
```

Отметим, что на проведение моделирования полностью в среде *Blender* с достаточной точностью потребовалось 55 с. После разделения вычислительная часть на C++ с записью координат траекторий движения модулей не превышала 1 с, а визуализация этих траекторий в *Blender* по данным, полученным из файлов, — 7 с. Экономия в использовании оперативной памяти также была значительной: скомпилированная программа на C++ использовала 144 КБ ОЗУ; программа *Blender* — 72 МБ, полный вычислительный скрипт — 120 МБ, а скрипт визуализации — 20 МБ.

В данной задаче можно оценить затраты процессорного времени вычислительной части и визуализации при изменении параметров модели. При увеличении количества ведомых модулей или длины траектории ведущего модуля в k раз время расчета при неизменном шаге по времени также возрастет в k раз. При этом время визуализации увеличится более, чем в k раз, поскольку при росте размерности модели или количества создаваемых кадров возрастают затраты на выделение оперативной памяти. Для больших задач может потребоваться разделение рассчитанной траектории на несколько частей, создание для каждой части отдельной анимации с экспортом в видеофайл и с последующей шивкой видеофрагментов. При уменьшении шага по времени в k раз погрешность вычисления траекторий снизится в k^2 раз, а время расчета возрастет в k раз, т.к. используется алгоритм второго порядка по временному шагу. Модель позволяет провести дополнительную оптимизацию быстродействия, используя зависимость точности расчета от кривизны траектории:

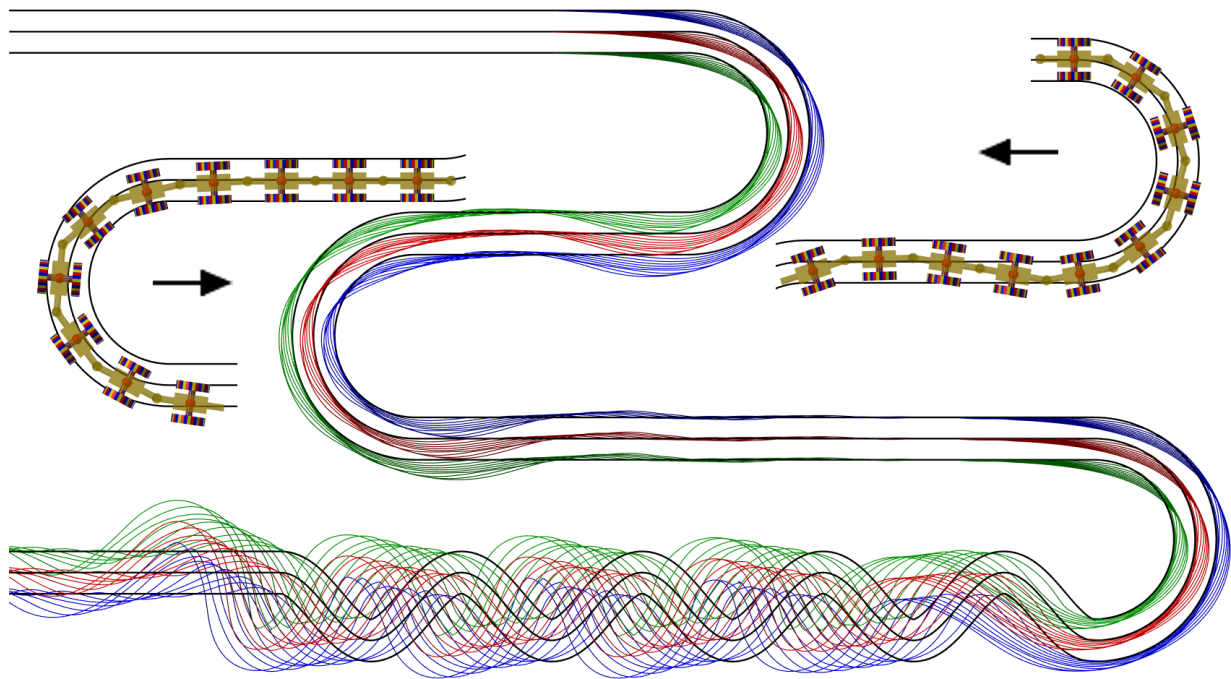


Рис. 6. Траектория движения геометрических центров (красные линии) и крайних точек контакта колес с поверхностью (синие и зеленые линии) модулей колесного робота. Траектория первого модуля обозначена черными линиями

на участках с меньшей кривизной можно использовать больший шаг по времени без потери точности. На время визуализации это не влияет, поскольку количество кадров не меняется. Алгоритм рассчитывает положение ведомых модулей последовательно, от первого до последнего, что не позволяет использовать параллельные вычисления. Однако, при моделировании одновременного движения нескольких модульных роботов вычисление траектории для каждого может быть организовано в виде отдельного потока.

В данный скрипт можно добавить обработку исходных данных и визуализацию объекта исследования (на рис. 6 представлены конфигурации робота на разных участках траектории). Так как траектории ведомых модулей не совпадают с траекторией ведущего модуля, то за одно и то же время модули будут проходить разный путь. Выведем в консоль минимальную и максимальную скорости для каждого модуля:

```
from math import sqrt, pow
a = []
for i in range(n):
    a.append([])
    for j in range(1, len(d[i])):
        a[i].append(sqrt(pow(d[i][j][1]-\
            d[i][j-1][1], 2)+pow(d[i][j][2]-\
            d[i][j-1][2], 2)+pow(d[i][j][3]-\
            d[i][j-1][3], 2))/(d[i][j][0]-d[i][j-1][0]))
    print(i, min(a[i]), max(a[i]))
```

Предложенный скрипт является универсальным инструментом для визуализации трехмерных траекторий и может применяться не только в изучении особенностей кинематики робота, но и в других исследованиях (трехмерные течения жидкости или газа, вязко-пластические деформации тела, процесс переноса тепла, молекулярная динамика, движение небесных тел и т.д.).

Отметим, что *Blender* позволяет сохранять анимацию в виде графических файлов и в видеоформате. Есть два режима (меню Render): Render Animation (сохранение анимации, в области видимости камеры, медленный режим) и OpenGL Render (изображение в том виде, как оно отображено в окне программы, быстрый режим).

6. Заключение

Проведен анализ свободных программных средств для динамической визуализации результатов моделирования нестационарных физических явлений. На примере решения пяти физических задач (модифицированное логистическое уравнение Ферхюльста–Пирла для популяционной динамики; естественная тепловая конвекция Рэлея–Бенара; автоколебательная химическая реакция Белоусова–Жаботинского на примере модели брюсселятора; колебание груза на упругом растяжимом стержне в поле тяжести; кинематика модульного колесного

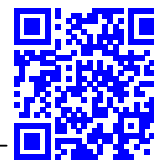
мобильного робота) показаны способы анимации параметрических аналитических зависимостей в *Gnuplot*, отображения двумерных пространственно распределенных динамических процессов с помощью видеофайла, построения трехмерной модели в программе компьютерной графики *Blender*. Дополнительно представлен способ повышения эффективности использования вычислительных ресурсов с помощью разделения вычислительного этапа и этапа обработки и визуализации результатов моделирования на примере универсального *Python*-скрипт для построения трехмерных траекторий по внешним исходным данным в *Blender*.

Список литературы

- [1] Фрик П.Г. Турбулентность: модели и подходы. Курс лекций. Часть I. Пермь, ПГТУ, 1998. 108 с.
- [2] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя, 5-е изд, М.: Наука. 1974.
- [3] Белоусов Б.П. Периодически действующая реакция и ее механизм. Сб.: Автоволновые процессы в системах с диффузией. Горький: Институт прикладной физики АН СССР. 1981. 287 с.
- [4] Базыкин А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. Москва: Наука. 1985. 181 с.
- [5] ParaView homepage. <https://www.paraview.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [6] Ahrens J., Geveci B., Law Ch. ParaView: An End-User Tool for Large Data Visualization. Visualization Handbook. 2005. DOI: 10.1016/B978-012387582-2/50038-1
- [7] Ayachit U. The ParaView Guide: A Parallel Visualization Application. Kitware. 2015.
- [8] Jucke M. Scientific Visualisation of Atmospheric Data with ParaView // Journal of Open Research Software. 2014. Vol. 2, No. 1. P. e4. DOI: 10.5334/jors.al
- [9] Thooris B., Pomarède D. Visualization of Large Scientific Datasets – Analysis of Numerical Simulation Data and Astronomical Surveys Catalogues // In Proceedings of the 6th International Conference on Information Visualization Theory and Applications – IVAPP, (VISIGRAPP 2015). 2015. Pp. 117–122. DOI: 10.5220/0005300901170122
- [10] Woodring J., Heitmann K., Ahrens J., Fasel P., Hsu C.-H., Habib S., Pope A. Analyzing and Visualizing Cosmological Simulations with ParaView // The Astrophysical Journal Supplement Series. 2011. Vol. 195, No. 1. DOI: 10.1088/0067-0049/195/1/11
- [11] OpenFOAM homepage. <https://www.openfoam.com/> (accessed: 01.04.2021)
- [12] FreeCAD: Your own 3D parametric modeler. <https://www.freecadweb.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [13] CalculiX: A Free Software Three-Dimensional Structural Finite Element Program. <http://www.dhondt.de/> (accessed: 01.04.2021)
- [14] Salome Platform – The open source platform for numerical simulation. <https://www.salome-platform.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [15] Elmer homepage. <https://www.csc.fi/web/elmer> (accessed: 01.04.2021)
- [16] Welcome to Python.org. <https://www.python.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [17] Milliken C.P. Python Projects for Beginners. Apress Berkeley, CA. 2020. DOI: 10.1007/978-1-4842-5355-7
- [18] Matplotlib: Visualization with Python. <https://matplotlib.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [19] Vaingast Sh. Beginning Python Visualization. Crafting Visual Transformation Scripts. Apress Berkeley, CA. 2014. 416 p. DOI: 10.1007/978-1-4842-0052-0
- [20] Rajagopalan G. A Python Data Analyst's Toolkit. Learn Python and Python-based Libraries with Applications in Data Analysis and Statistics. Apress Berkeley, CA. 2021. DOI: 10.1007/978-1-4842-6399-0
- [21] PyQt homepage. <http://www.riverbankcomputing.com/software/pyqt/> (accessed: 01.04.2021)
- [22] Willman J. Modern PyQt. Create GUI Applications for Project Management, Computer Vision, and Data Analysis. Apress Berkeley, CA. 2021. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4842-6603-8>
- [23] The GTK Project – a free open-source cross-platform widget toolkit. <https://www.gtk.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [24] wxWidgets. Cross-platform GUI Library. <https://www.wxwidgets.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [25] Seaborn: statistical data visualization. <https://seaborn.pydata.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [26] Plotly Python Open Source Graphing Library. <https://plotly.com/python/> (accessed: 01.04.2021)
- [27] Altair: Declarative Visualization in Python. <https://altair-viz.github.io/> (accessed: 01.04.2021)
- [28] Unpingco J. Python Programming for Data Analysis. Springer Cham. 2021. DOI: 10.1007/978-3-030-68952-0
- [29] Folium homepage. <https://python-visualization.github.io/folium/> (accessed: 01.04.2021)
- [30] Qt. Cross-platform software development for embedded and desktop. <https://www.qt.io/> (accessed: 01.04.2021)
- [31] Lazarus homepage. <https://www.lazarus-ide.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [32] OpenGL – the industry standart for high performance graphics. <https://www.opengl.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [33] GLUT – the OpenGL utility toolkit. https://www.opengl.org/resources/libraries/glut/glut_downloads.php (accessed: 01.04.2021)
- [34] Simple DirectMedia Layer homepage. <https://www.libsdl.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [35] VTK – the visualization toolkit. <https://vtk.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [36] Vernikouskaya I., Bertsche D., Rottbauer W. Rasche V. 3D-XGuide: open-source X-ray navigation guidance system // Int. J. CARS. 2021. Vol. 16. Pp. 53–63. DOI: 10.1007/s11548-020-02274-0
- [37] Zhang J., Tian X., Duan Q. Design and Implementation of Vehicle Terminal Graphic Interface Based on QT // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1486. Art. 072010. DOI: 10.1088/1742-6596/1486/7/072010

- [38] Silvestrov P., Bessonov O. Development of a visualization module for aerogasdynamics computations // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. Vol. 1009. P. 012035. DOI: [10.1088/1742-6596/1009/1/012035](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1009/1/012035)
- [39] Xiao P., Zhao X., Leng S., Tan R.S., Wong P., Zhong L. A Software Tool for Heart AVJ Motion Tracking Using Cine Cardiovascular Magnetic Resonance Images // *IEEE Journal of Translational Engineering in Health and Medicine*. 2017. Vol. 5. Pp. 1–12. Art. No. 1900412. DOI: [10.1109/JTEHM.2017.2738623](https://doi.org/10.1109/JTEHM.2017.2738623)
- [40] Ritraksa S., Mekchay K. 3D Structural Model and Visualization of Blood Vessels Based on L-System // *Trends in Sciences*. 2021. Vol. 18, No. 24. P. 1407. DOI: [10.48048/tis.2021.1407](https://doi.org/10.48048/tis.2021.1407)
- [41] FreeFEM – an open-source PDE solver using finite element method. <https://freefem.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [42] Hecht F. New development in FreeFem++ // *Journal of Numerical Mathematics*. 2012. V. 20, No. 3–4. Pp. 251–265. DOI: [10.1515/jnum-2012-0013](https://doi.org/10.1515/jnum-2012-0013)
- [43] Насибуллаев И.Ш. Применение свободных программ FreeFem++/Gmsh и FreeCAD/CalculiX для моделирования статических структурных задач // *Многофазные системы*. 2020. Т. 15, № 3–4. С. 183–200. DOI: [10.21662/mfs2020.3.129](https://doi.org/10.21662/mfs2020.3.129)
- [44] Насибуллаев И.Ш., Насибуллаева Э.Ш., Даринцев О.В. Моделирование течения жидкости через деформируемый пьезоэлементом эластичный микроканал системы охлаждения микрозахвата // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2019. Т. 20, № 12. С. 740–750. DOI: [10.17587/mau.20.740-750](https://doi.org/10.17587/mau.20.740-750)
- [45] Nasibullayev I.Sh., Darintsev O.V., Nasibullaeva E.Sh. and Bogdanov D.R. Piezoelectric Micropumps for Microrobotics: Operating Modes Simulating and Analysis of the Main Parameters of the Fluid Flow Generation // In: Ronzhin A. and Shishlakov V. (eds) *Proceedings of 15th International Conference on Electromechanics and Robotics "Zavalishin's Readings"*. Smart Innovation, Systems and Technologies. 2021. V. 187. Pp. 525–536. Springer, Singapore. DOI: [10.1007/978-981-15-5580-0_43](https://doi.org/10.1007/978-981-15-5580-0_43)
- [46] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V. Computer Axisymmetric Model of a Piezoelectric Micropump // *Journal of Engineering Science and Technology Review*. 2021. V. 14, No. 2. Pp. 152–164. DOI: [10.25103/jestr.142.19](https://doi.org/10.25103/jestr.142.19)
- [47] Насибуллаев И.Ш., Даринцев О.В. Двумерная динамическая модель взаимодействия жидкости и пьезоэлектрического привода с поперечным изгибом в плоском канале // *Многофазные системы*. 2019. Т. 14, № 4. С. 220–232. DOI: [10.21662/mfs2019.4.029](https://doi.org/10.21662/mfs2019.4.029)
- [48] Castrillo P., Schillaci E., Rigola J. Simulation of Fluid-Structure Interaction and Impact Force on a Reed Valve // *WCCM-ECCOMAS2020*. 2021. DOI: [10.23967/wccm-eccomas.2020.305](https://doi.org/10.23967/wccm-eccomas.2020.305)
- [49] Насибуллаев И.Ш., Даринцев О.В. Компьютерное двумерное моделирование системы жидкостного охлаждения микрозахвата // *Вычислительные технологии*. 2021. Т. 26, № 2. С. 4–20. DOI: [10.25743/ICT.2021.26.2.002](https://doi.org/10.25743/ICT.2021.26.2.002)
- [50] Насибуллаев И.Ш. Аналитический анализ переключения рабочего режима в двумерной модели системы жидкостного охлаждения микрозахвата // *Вестник УГАТУ*. 2021. Т. 25, № 3(93). С. 120–131. DOI: [10.54708/19926502_2021_25393120](https://doi.org/10.54708/19926502_2021_25393120)
- [51] Sadaka G., Rakotondrandisa A., Tournier P.-H., Luddens F., Lothodé C., Danaila I. Parallel finite-element codes for the simulation of two-dimensional and three-dimensional solid–liquid phase-change systems with natural convection // *Computer Physics Communications*. 2020. Vol. 257. P. 107492. DOI: [10.1016/j.cpc.2020.107492](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2020.107492)
- [52] Sadaka G., Dutykh D. Adaptive Numerical Modeling of Tsunami Wave Generation and Propagation with FreeFem++ // *Geosciences*. 2020. Vol. 10, No. 9. Art. no. 351. DOI: [10.3390/geosciences10090351](https://doi.org/10.3390/geosciences10090351)
- [53] Giuntini S., Andreini A., Cappuccini G., Facchini B. Finite element transient modelling for whole engine-secondary air system thermomechanical analysis // *Energy Procedia*. 2017. Vol. 126. Pp. 746–753. DOI: [10.1016/j.egypro.2017.08.231](https://doi.org/10.1016/j.egypro.2017.08.231)
- [54] Agnolucci A., Vanti F., Pinelli L., Arnone A. Automatic procedure for aeromechanic analysis of turbomachinery blade-rows // *AIP Conference Proceedings*. 2019. Vol. 2191. Art. no. 020003. DOI: [10.1063/1.5138736](https://doi.org/10.1063/1.5138736)
- [55] Karimi A., Grytz R., Rahmati S.M., Girkin C.A., Downs J.C. Analysis of the effects of finite element type within a 3D biomechanical model of a human optic nerve head and posterior pole // *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2021. Vol. 198. Art.no. 105794. DOI: [10.1016/j.cmpb.2020.105794](https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2020.105794)
- [56] GhostScript homepage. <https://www.ghostscript.com/> (accessed: 01.04.2021)
- [57] ImageMagick – convert, edit, or compose digital images. <https://imagemagick.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [58] GIMP – GNU image manipulation program. <https://www.gimp.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [59] Насибуллаев И.Ш. Использование свободных программ для обработки и визуализации результатов научных исследований // *Многофазные системы*. 2021. Т. 16, № 2. С. 58–71. DOI: [10.21662/mfs2021.2.009](https://doi.org/10.21662/mfs2021.2.009)
- [60] MEncoder <http://www.mplayerhq.hu/> (accessed: 01.04.2021)
- [61] Blender. 3D Content Creation Noob to Pro. Wikibooks. <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b4/BlenderDocumentation4.pdf> (accessed: 01.04.2021)
- [62] Bruyninckx H. Blender for robotics and robotics for Blender. 2004. http://download.blender.org/documentation/bc2004/Herman_Bruyninckx/robot-blender.pdf (accessed: 01.04.2021)
- [63] Buys K., De Laet T., Smits R., Bruyninckx H. Blender for Robotics: Integration into the Leuven Paradigm for Robot Task Specification and Human Motion Estimation. Pp. 15–25. 2010. DOI: [10.1007/978-3-642-17319-6_5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-17319-6_5)
- [64] Díaz-Andrade A., Álvarez-Cedillo J., Herrera-Lozada J., Rivera-Zarate I. Robotic Arm Control with Blender. *Journal of Emerging Trends in Computing and Information Sciences*. Vol. 4, No. 4. Pp. 382–386. 2013.
- [65] Nasibullayev I., Darintsev O., Bogdanov D. In-Pipe Modular Robot: Configuration, Displacement Principles, Standard Patterns and Modeling // In: Ronzhin A., Shishlakov V. (eds) *Electromechanics and Robotics*. Smart Innovation, Systems and Technologies. Vol. 232, pp. 85–96. Springer, Singapore. 2022. DOI: [10.1007/978-981-16-2814-6_8](https://doi.org/10.1007/978-981-16-2814-6_8)
- [66] ROS homepage. <https://www.ros.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [67] Robot Operating System (ROS). *The Complete Reference* (Volume 1). Ed. Anis Koubaa. Springer Cham. 2016. DOI: [10.1007/978-3-319-26054-9](https://doi.org/10.1007/978-3-319-26054-9)
- [68] Gazebo simulator homepage. <https://gazebo.sim.org/home> (accessed: 01.04.2021)

- [69] Rudolf A., Stjepanovič Z., Cupar A. Study Regarding the Kinematic 3D Human-Body Model Intended for Simulation of Personalized Clothes for a Sitting Posture // *Materials*. 2021. Vol. 14, No. 18. Art. No. 5124.
DOI: [10.3390/ma14185124](https://doi.org/10.3390/ma14185124)
- [70] Simić L., Kopačin V., Mumlek I., et al. Improved technique of personalised surgical guides generation for mandibular free flap reconstruction using an open-source tool // *Eur. Radiol*. 2021. Exp. Vol. 5. Art. No. 30.
DOI: [10.1186/s41747-021-00229-x](https://doi.org/10.1186/s41747-021-00229-x)
- [71] Lind M., Ystgaard P. Mesh-based tool path calculations for tubular joints // *Advances in Mechanical Engineering*. 2020. Vol. 12, No. 6. Pp.1–13.
DOI: [10.1177/1687814020933383](https://doi.org/10.1177/1687814020933383)
- [72] Bonneau D.A., Hutchinson D.J., DiFrancesco P.-M., Coombs M. Sala Z. Three-dimensional rockfall shape back analysis: methods and implications // *Nat. Hazards Earth Syst. Sci*. 2019. Vol. 19. Pp. 2745–2765.
DOI: [10.5194/nhess-19-2745-2019](https://doi.org/10.5194/nhess-19-2745-2019)
- [73] Филиппов С.В. Программная платформа Blender как среда моделирования объектов и процессов естественно-научных дисциплин // *Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша*. 2018. № 230. 42 с.
DOI: [10.20948/prepr-2018-230](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-230)
- [74] Milan J., Lubomír Ř., Petr S., Matěj Š. GPU Accelerated Path Tracing of Massive Scenes // *ACM Trans. Graph*. 2021. Vol. 40, No. 2. Art. No. 16. Pp. 1–17.
DOI: [10.1145/3447807](https://doi.org/10.1145/3447807)
- [75] Yi T. Making PDFs with Animation and Lecture Video for Beginner. WSEAS Transactions on Advances in Engineering Education. 2017. Vol. 14. Pp. 76–80.
<https://www.wseas.org/multimedia/journals/education/2017/a185810-086.php>
- [76] Гетлинг А.В. Конвекция Рэлея-Бенара. Структуры и динамика. М: Эдиториал УРСС. 247 с.
- [77] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука. 1972. 392 с.
- [78] Белоусов Б.П. Периодически действующая реакция и ее механизм. Сборник рефератов по радиационной медицине за 1958 г. М: Медгиз. 1959.
- [79] Glandsdorff P., Prigogine I. Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations. Wiley, New York. 1971.
- [80] Batchelor G.K. An Introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press. 1967.
DOI: [10.1017/CBO9780511800955](https://doi.org/10.1017/CBO9780511800955)
- [81] Goldstein H., Poole C., Safko J. Classical Mechanics, 3rd ed. American Journal of Physics. 2002. Vol. 70, pp. 782.
DOI: [10.1119/1.1484149](https://doi.org/10.1119/1.1484149)
- [82] Антонов А.С. Технологии параллельного программирования MPI и OpenMP: Учеб. пособие. Предисл.: В.А. Садовничий. М.: Издательство Московского университета, 2012. 344 с.
- [83] Hoffmann G. Bézier Curves.
<https://web.archive.org/web/20061202151511/http://www.fho-empden.de/~hoffmann/bezier18122002.pdf> (accessed: 01.04.2021)
- [84] Piegl L., Tiller W. The NURBS Book (2. ed.). Berlin: Springer. 1997.



Application of free software to visualize the results of simulation of dynamic processes

Nasibullayev I.Sh.

Mavlyutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa, Russia

The paper presents an overview of modern free tools for dynamic visualization and gives recommendations for choosing tools depending on the research method, the form of presentation of the initial data, and the specifics of the phenomenon under study. For the convenience of using the materials of the work, the source codes are given both for the programs of computational experiments of classical problems, and for creating a graphical visualization of the simulation results. To animate the process described by analytical formulas, it is proposed to use the gif terminal of the gnuplot program or the Python visualization library. An example of applying this approach to solving the modified Verhulst-Pearl equation, which describes the change in the population under periodic external influence, is given. When studying non-stationary phenomena distributed in space, the results can be presented in video format. The problem of natural convection in a horizontal layer of fluid or gas was simulated in the program FreeFem++ for solving differential equations by the finite element method with the conversion of the results using the GhostScript and MEncoder programs into a video format. An example of using the finite difference method in modeling self-oscillating chemical reactions in the Qt environment with saving animation frames as graphic files is given. To display the results of modeling three-dimensional dynamic processes, it is proposed to use the Blender computer graphics program. Modeling and visualization of oscillations of an elastic pendulum using the built-in Blender Python API interpreter are presented. An approach is shown for dividing a computational experiment and visualizing its results, which makes it possible to increase the efficiency of the use of computational resources. A universal Python-script is proposed for constructing three-dimensional object motion trajectories based on external source data.

Keywords: free software, Gnuplot, Matplotlib, FreeFem++, Qt, MEncoder, Blender

References

- [1] Frick P.G. [Turbulence: models and approaches. Lecture course. Part I] *Turbulentnost': modeli i podkhody. Kurs lektsiy. Chast' I*. Perm, PSTU, 1998. 108 p. (In Russian).
- [2] Schlichting G. [Theory of the boundary layer, 5th ed.] *Teoriya pogrannichnogo sloya, 5-ye izd.* M.: Nauka. 1974. (In Russian).
- [3] Belousov B.P. [Periodically acting reaction and its mechanism. Autowave processes in systems with diffusion] *Periodicheski deystvuyushchaya reaktsiya i yeye mekhanizm*. Sb.: Avtovolnovyye protsessy v sistemakh s diffuziyey. Gorky: Institute of Applied Physics, Academy of Sciences of the USSR. 1981. 287 p. (In Russian).
- [4] Bazykin A.D. [Mathematical biophysics of interacting populations] *Matematicheskaya biofizika vzaimodeystvuyushchikh populyatsiy*. Moskva: Nauka. 1985. 181 p. (In Russian).
- [5] ParaView homepage. <https://www.paraview.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [6] Ahrens J., Geveci B., Law Ch. ParaView: An End-User Tool for Large Data Visualization. Visualization Handbook. 2005. DOI: 10.1016/B978-012387582-2/50038-1
- [7] Ayachit U. The ParaView Guide: A Parallel Visualization Application. Kitware. 2015.
- [8] Jucke M. Scientific Visualisation of Atmospheric Data with ParaView. Journal of Open Research Software. 2014. Vol. 2, No. 1. P. e4. DOI: 10.5334/jors.at
- [9] Thooris B., Pomarède D. Visualization of Large Scientific Datasets – Analysis of Numerical Simulation Data and Astronomical Surveys Catalogues. In Proceedings of the 6th International Conference on Information Visualization Theory and Applications – IVAPP, (VISIGRAPP 2015). 2015. Pp. 117–122. DOI: 10.5220/0005300901170122
- [10] Woodring J., Heitmann K., Ahrens J., Fasel P., Hsu C.-H., Habib S., Pope A. Analyzing and Visualizing Cosmological Simulations with ParaView. The Astrophysical Journal Supplement Series. 2011. Vol. 195, No. 1. DOI: 10.1088/0067-0049/195/1/11
- [11] OpenFOAM homepage. <https://www.openfoam.com/> (accessed: 01.04.2021)
- [12] FreeCAD: Your own 3D parametric modeler. <https://www.freecadweb.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [13] CalculiX: A Free Software Three-Dimensional Structural Finite Element Program. <http://www.dhondt.de/> (accessed: 01.04.2021)

- [14] Salome Platform – The open source platform for numerical simulation.
<https://www.salome-platform.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [15] Elmer homepage.
<https://www.csc.fi/web/elmer> (accessed: 01.04.2021)
- [16] Welcome to Python.org.
<https://www.python.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [17] Milliken C.P. Python Projects for Beginners. Apress Berkeley, CA. 2020.
DOI: 10.1007/978-1-4842-5355-7
- [18] Matplotlib: Visualization with Python.
<https://matplotlib.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [19] Vaingast Sh. Beginning Python Visualization. Crafting Visual Transformation Scripts. Apress Berkeley, CA. 2014. 416 p.
DOI: 10.1007/978-1-4842-0052-0
- [20] Rajagopalan G. A Python Data Analyst's Toolkit. Learn Python and Python-based Libraries with Applications in Data Analysis and Statistics. Apress Berkeley, CA. 2021.
DOI: 10.1007/978-1-4842-6399-0
- [21] PyQt homepage.
<http://www.riverbankcomputing.com/software/pyqt/> (accessed: 01.04.2021)
- [22] Willman J. Modern PyQt. Create GUI Applications for Project Management, Computer Vision, and Data Analysis. Apress Berkeley, CA. 2021.
DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4842-6603-8>
- [23] The GTK Project – a free open-source cross-platform widget toolkit.
<https://www.gtk.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [24] wxWidgets. Cross-platform GUI Library.
<https://www.wxwidgets.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [25] Seaborn: statistical data visualization.
<https://seaborn.pydata.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [26] Plotly Python Open Source Graphing Library.
<https://plotly.com/python/> (accessed: 01.04.2021)
- [27] Altair: Declarative Visualization in Python.
<https://altair-viz.github.io/> (accessed: 01.04.2021)
- [28] Unpingco J. Python Programming for Data Analysis. Springer Cham. 2021.
DOI: 10.1007/978-3-030-68952-0
- [29] Folium homepage.
<https://python-visualization.github.io/folium/> (accessed: 01.04.2021)
- [30] Qt. Cross-platform software development for embedded and desktop.
<https://www.qt.io/> (accessed: 01.04.2021)
- [31] Lazarus homepage.
<https://www.lazarus-ide.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [32] OpenGL – the industry standart for high performance graphics.
<https://www.opengl.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [33] GLUT – the OpenGL utility toolkit.
https://www.opengl.org/resources/libraries/glut/glut_downloads.php (accessed: 01.04.2021)
- [34] Simple DirectMedia Layer homepage.
<https://www.libsdl.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [35] VTK – the visualization toolkit.
<https://vtk.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [36] Vernikouskaya I., Bertsche D., Rottbauer W., Rasche V. 3D-XGuide: open-source X-ray navigation guidance system. Int. J. CARS. 2021. Vol. 16. Pp. 53–63.
DOI: 10.1007/s11548-020-02274-0
- [37] Zhang J., Tian X., Duan Q. Design and Implementation of Vehicle Terminal Graphic Interface Based on QT. Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1486. Art. 072010.
DOI: 10.1088/1742-6596/1486/7/072010
- [38] Silvestrov P., Bessonov O. Development of a visualization module for aerodynamic computations. Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 1009. P. 012035.
DOI: 10.1088/1742-6596/1009/1/012035
- [39] Xiao P., Zhao X., Leng S., Tan R.S., Wong P., Zhong L. A Software Tool for Heart AVJ Motion Tracking Using Cine Cardiovascular Magnetic Resonance Images. IEEE Journal of Translational Engineering in Health and Medicine. 2017. Vol. 5. Pp. 1–12. Art. No. 1900412.
DOI: 10.1109/JTEHM.2017.2738623
- [40] Ritraksa S., Mekchay K. 3D Structural Model and Visualization of Blood Vessels Based on L-System. Trends in Sciences. 2021. Vol. 18, No. 24. P. 1407.
DOI: 10.48048/tis.2021.1407
- [41] FreeFEM – an open-source PDE solver using finite element method.
<https://freefem.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [42] Hecht F. New development in FreeFem++. Journal of Numerical Mathematics. 2012. V. 20, No. 3–4. Pp. 251–265.
DOI: 10.1515/jnum-2012-0013
- [43] Nasibullayev I.Sh. [Application of free software FreeFem++/Gmsh and FreeCAD/CalculiX for simulation of static elasticity problems] *Primeneniye svobodnykh programm FreeFem++/Gmsh i FreeCAD/CalculiX dlya modelirovaniya staticheskikh strukturnykh zadach*. Multiphase Systems [Mnogofaznyye sistemy]. 2020. V. 15, No. 3–4. Pp. 183–200 (In Russian).
DOI: 10.21662/mfs2020.3.129
- [44] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V., [Simulation of fluid flow through a elastic microchannel deformed by a piezoelement in microgrip cooling systems] *Modelirovaniye techeniya zhidkosti cherez deformiruyemyy p'yezoelementom elastichnyy mikrokanal sistemy okhlazhdeniye mikrozhkhvata*. Mechatronics, automation, control [Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie]. 2019. V. 20, No. 12. Pp. 740–750 (In Russian).
DOI: 10.17587/mau.20.740-750
- [45] Nasibullayev I.Sh., Darintsev O.V., Nasibullaeva E.Sh. and Bogdanov D.R. Piezoelectric Micropumps for Microrobotics: Operating Modes Simulating and Analysis of the Main Parameters of the Fluid Flow Generation // In: Ronzhin A. and Shishlakov V. (eds) Proceedings of 15th International Conference on Electromechanics and Robotics "Zavalishin's Readings". Smart Innovation, Systems and Technologies. 2021. V. 187. Pp. 525–536. Springer, Singapore.
DOI: 10.1007/978-981-15-5580-0_43
- [46] Nasibullayev I.Sh., Nasibullaeva E.Sh., Darintsev O.V. Computer Axisymmetric Model of a Piezoelectric Micropump // Journal of Engineering Science and Technology Review. 2021. V. 14, No. 2. Pp. 152–164.
DOI: 10.25103/jestr.142.19
- [47] Nasibullayev I.Sh., Darintsev O.V., [Two-dimensional dynamic model of the interaction of a fluid and a piezoelectric bending actuator in a plane channel] *Dvumernaya dinamicheskaya model' vzaimodeystviya zhidkosti i p'yezoelektricheskogo privoda s poperechnym izgibom v ploskom kanale*. Multiphase Systems [Mnogofaznyye sistemy]. 2019. V. 14, No. 4. Pp. 220–232 (in Russian).
DOI: 10.21662/mfs2019.4.029
- [48] Castrillo P., Schillaci E., Rigola J. Simulation of Fluid-Structure Interaction and Impact Force on a Reed Valve. WCCM-ECCOMAS2020. 2021.
DOI: 10.23967/wccm-eccomas.2020.305
- [49] Nasibullayev I.Sh., Darintsev O.V. [Computer 2D modelling of a micro-grip fluid cooling system] *Komp'yuternoye dvumernoye modelirovaniye sistemy zhidkostnogo okhlazhdeniya mikrozhkhvata*. Computational technologies [Vychislitel'nyye tekhnologii]. 2021. V. 26. No. 2. Pp. 4–20 (in Russian).
DOI: 10.25743/ICT.2021.26.2.002
- [50] Nasibullayev I.Sh. [Analytical analysis of operating mode switching in a 2D model of a fluid cooling system of the micro-gripper] *Analiticheskiy analiz pereklyucheniya rabocheho rezhima v dvumernoy modeli sistemy zhidkostnogo okhlazhdeniya mikrozhkhvata*. Vestnik USATU [Vestnik UGATU]. 2021. Vol. 25, N. 3 (93). Pp. 120–131. (in Russian).
DOI: 10.54708/19926502_2021_25393120

- [51] Sadaka G., Rakotondrandisa A., Tournier P.-H., Luddens F., Lothodé C., Danaïla I. Parallel finite-element codes for the simulation of two-dimensional and three-dimensional solid–liquid phase-change systems with natural convection. *Computer Physics Communications*. 2020. Vol. 257. P. 107492. DOI: [10.1016/j.cpc.2020.107492](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2020.107492)
- [52] Sadaka G., Dutykh D. Adaptive Numerical Modeling of Tsunami Wave Generation and Propagation with FreeFem++. *Geosciences*. 2020. Vol. 10, No. 9. Art. no. 351. DOI: [10.3390/geosciences10090351](https://doi.org/10.3390/geosciences10090351)
- [53] Giuntini S., Andreini A., Cappuccini G., Facchini B. Finite element transient modelling for whole engine-secondary air system thermomechanical analysis // *Energy Procedia*. 2017. Vol. 126. Pp. 746–753. DOI: [10.1016/j.egypro.2017.08.231](https://doi.org/10.1016/j.egypro.2017.08.231)
- [54] Agnolucci A., Vanti F., Pinelli L., Arnone A. Automatic procedure for aeromechanical analysis of turbomachinery blade-rows. *AIP Conference Proceedings*. 2019. Vol. 2191. Art. no. 020003. DOI: [10.1063/1.5138736](https://doi.org/10.1063/1.5138736)
- [55] Karimi A., Grytz R., Rahmati S.M., Girkin C.A., Downs J.C. Analysis of the effects of finite element type within a 3D biomechanical model of a human optic nerve head and posterior pole. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2021. Vol. 198. Art.no. 105794. DOI: [10.1016/j.cmpb.2020.105794](https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2020.105794)
- [56] GhostScript homepage. <https://www.ghostscript.com/> (accessed: 01.04.2021)
- [57] ImageMagick – convert, edit, or compose digital images. <https://imagemagick.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [58] GIMP – GNU image manipulation program. <https://www.gimp.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [59] Nasibullayev I.Sh. [Application of free software for processing and visualization of scientific research results] *Ispol'zovaniye svobodnykh programm dlya obrabotki i vizualizatsii rezul'tatov nauchnykh issledovaniy. Multiphase Systems [Mnogofaznyye sistemy]*. 2021. V. 16, No 2. Pp. 58–71 (In Russian). DOI: [10.21662/mfs2021.2.009](https://doi.org/10.21662/mfs2021.2.009)
- [60] MEncoder <http://www.mplayerhq.hu/> (accessed: 01.04.2021)
- [61] Blender. 3D Content Creation Noob to Pro. Wikibooks. <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b4/BlenderDocumentation4.pdf> (accessed: 01.04.2021)
- [62] Bruyninckx H. Blender for robotics and robotics for Blender. 2004. http://download.blender.org/documentation/bc2004/Herman_Bruyninckx/robot-blender.pdf (accessed: 01.04.2021)
- [63] Buys K., De Laet T., Smits R., Bruyninckx H. Blender for Robotics: Integration into the Leuven Paradigm for Robot Task Specification and Human Motion Estimation. Pp. 15–25. 2010. DOI: [10.1007/978-3-642-17319-6_5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-17319-6_5)
- [64] Díaz-Andrade A., Álvarez-Cedillo J., Herrera-Lozada J., Rivera-Zarate I. Robotic Arm Control with Blender. *Journal of Emerging Trends in Computing and Information Sciences*. Vol. 4, No. 4. Pp. 382–386. 2013.
- [65] Nasibullayev I., Darintsev O., Bogdanov D. In-Pipe Modular Robot: Configuration, Displacement Principles, Standard Patterns and Modeling // In: Ronzhin A., Shishlakov V. (eds) *Electromechanics and Robotics. Smart Innovation, Systems and Technologies*. Vol. 232, pp. 85–96. Springer, Singapore. 2022. DOI: [10.1007/978-981-16-2814-6_8](https://doi.org/10.1007/978-981-16-2814-6_8)
- [66] ROS homepage. <https://www.ros.org/> (accessed: 01.04.2021)
- [67] Robot Operating System (ROS). The Complete Reference (Volume 1). Ed. Anis Koubaa. Springer Cham. 2016. DOI: [10.1007/978-3-319-26054-9](https://doi.org/10.1007/978-3-319-26054-9)
- [68] Gazebo simulator homepage. <https://gazebo.org/home> (accessed: 01.04.2021)
- [69] Rudolf A., Stjepanović Z., Cupar A. Study Regarding the Kinematic 3D Human-Body Model Intended for Simulation of Personalized Clothes for a Sitting Posture // *Materials*. 2021. Vol. 14, No. 18. Art. No. 5124. DOI: [10.3390/ma14185124](https://doi.org/10.3390/ma14185124)
- [70] Simić L., Kopačin V., Mumlek I., et al. Improved technique of personalized surgical guides generation for mandibular free flap reconstruction using an open-source tool. *Eur. Radiol*. 2021. Exp. Vol. 5. Art. No. 30. DOI: [10.1186/s41747-021-00229-x](https://doi.org/10.1186/s41747-021-00229-x)
- [71] Lind M., Ystgaard P. Mesh-based tool path calculations for tubular joints. *Advances in Mechanical Engineering*. 2020. Vol. 12, No. 6. Pp.1–13. DOI: [10.1177/1687814020933383](https://doi.org/10.1177/1687814020933383)
- [72] Bonneau D.A., Hutchinson D.J., DiFrancesco P.-M., Coombs M. Sala Z. Three-dimensional rockfall shape back analysis: methods and implications. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci*. 2019. Vol. 19. Pp. 2745–2765. DOI: [10.5194/nhess-19-2745-2019](https://doi.org/10.5194/nhess-19-2745-2019)
- [73] Filippov S.V. [Blender software platform as an environment for modeling objects and processes in natural sciences] *Programm-naya platforma Blender kak sreda modelirovaniya ob'yektov i protsessov yestestvenno-nauchnykh distsiplin*. Preprints of IAM im. M.V. Keldysh [Preprinty IPM im. M.V.Keldysha]. 2018. No. 230. 42 p (In Russian). DOI: [10.20948/prepr-2018-230](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-230)
- [74] Milan J., Lubomír Ř., Petr S., Matěj Š. GPU Accelerated Path Tracing of Massive Scenes // *ACM Trans. Graph*. 2021. Vol. 40, No. 2. Art. No. 16. Pp. 1–17. DOI: [10.1145/3447807](https://doi.org/10.1145/3447807)
- [75] Yi T. Making PDFs with Animation and Lecture Video for Beginner. *WSEAS Transactions on Advances in Engineering Education*. 2017. Vol. 14. Pp. 76–80. <https://www.wseas.org/multimedia/journals/education/2017/a185810-086.php>
- [76] Getling A.V. [Rayleigh-Benard convection. Structures and dynamics] *Konveksiya Releya-Benara. Struktury i dinamika*. M: Editorial URSS. 247 p. (In Russian).
- [77] Gershuni G.Z., Zhukhovitsky E.M. [Convective stability of an incompressible fluid] *Konvektivnaya ustoychivost' neszhimayemoy zhidkosti* M.: Nauka. 1972. 392 p. (In Russian).
- [78] Belousov B.P. [Periodically acting reaction and its mechanism] *Periodicheski deystvuyushchaya reaktsiya i yeye mekhanizm*. Collection of abstracts on radiation medicine for 1958 [Sbornik referatov po radiatsionnoy meditsine za 1958 g.]. M: Medgiz. 1959 (In Russian).
- [79] Glandsdorff P., Prigogine I. *Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuations*. Wiley, New York. 1971.
- [80] Batchelor G.K. *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press. 1967. DOI: [10.1017/CBO9780511800955](https://doi.org/10.1017/CBO9780511800955)
- [81] Goldstein H., Poole C., Safko J. *Classical Mechanics*, 3rd ed. *American Journal of Physics*. 2002. Vol. 70, pp. 782. DOI: [10.1119/1.1484149](https://doi.org/10.1119/1.1484149)
- [82] Antonov A.S. Technologies of parallel programming MPI and OpenMP: Proc. allowance. Foreword: V.A. Sadovnichiy [Tehnologii paralelnogo programirovaniya MPI i OpenMP: Ucheb. posobiye. Predisl.: V.A. Sadovnichiy. M.]. Moscow: Moscow University Press, 2012. 344 p. (In Russian).
- [83] Hoffmann G. Bézier Curves. <https://web.archive.org/web/20061202151511/http://www.fho-enden.de/~hoffmann/bezier18122002.pdf> (accessed: 01.04.2021)
- [84] Piegl L., Tiller W. *The NURBS Book* (2. ed.). Berlin: Springer. 1997.



Моделирование осаждения закрученного потока разреженной гранулированной среды в цилиндрической области методом MP-PIC

Баширова К.И

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, Уфа

Объектом исследования является процесс осаждения сферических частиц в цилиндрической трубе, для оценки которого построена модель в пакете OpenFOAM. Исследования показывают, что метод MP-PIC хорошо подходит для моделирования взаимодействия гранулированной среды с потоками жидкости и газа. В настоящей работе оценивается применимость метода для решения поставленной задачи. В процессе изучения осаждения в закрученном потоке рассматривались группы частиц разного диаметра. Показано, что чем мельче частицы, тем быстрее они осаждаются на стенках цилиндрической трубки. Напротив, более крупные и тяжелые частицы пролетают большее расстояние вдоль трубки, что объясняется значительным влиянием инертного компонента по сравнению с силой Стокса. Для оценки полученных результатов проведена серия расчетов с использованием сеток различных размеров. Показана хорошая сопоставимость результатов при вычислениях на сетках разного масштаба и при разных размерах дисперсных частиц. Планируется дальнейшее сравнение с экспериментальными данными.

Ключевые слова: численное моделирование, осаждение частиц, OpenFOAM, MP-PIC, denseParticleFoam, многофазные системы

1. Введение

В настоящей работе с помощью численных экспериментов в пакете OpenFOAM рассматривается процесс осаждения сферических частиц разных диаметров в трубе.

Для моделирования процессов, происходящих в трубе, используется численный метод MP-PIC (multiphase particle-in-cell method), объединяющий подходы Эйлера для жидкой фазы и Лагранжа для частиц [1]. В работах [2–5] также показывается, что выбранный метод хорошо описывает взаимодействие частиц с потоками жидкостей и газов. Авторы работ [6–8] оценивают применимость метода для моделей пузырьковых колонн с осаждением или поднятием частиц в отсутствии завихряющихся потоков. В работе [9] сравниваются существующие подходы к моделированию пузырьков в среде: подход Эйлера, подход Лагранжа и гибридный

подход. По мнению авторов гибридный подход в некоторых случаях позволяет получать более высокую точность. В настоящей работе рассматривается применимость метода MP-PIC для моделирования закрученного потока с гранулированной средой. Для проверки результатов моделирования проводятся численные эксперименты с использованием сеток с различным числом ячеек.

2. Постановка задачи

Рассматривается модель двухмерной ударной трубы длиной 0,6 м и диаметром 0,1 м. Начальное значение давления в трубе и вне ее составляет 10^5 Па, давление у входного отверстия — $1,1 \cdot 10^5$ Па. Диаметр частиц варьируется от 0,0001 до 0,00015 м.

Скорость добавления частиц составляет 20000 частиц в секунду, начальная скорость каждой частицы, направленная вдоль трубы — 15 м/с. Добавление частиц в поток начинается спустя 0,0015 с. При расчетах используются песок в качестве дисперсной среды и воздух в качестве несущей фазы.

2.1. Математическая модель

Для решения поставленной задачи используется метод МР-РС. Стандартная модель МР-РС включает следующую систему уравнений неразрывности и импульсов для несущей фазы [2]:

$$\frac{\partial \rho_{(1)}}{\partial t} + \frac{(\partial \rho_{(1)} v_{(1)i})}{\partial x_i} = 0,$$

$$\frac{(\partial \rho_{(1)} v_{(1)j})}{\partial t} + \frac{(\partial \rho_{(1)} v_{(1)j} v_{(1)i})}{\partial x_i} =$$

$$= -\alpha_{(1)} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho_{(1)} g_j - \frac{F_{(21)j}}{\rho_{(1)}}.$$

Здесь $\rho_{(1)}$, $\alpha_{(1)}$, $v_{(1)i}$ — плотность, объемная концентрация и i -я составляющая вектора скорости несущей среды; t — время; g_i — компоненты вектора ускорения свободного падения; $F_{(21)j}$ — функция межфазной передачи импульса; $i = 1, 2, 3$.

Для несомой гранулированной фазы было записано уравнение для $f(x, v_{(2)}, m, t)$ — функции, определяющей распределение частиц, где x , $v_{(2)}$, m — расположение, плотность и масса частицы.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f v_{(2)i}}{\partial x_i} + \frac{\partial f A}{\partial v_{(2)i}} = 0,$$

где A — производная скорости частицы:

$$A = D(v_{(1)} - v_{(2)}) - \frac{1}{\rho_{(2)}} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g - \frac{1}{\alpha \rho_{(2)}} \frac{\partial \tau}{\partial x_i};$$

p — давление; $\rho_{(2)}$ — плотность частиц;

$D = C_d \frac{3 \rho_{(1)} |v_{(1)} - v_{(2)}|}{8 \rho_{(2)} R}$ — функция переноса;

C_d — коэффициент переноса; R — радиус частиц;

$\tau = \frac{P_{(2)} \alpha^\beta}{\max[\alpha_{cp} - \alpha, \omega(1 - \alpha)]}$ — изотропное напряжение; α — объемная концентрация частиц; α_{cp} — объемная концентрация частиц при плотной упаковке; $P_{(2)}$ — константа в единицах давления.

Концентрация частиц в зависимости от функции распределения представлена следующим образом:

$$\alpha_{cp} = \iint f \frac{m}{\rho_{(2)}} dm dv_{(2)}, \quad \alpha_{cp} + \alpha = 1.$$

Для замыкания системы используется уравнение для функции межфазной передачи импульса:

$$F = \iint f m [D(v_{(1)} - v_{(2)}) - \frac{1}{\rho_{(2)}} \nabla p] dm dv_{(2)}.$$

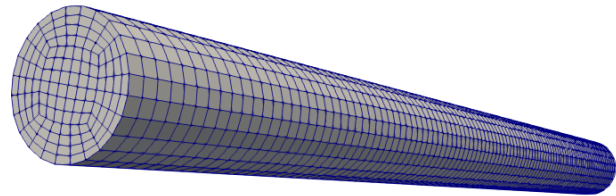


Рис. 1. Двухмерная сетка

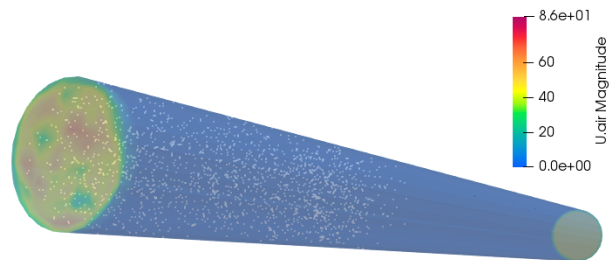


Рис. 2. Схема размещения частиц внутри трубы

3. Применение пакета OpenFOAM

Для решения приведенных уравнений используется солвер пакета OpenFOAM — denseParticleFoam, применяемый для моделирования частиц в жидкости или газе.

На рис. 1 представлена использованная сетка, а на рис. 2 — распределение гранулированной среды в трубе в момент времени 0,01 с.

Для оценки корректности результатов проводились исследования сходимости по сетке. Поскольку аналитическое решение отсутствует, полученные результаты сравнивались между собой, чтобы исключить серьезные отклонения. В работе использовалось 5 видов сеток, число ячеек приведено в табл. 1. Сетки № 2 и № 4 являются комбинированными: в первой части расчета до момента времени 0,001 с используется сетка с меньшим числом ячеек (Количество 1), во второй части расчета с помощью команды mapFields пакета OpenFOAM производится переход на сетку с большим числом ячеек (Количество 2), результаты расчетов давле-

Таблица 1. Число ячеек для сеток

№	Количество 1	Количество 2
1	7650	7650
2	7650	13200
3	13200	13200
4	13200	20790
5	20790	20790

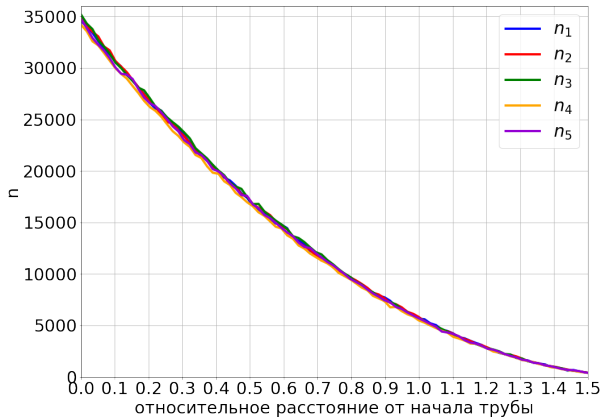


Рис. 3. Количество частиц, достигших расстояния вдоль трубы

ния и скорости жидкости при этом интерполируются. Описанный выше подход позволяет снизить время вычислений, при этом не оказывает существенного влияния на расчеты траекторий частиц. Размеры ячеек сетки выбираются исходя из условия, что размеры частиц не могут превышать размер ячейки.

4. Результаты и их обсуждение

Для сравнения результатов, полученных с помощью описанных выше сеток, построим графики зависимости количества частиц, достигших заданных расстояний от начала трубы (рис. 3), и относительной разницы между количествами частиц для разных сеток (рис. 4), которая вычислялась по формуле:

$$\delta_{k,k+1} = \frac{n_k - n_{k+1}}{n_k},$$

где n_k — количество частиц в интервале для k -й сетки.

Видно, что в пределах трубы относительная разница δ находится в пределах 0,2, что говорит о слабой зависимости поведения осаждающихся частиц от количества ячеек в сетке. Для оценки влияния размера частицы на скорость осаждения рассмотрим частицы пяти радиусов: 0,0001, 0,00011, 0,00012, 0,000125, 0,00015 м.

На рис. 5 приведено количество частиц в трубе в зависимости от времени, на рис. 6 — в зависимости от относительного расстояния вдоль трубы. Рассматриваются две серии расчетов: с условием отскокивания частиц от боковых стенок и с условием прохождения через стенки (осаждения). Пунктирными линиями отмечено количество частиц, которые остаются в трубе в первой серии расчетов, сплошной линией — количество частиц во второй

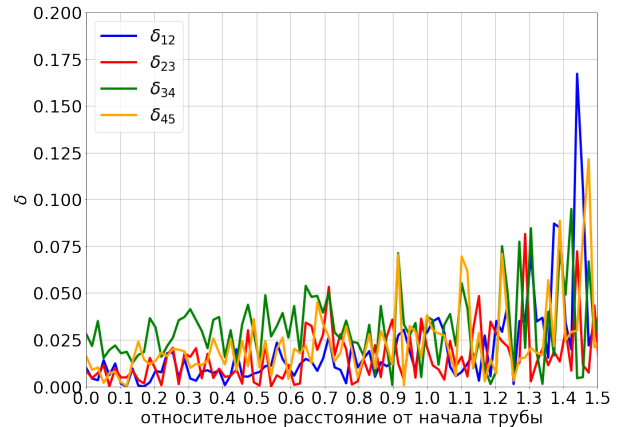


Рис. 4. Относительная разница между количествами частиц

серии расчетов, n^k — количество частиц для k -й сетки, d — диаметр частицы в метрах.

Для всех диаметров в обеих сериях расчетов количество частиц равномерно возрастает с течением времени. Из рис. 5 и 6 видно, что суммарное количество частиц в трубе с условием осаждения на стенках уменьшается.

5. Заключение

При сравнении времени осаждения и количества частиц, достигших выходного отверстия трубы, можно сделать вывод, что чем меньше размер частицы, тем раньше она оседает на стенках трубы. Таким образом, увеличение размера частицы способствует дальнейшему прохождению вдоль трубы, так как влияние сил инерции растет пропорционально радиусу частицы с большей скоростью по

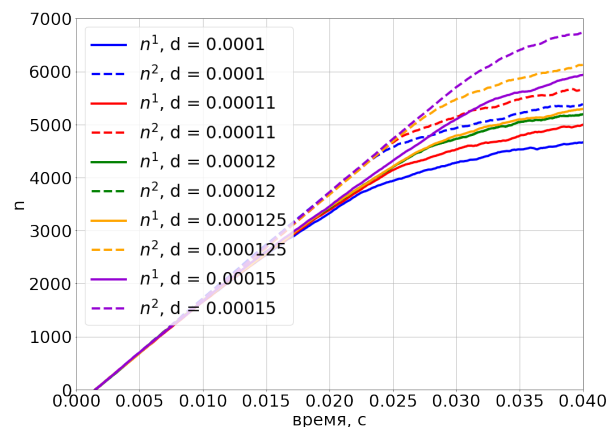


Рис. 5. Количество частиц в трубе в зависимости от времени

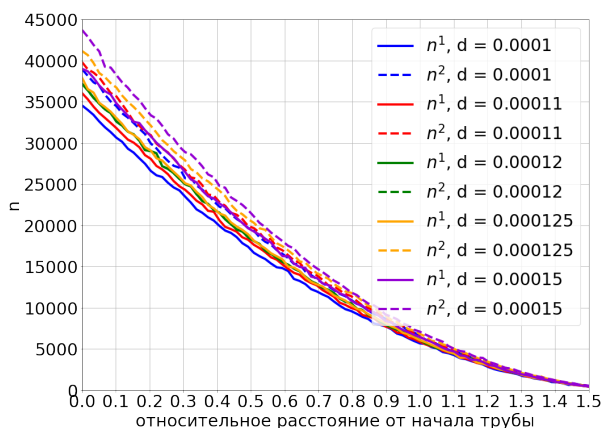


Рис. 6. Количество частиц в трубе в зависимости от относительного расстояния вдоль трубы

сравнению с силой Стокса.

Представленные результаты хорошо соотносятся друг с другом. В дальнейшем планируется сравнение с экспериментальными данными.

Список литературы

- [1] Snider D.M. An Incompressible Three-Dimensional Multiphase Particle-in-Cell Model for Dense Particle Flows // *Journal of Computational Physics*. 2001. V. 170, No. 2. Pp. 523–549. DOI: [10.1006/jcph.2001.6747](https://doi.org/10.1006/jcph.2001.6747)
- [2] Wargadalam V.J., Andira M.A., Putra C.A., Siswantara A.I., Gunadi G.G., Hariyotejo, Damis C., Aminuddin. Numerical Simulation of a Small-Scale Cyclone Separator using MP-PIC Method // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019. V. 694. P. 012015. DOI: [10.1088/1757-899X/694/1/012015](https://doi.org/10.1088/1757-899X/694/1/012015)
- [3] Kim S.H., Lee J.H., Braatz R.D. Multi-phase particle-in-cell coupled with population balance equation (MP-PIC-PBE) method for multiscale computational fluid dynamics simulation // *Computers and Chemical Engineering*. 2020. V. 134. P. 106686. DOI: [10.1016/j.compchemeng.2019.106686](https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2019.106686)
- [4] Snider D.M., O'Rourke P.J., Andrews M.J. Sediment flow in inclined vessels calculated using a multiphase particle in-cell model for dense particle flows // *International Journal of Multiphase Flow*. 1998. V. 24, No. 8. Pp. 1359–1382. DOI: [10.1016/S0301-9322\(98\)00030-5](https://doi.org/10.1016/S0301-9322(98)00030-5)
- [5] O'Rourke P.J., Zhao P., Snider D.M. A model for collisional exchange in gas/liquid/solid fluidized beds // *Chemical Engineering Science*. 2009. V. 64, No. 8. Pp. 1784–1797. DOI: [10.1016/j.ces.2008.12.014](https://doi.org/10.1016/j.ces.2008.12.014)
- [6] Verma V., Padding J.T. A novel approach to MP-PIC: Continuum particle model for dense particle flows in fluidized beds // *Chemical Engineering Science*. 2020. V. 6. P. 100053. DOI: [10.1016/j.cesx.2019.100053](https://doi.org/10.1016/j.cesx.2019.100053)
- [7] Zhou L., Lv W., Bai L., Han Y., Wang J., Shi W., Huang G. CFD-DEM study of gas-solid flow characteristics in a fluidized bed with different diameter of coarse particles // *Energy Reports*. 2022. V. 8. Pp. 2376–2388. DOI: [10.1016/j.egy.2022.01.174](https://doi.org/10.1016/j.egy.2022.01.174)
- [8] Muijlwijk C., Van den Akker H. The effect of liquid co-flow on gas fractions, bubble velocities and chord lengths in bubbly flows. Part I: Uniform gas sparging and liquid co-flow // *International Journal of Multiphase Flow*. 2021. V. 137. P. 103498. DOI: [10.1016/j.ijmultiphaseflow.2020.103498](https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2020.103498)
- [9] Ghahramani E., Arabnejad M., Bensow R. A comparative study between numerical methods in simulation of cavitating bubbles // *International Journal of Multiphase Flow*. 2019. V. 111. Pp. 339–359. DOI: [10.1016/j.ijmultiphaseflow.2018.10.010](https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2018.10.010)



Simulation of the sedimentation of a swirling flow of a rarefied granular medium in a cylindrical region by MP-PIC method

Bashirova K.I.

Mavlyutov Institute of Mechanics, UFRS RAS, Ufa, Russia

The object of the study is the deposition of small particles in a cylindrical region, for the evaluation of which a model was built in the OpenFOAM package. Many studies show that the MP-PIC method is well suited for modeling the interaction of a granular medium with liquid and gas flows. In this paper, the applicability of the method to solve the problem is evaluated. In the process of studying sedimentation in a swirling stream, groups of particles of different diameters were considered. It is shown that the smaller the particles, the faster they are deposited on the walls of a cylindrical tube. On the contrary, larger and heavier particles fly a long distance along the tube, which is explained by the greater influence of the inert component compared to the Stokes force. To evaluate the results obtained, a series of calculations using different sizes of grids was carried out. Good comparability of the results is shown. Further comparison with experimental data is planned.

Keywords: numerical simulation, particles sedimentation, OpenFOAM, MP-PIC, denseParticleFoam, multiphase systems

References

- [1] Snider D.M. An Incompressible Three-Dimension Snider D.M. An In-compressible Three-Dimensional Multiphase Particle-in-Cell Model for Dense Particle Flows // *Journal of Computational Physics*. 2001. V. 170, No. 2. Pp. 523–549.
DOI: 10.1006/jcph.2001.6747
- [2] Wargadalam V.J., Andira M.A., Putra C.A., Siswantara A.I., Gunadi G.G., Hariyotojo, Damis C., Aminuddin. Numerical Simulation of a Small-Scale Cyclone Separator using MP-PIC Method // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019. V. 694. P. 012015.
DOI: 10.1088/1757-899X/694/1/012015
- [3] Kim S.H., Lee J.H., Braatz R.D. Multi-phase particle-in-cell coupled with population balance equation (MP-PIC-PBE) method for multiscale computational fluid dynamics simulation // *Computers and Chemical Engineering*. 2020. V. 134. P. 106686.
DOI: 10.1016/j.compchemeng.2019.106686
- [4] Snider D.M., O'Rourke P.J., Andrews M.J. Sediment flow in inclined ves-sels calculated using a multiphase particle in-cell model for dense particle flows // *International Journal of Multiphase Flow* 24. 1998. V. 24, No. 8. Pp. 1359–1382.
DOI: 10.1016/S0301-9322(98)00030-5
- [5] O'Rourke P.J., Zhao. P., Snider D.M. A model for collisional exchange in gas/liquid/solid fluidized beds // *Chemical Engineering Science*. 2009. V. 64, No. 8. Pp. 1784–1797.
DOI: 10.1016/j.ces.2008.12.014
- [6] Verma V., Padding J.T. A novel approach to MP-PIC: Continuum particle model for dense particle flows in fluidized beds // *Chemical Engineering Science*. 2020. V. 6. P. 100053.
DOI: 10.1016/j.cesx.2019.100053
- [7] Zhou L., Lv. W., Bai L., Han Y., Wang J., Shi W., Huang G. CFD– DEM study of gas–solid flow characteristics in a fluidized bed with different diameter of coarse particles // *Energy Reports*. 2022. V. 8. Pp. 2376–2388.
DOI: 10.1016/j.egy.2022.01.174
- [8] Muilwijk C., Van den Akker H. The effect of liquid co-flow on gas fractions, bubble velocities and chord lengths in bubbly flows. Part I: Uniform gas sparging and liquid co-flow // *International Journal of Multiphase Flow*. 2021. V. 137. P. 103498.
DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2020.103498
- [9] Ghahramani E., Arabnejad M., Bensor R. A comparative study between numerical methods in simulation of cavitating bubbles // *International Journal of Multiphase Flow*. 2019. V. 111. Pp. 339–359.
DOI: 10.1016/j.ijmultiphaseflow.2018.10.010



О симметриях обобщенного уравнения Кортвега–де Фриза

Бабков О.К., Мухаметова Г.З.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа

Уравнение Кортвега–де Фриза – нелинейное уравнение в частных производных третьего порядка, играющее важную роль в теории нелинейных волн, в основном гидродинамического происхождения. Впервые было получено Жозефом Буссинеском в 1877 году, но подробный анализ был проведен уже Дидериком Кортвегом и Густавом де Фризом в 1895 году. Уравнение Кортвега–де Фриза, его аналоги и обобщения возникают в математических моделях в самых различных предметных областях.

Публикаций, в которых рассматривается с той или иной стороны уравнение Кортвега–де Фриза, насчитывается не менее нескольких тысяч наименований и авторы осознают невозможность написания хотя бы простого списка с перечислением этих публикаций. Тем не менее можно упомянуть, например [1, 2].

В работе рассматривается некоторое обобщение уравнения Кортвега–де Фриза, полученное путем введения произвольной функции, относительно которой производится групповая классификация. Найдены допустимые операторы обобщенного уравнения Кортвега–де Фриза, основная алгебра допустимых операторов и возможные случаи расширения алгебры допустимых операторов для функции-коэффициента специального вида. Также вычислены таблицы коммутаторов полученных алгебр. При этом отмечен факт изоморфности допустимых алгебр в двух различных случаях спецификации функции-коэффициента обобщенного уравнения Кортвега–де Фриза. Показано, что максимально возможная размерность алгебры допустимых операторов равна четырем и соответствует почти классическому уравнению Кортвега–де Фриза с возможным дополнительным линейным слагаемым. Во всех остальных случаях, если полученная алгебра допустимых операторов и расширяется, то до трехмерной алгебры Ли.

Ключевые слова: уравнение Кортвега–де Фриза, групповая классификация, допустимый оператор, алгебра Ли, таблица коммутаторов

1. Введение

Уравнение Кортвега–де Фриза хорошо известно примерами своих многочисленных применений. В одном из вариантов его можно представить в виде

$$u_t = buu_x + u_{xxx} \quad (1)$$

В работе рассматривается некоторое обобщение этого классического уравнения:

$$u_t = u_x F(u) + u_{xxx} \quad (2)$$

Мы изначально предполагаем нелинейность рассматриваемого уравнения, то есть предполагается, что функция $F(u)$ отлична от постоянной, $F'(u) \neq 0$.

В работе проводится вычисление базисов алгебр Ли точечных преобразований, допустимых для рассматриваемых уравнений. Вычисления проведены по схеме Ли–Овсянникова–Ибрагимова [3–5].

2. Операторы симметрии

Допустимые операторы симметрии будем искать в виде

$$X = A(t, x, u) \frac{\partial}{\partial t} + B(t, x, u) \frac{\partial}{\partial x} + H(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Здесь $A(t, x, u)$, $B(t, x, u)$, $H(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u}$ — пока неизвестные дифференцируемые функции переменных t, x, u . Продолжим этот оператор до третьего порядка и применим полученное продолжение к исходному уравнению. После очевидного расщепления возникшей системы определяющих уравнений сразу находятся производные коэффициентов оператора, равные нулю:

$$B_u = 0, \quad A_x = 0, \quad A_u = 0, \quad H_{uu} = 0.$$

Остается следующая система:

$$B_{xx} - H_{xu} = 0,$$

$$A_t - 3B_x = 0,$$

$$H_x F(u) - H_t + H_{xxx} = 0,$$

$$(A_t - B_x)F(u) + HF'(u) + B_t - B_{xxx} + 3H_{xu} = 0.$$

Так как $A_t = 3B_x$ и $A_x = 0$, то $B_{xx} = 0$.

Согласно первому уравнению, $H_{xu} = B_{xx}$, поэтому

$$H_{xu} = 0.$$

Рассмотрим оставшиеся два уравнения:

$$H_x F(u) - H_t + H_{xxx} = 0, \quad (3)$$

$$(A_t - B_x)F(u) + HF'(u) + B_t = 0. \quad (4)$$

Продифференцируем уравнение (4) по x дважды:

$$(A_{txx} - B_{xxx})F(u) + H_{xx}F'(u) + B_{txx} = 0.$$

Так как $A_x = 0$, $B_{xx} = 0$ то $H_{xx}F'(u) = 0$.

Поскольку $F'(u) \neq 0$, (уравнение нелинейно!), мы получаем $H_{xx} = 0$.

Дифференцирование уравнение (3) по переменной x дает

$$H_{xx}F(u) - H_{tx} + H_{xxx} = 0.$$

Так как $H_{xx} = 0$, то $H_{tx} = 0$.

Продифференцируем уравнение (3) по t :

$$\frac{\partial}{\partial t} : H_x F(u) - H_t + H_{xxx} = 0,$$

$$H_{tx}F(u) - H_{tt} + H_{txx} = 0.$$

Согласно полученному ранее, $H_{tx} = 0$, значит, $H_{tt} = 0$.

Таким образом, $H_{uu} = 0$, $H_{xu} = 0$, $H_{xx} = 0$, $H_{tx} = 0$, $H_{tt} = 0$.

Эти дифференциальные уравнения определяют вид функции $H(t, x, u)$:

$$H(t, x, u) = H_4 tu + H_3 t + H_2 x + H_1 u + H_0.$$

Здесь H_4, H_3, H_2, H_1, H_0 — постоянные коэффициенты.

Вернемся к уравнению (4) и найдем его вторую производную по t, x :

$$(A_{ttx} - B_{txx})F(u) + H_{tx}F'(u) + B_{ttx} = 0.$$

Поскольку $A_x = 0$, $H_{tx} = 0$, $B_{xx} = 0$, то, $B_{ttx} = 0$. Так как $A_t = 3B_x$, то $A_{ttt} = B_{ttx}$ и $A_{ttt} = 0$.

Таким образом, определяется вид функции $A(t, x, u)$:

$$A(t, x, u) = 3A_2 t^2 + 3A_1 t + A_0,$$

с постоянными коэффициентами A_2, A_1, A_0 .

Теперь найдем вторую производную по t уравнения (4), получим уравнение

$$(A_{ttt} - B_{ttx})F(u) + H_{tt}F'(u) + B_{ttt} = 0.$$

Здесь $A_{ttt} = 0$, $B_{ttx} = 0$, $H_{tt} = 0$, а значит, $B_{ttt} = 0$.

Далее, найдем производную по u уравнения (3) и производную по x уравнения (4),

$$H_{ux}F(u) + H_x F'(u) - H_{tu} + H_{uxxx} = 0,$$

$$(A_{tx} - B_{xx})F(u) + H_x F'(u) + B_{tx} = 0.$$

В этих уравнениях $H_{ux} = 0$, $A_x = 0$, $B_{xx} = 0$, поэтому

$$H_x F'(u) - H_{tu} = 0, \quad H_x F'(u) + B_{tx} = 0.$$

Вычитаем из первого уравнения второе, получаем $H_{tu} = -B_{tx}$, откуда $H_4 = -2A_2$. Таким образом, $B_u = 0$, $B_{xx} = 0$, $B_{ttx} = 0$, $B_{ttt} = 0$, $B_x = 2A_2 t + A_1$.

Таким образом, функция B удовлетворяет системе дифференциальных уравнений, что позволяет определить ее вид, B_2, B_1, B_0 — постоянные коэффициенты:

$$B(t, x, u) = B_2 t^2 + 2txA_2 + B_1 t + xA_1 + B_0.$$

Итак, мы получили общий вид коэффициентов предполагаемого допустимого оператора:

$$A(t, x, u) = 3A_2 t^2 + 3A_1 t + A_0,$$

$$B(t, x, u) = B_2 t^2 + 2txA_2 + B_1 t + xA_1 + B_0,$$

$$H(t, x, u) = -2A_2 tu + H_3 t + H_1 u + H_2 x + H_0.$$

Подставим эти представления коэффициентов в уравнения (3) и (4). Это приведет нас к следующей, пока нерасщепленной, системе определяющих уравнений:

$$H_2 F(u) + 2uA_2 - H_3 = 0,$$

$$(4A_2t + 2A_1)F(u) + (-2A_2tu + H_3t + H_1u + H_2x + H_0)F'(u) + 2tB_2 + 2A_2x + B_1 = 0.$$

Расщепляя эти уравнения по переменным t, x , получаем систему дифференциальных уравнений, которой должна удовлетворять функция $F(u)$:

$$\begin{aligned} H_2F(u) + 2uA_2 - H_3 &= 0, \\ (H_1u + H_0)F'(u) + 2F(u)A_1 + B_1 &= 0, \\ F'(u)H_2 + 2A_2 &= 0, \\ (-2uA_3 + H_3)F'(u) + 4F(u)A_2 + 2B_2 &= 0. \end{aligned}$$

Третье уравнение этой системы является следствием ее первого уравнения (это его производная по переменной u), его можно исключить; остаются три уравнения

$$H_2F(u) + 2uA_2 - H_3 = 0, \quad (5)$$

$$(H_1u + H_0)F'(u) + 2F(u)A_1 + B_1 = 0, \quad (6)$$

$$(2uA_2 - H_3)F'(u) - 4F(u)A_2 - 2B_2 = 0, \quad (7)$$

которым должна удовлетворять функция $F(u)$. Подобным уравнениям могут удовлетворять только вполне определенные функции: степенная, в том числе линейная, показательная или логарифмическая функции.

Приступим к разбору возможных случаев. Имеем:

1. Если $F(u)$ – функция, отличная от перечисленных, $F'(u) \neq 0$, то все коэффициенты $H_3, H_2, H_1, H_0, B_2, B_1, A_2, A_1$ системы уравнений (5)–(7) должны быть равны нулю. Это означает, что для функции $F(u)$ общего вида допустимый оператор имеет вид

$$X = A_0 \frac{\partial}{\partial t} + B_0 \frac{\partial}{\partial x}$$

с произвольными постоянными коэффициентами A_0, B_0 . Потому алгебра допустимых операторов уравнения

$$u_t = u_x F(u) + u_{xxx}$$

будет двумерной абелевой алгеброй Ли, порожденной операторами $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}$:

$$L_2 = \left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right].$$

Операторы $X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x}$ во всех полученных ниже алгебрах являются обязательной составной частью базиса алгебры допустимых операторов.

Таблица коммутаторов абелевой алгебры Ли заполнена, очевидно, нулями.

2. Пусть $F(u)$ – линейная функция (с постоянными коэффициентами f_1, f_0),

$$F(u) = f_1u + f_0, \quad f_1 \neq 0.$$

На примере этого варианта покажем подробно процесс нахождения вида допустимого оператора

Подставим эту функцию в систему уравнений (5)–(7), сгруппируем слагаемые по степеням переменной u и приравняем к 0. Поскольку равенства должны выполняться при произвольных значениях переменной u , все коэффициенты полученных равенств должны быть равны нулю. Решаем полученную систему линейных уравнений и находим зависимость между коэффициентами допустимого оператора:

$$A_2 = 0, \quad B_2 = 0, \quad H_2 = 0, \quad H_3 = 0,$$

$$H_1 = -2A_1, \quad B_1 = -2A_1f_0 - H_1f_1.$$

Подставим полученные специализации переменных в общий вид коэффициентов допустимого оператора

$$A(t, x, u) = 3A_1t + A_0,$$

$$B(t, x, u) = (-2A_1f_0 - H_1f_1)t^2 + 2B_1t + xA_1 + B_0,$$

$$H(t, x, u) = -2A_1u + H_0.$$

Теперь подставляем эти выражения в общий вид допустимого оператора, перегруппировываем слагаемые по величинам A_0, A_1, B_0 и H_0 :

$$\begin{aligned} X = A_0 \frac{\partial}{\partial t} + B_0 \frac{\partial}{\partial x} + H_0 \left(-tf_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} \right) + \\ + A_1 \left(3t \frac{\partial}{\partial t} + (x - 2f_0t) \frac{\partial}{\partial x} - 2u \frac{\partial}{\partial u} \right). \end{aligned}$$

Теперь можно сформировать базис алгебры допустимых операторов уравнения

$$u_t = (f_1u + f_0)u_x + u_{xxx}, \quad f_1 \neq 0.$$

Его образуют дифференциальные операторы первого порядка – выражения при коэффициентах A_0, A_1, B_0 и H_0 :

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = -f_1t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_4 = 3t \frac{\partial}{\partial t} - (2f_0t - x) \frac{\partial}{\partial x} - 2u \frac{\partial}{\partial u}.$$

Таким образом, алгебра допустимых операторов уравнения оказывается четырехмерной за счет

появления дополнительных допустимых операторов X_3, X_4 .

$$X_3 = -f_1 t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_4 = 3t \frac{\partial}{\partial t} - (2f_0 t - x) \frac{\partial}{\partial x} - 2u \frac{\partial}{\partial u}.$$

Таблица коммутаторов полученной алгебры Ли:

0	0	$-f_1 X_2$	$3X_1 - 2f_0 X_2$
0	0	0	X_2
$f_1 X_2$	0	0	$-2X_3$
$-3X_1 + 2f_0 X_2$	$-X_2$	$2X_3$	0

Если $F(u)$ не является линейной функцией, $F''(u) \neq 0$, то из системы определяющих уравнений (5)–(7) выводятся следующие ограничения:

$$H_2 = 0, \quad A_2 = 0, \quad H_3 = 0, \quad B_2 = 0,$$

После чего остается единственное уравнение, которому должна удовлетворять функция $F(u)$

$$(H_1 u + H_0)F'(u) + 2F(u)A_1 + B_1 = 0.$$

Уравнению такого вида может удовлетворять только одна из следующих функций

1. Степенная функция $F(u) = (au + b)^\lambda + f_0, \lambda \neq 0, 1, a \neq 0$; в этом случае алгебра операторов уравнения

$$u_t = ((au + b)^\lambda + f_0) u_x + u_{xxx}, \quad a \neq 0, \quad \lambda \neq 0, 1$$

расширяется до трехмерной алгебры за счет присоединения допустимого оператора

$$X_3 = -3a\lambda t \frac{\partial}{\partial t} + a\lambda(2tf_0 - x) \frac{\partial}{\partial x} + 2(au + b) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Таблица коммутаторов:

0	0	$-3X_1 + 2f_0 X_2$
0	0	$-X_2$
$3X_1 - 2f_0 X_2$	X_2	0

2. Экспоненциальная функция $F(u) = f_1 e^{\lambda u} + f_0$, где $f_1, \lambda \neq 0$. Алгебра допустимых операторов уравнения $u_t = (f_1 e^{\lambda u} + f_0) u_x + u_{xxx}, f_1, \lambda \neq 0$ также трехмерна, за счет присоединения допустимого оператора

$$X_3 = -3\lambda t \frac{\partial}{\partial t} + \lambda(2tf_0 - x) \frac{\partial}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial u}.$$

Таблица коммутаторов:

0	0	$-3X_1 + 2f_0 X_2$
0	0	$-X_2$
$3X_1 - 2f_0 X_2$	X_2	0

Заметим, что данная таблица коммутаторов совпадает с аналогичной таблицей предыдущего случая (при несовпадающих базисах). Для совершенно разных функций — коэффициентов уравнения алгебры допустимых операторов оказались изоморфны.

3. И, наконец, возможен вариант с логарифмической функцией

$$F(u) = f_1 \ln(au + b) + f_0$$

$$u_t = [f_1 \ln(au + b) + f_0] u_x + u_{xxx}, \quad a, f_1 \neq 0$$

с трехмерной алгеброй допустимых операторов, расширяющей двумерную основную алгебру допустимых операторов за счет присоединения оператора

$$X_3 = -af_1 t \frac{\partial}{\partial x} + (au + b) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Таблица коммутаторов в этом случае имеет вид

0	0	$-f_1 X_2$
0	0	0
$f_1 X_2$	0	0

3. Заключение

В работе найдены допустимые операторы обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза: основная алгебра допустимых операторов — двумерная абелева алгебра Ли, и возможные случаи расширения алгебры допустимых операторов для функции-коэффициента специального вида. Найдены таблицы коммутаторов полученных алгебр.

Отмечен факт изоморфности допустимых алгебр в двух различных случаях спецификации функции-коэффициента обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза.

Максимально возможная размерность алгебры допустимых операторов равна четырем и соответствует почти классическому уравнению Кортевега–де Фриза с возможным дополнительным линейным слагаемым:

$$u_t = (f_1 u + f_0) u_x + u_{xxx}, \quad f_1 \neq 0$$

Во всех остальных случаях, если алгебра допустимых операторов и расширяется, то до трехмерной алгебры Ли.

Список литературы

- [1] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука. 1980. 319 с.
- [2] Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир. 1989. 326 с.
- [3] Овсянников Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: Издательство СО АН СССР. 1962. 240 с.
- [4] Овсянников Л.В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во НГУ. 1966. 132 с.
- [5] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука. 1983. 280 с.



On the symmetries of the generalized Korteweg-de Vries equation

Babkov O.K., Mukhametova G.Z.

Ufa State Aviation Technical University, Ufa

The Korteweg–de Vries equation is a third–order nonlinear partial differential equation that plays an important role in the theory of nonlinear waves, mainly of hydrodynamic origin. It was first obtained by Joseph Boussinesq in 1877, but a detailed analysis was already carried out by Diederik Korteweg and Gustav de Vries in 1895. The Korteweg–de Vries equation, its analogues and generalizations arise in mathematical models in a variety of subject areas. There are at least several thousand publications in which the Korteweg–de Vries equation is considered from one side or another, and the authors are aware of the impossibility of writing at least a simple list listing these publications. Nevertheless, it is possible to mention, for example, The paper considers some generalization of the Korteweg–de Vries equation obtained by introducing an arbitrary function with respect to which a group classification is performed. The admissible operators of the generalized Korteweg–de Vries equation, the basic algebra of admissible operators and possible cases of extension of the algebra of admissible operators for a coefficient function of a special kind are found. Tables of commutators of the obtained algebras are also calculated. At the same time, the fact of isomorphism of admissible algebras in two different cases of specification of the function-coefficient of the generalized Korteweg–de Vries equation is noted. It is shown that the maximum possible dimension of the algebra of admissible operators is equal to four and corresponds to the almost classical Korteweg–de Vries equation with a possible additional linear term. In all other cases, if the resulting algebra of admissible operators and extends, then to a three-dimensional Lie algebra.

Keywords: : Korteweg–de Vries equation, group classification, admissible operator, Lie algebra, commutator table.

References

- [1] Novikov S., Manakov S.V., Pitaevskii L.P., Zakharov V.E. Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method. Springer Science. 1984. 276 p.
- [2] Newell A.C. Solitons in Mathematics and Physics. Philadelphia: SIAM. 1985. 260 p.
DOI: 10.1137/1.9781611970227
- [3] Ovsyannikov L.V. Group Properties of Differential Equations. Siberian Branch, USSR Academy of Sciences, Novosibirsk. 1962, 240 p. (in Russian).
- [4] Ovsyannikov L.V. Lectures on the Theory of Group Properties of Differential Equations. World Scientific. 2013. 156 p.
DOI: 10.1142/8762
- [5] Ibragimov N.H. Transformation groups applies to mathematical physics. Dordrecht: Riedel. 1985. 409.



Семинары Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН 2021 год (аннотации докладов)

Секретарь семинаров ИМех УФИЦ РАН Моисеев К.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова, УФИЦ РАН, Уфа

Представлены краткие аннотации докладов, сделанных на общем семинаре Института механики в 2021 году.

Ключевые слова: кривошипно-шатунный механизм, упругий шарнир, угловая скорость, численно-аналитический метод, многофазная среда

Кривошипно-шатунный механизм с упругими шарнирами, имеющими заданные характеристики

Зотов А.Н.

Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа (04.03.2021 г.)

Доклад посвящен исследованию работы упругих шарниров с заданными зависимостями восстанавливающего момента от угла поворота в кривошипно-шатунном механизме. Упругий шарнир представляет собой упругий элемент, перемещающийся между направляющими расчетной формы. Форма направляющих определяет восстанавливающий момент данного шарнира. Установка такого шарнира с расчетной характеристикой между стойкой и кривошипом позволяет получить постоянную угловую скорость кривошипа. Установка упругого шарнира между кривошипом и шатуном позволяет существенно уменьшить боковую силу, действующую на поршень. При добавлении должным образом противовеса на шатуне возможно получить нулевую боковую силу. Представлен алгоритм расчета формы направляющих упругого шарнира.

Математическое моделирование течений жидкости и электрохимического формообразования с использованием методов численной фильтрации

Соколова А.А.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа (01.04.2021 г.)

Представлены результаты математического моделирования течений жидкости и процессов электрохимического формообразования с помощью численно-аналитических методов. Проведена оценка погрешностей и обоснование оценок с помощью численной фильтрации результатов вычислительного эксперимента. Разработаны модификации численно-аналитических методов решения задач гидродинамики и комплекс программ для уточнения решений и проверки утверждений, высказанных ранее. Разработаны модификации моделей, численно-аналитических методов и комплекс программ решения плоских и осесимметричных задач ЭХО для исследования процессов со сложными условиями на границах. Проведен анализ построенных моделей методом вычислительного эксперимента на ЭВМ. Выполнены расчеты, применена фильтрация, оценены погрешности полученных результатов, проведено их

сравнение с натурным экспериментом. Исследованы нестационарные процессы ЭХО вращающимся электродом–инструментом.

Экспериментальное исследование динамики твердых и газовых включений в жидкости в вибрационном и акустическом полях

Фатгалов О.О.

Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук, Пермь (25.11.2021 г.)

Работа посвящена экспериментальному исследованию динамики многофазных систем при воздействии неакустических и акустических вибраций. Целью работы является определение закономерностей процессов, возникающих в жидкостях с твердыми и газовыми включениями при наличии неакустических вибраций и ультразвука.

Для достижения поставленной цели решаются три задачи: экспериментальное исследование динамики ансамбля твердых частиц в жидкости, подвергающейся неакустическим вибрациям, в за-

висимости от параметров вибраций и вязкости жидкости; экспериментальное исследование процессов возникновения, дрейфа и коалесценции пузырьков под действием акустических ультразвуковых вибраций в объеме жидкости и на границе раздела жидкость–твердое тело, помещенное в жидкость; экспериментальное исследование эффективности применения акустических ультразвуковых вибраций в процессах обогащения руд методом флотации.

Место и время проведения заседаний:

по четвергам, в 16:00, дистанционно или в аудитории 416 Института механики им. Р.Р. Мавлютова — обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (ИМех УФИЦ РАН)

Адрес: Россия, 450054, г. Уфа, Проспект Октября, 71
Секретарь семинаров: канд. физ.-мат. наук, доцент Константин Валерьевич Моисеев
e-mail: constgo@mail.ru



Конкурсы молодых ученых Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН 2021 год (аннотации докладов)

Председатель Совета молодых ученых ИМех УФИЦ РАН Сираева Д.Т.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова, УФИЦ РАН, Уфа

Представлены краткие аннотации докладов, представленных на конкурсах молодых ученых ИМех им. Р.Р. мавлютова и УФИЦ РАН в 2021 году.

Ключевые слова: инвариантные подмодели, микрофлюидика, собственные колебания, водные пены

1. Конкурс научных докладов молодых ученых ИМех УФИЦ РАН

Инвариантные подмодели уравнений газовой динамики в случае специального уравнения состояния

Сираева Д.Т.

1 место

Рассматриваются уравнения газовой динамики с уравнением состояния специального вида — давление есть сумма функций плотности и энтропии. Уравнение состояния выбрано из работы академика Л.В. Овсянникова "Программа Подмодели. Газовая динамика" (ПМТФ, 1994). Система ранее не рассматривалась другими авторами с позиции симметричного (группового) анализа. Допускаемая системой алгебра Ли 12-мерна, специфика алгебры заключена в добавлении к известным базисным операторам 11-мерной алгебры Ли оператора дифференцирования по давлению. В настоящей работе классифицированы инвариантные подмодели рангов 3, 2 и 1. Для инвариантных подмоделей ранга 1 получены 7 семейств точных решений исходной системы уравнений. Для одного из решений в

частном случае построены траектории движения частиц и показано движение объема частиц, в начальный момент времени ограниченного сферой.

Миграция раковых клеток в микроканале при наличии хемоаттрактанта

Валиев А.А.

2 место

Изучен миграционный потенциал раковых клеток через различные по ширине микроканалы, обусловленный действием хемоаттрактанта. Хемоаттрактант и питательная среда вводились непосредственно из соответствующих отдельных резервуаров под действием гидростатического напора. За счет диффузии происходило формирование потока с градиентом концентрации поперек ламинарного течения в канале, который приводит к активизации миграции раковых клеток. Наличие миграционных каналов разного размера позволило анализировать присущие клеткам миграционные способности. В серии экспериментов выявлена способность эпителиоподобных клеток линии метастатического рака совершать миграции в разработанной авторами миграционной микрофлюидной системе. Характер миграции зависит от ширины микроканалов канала и расположения клеток в момент добавления хемоаттрактанта.

Затухающие собственные колебания жидкости в скважине, сообщающейся с пластом

Мамаева З.З., аспирант ИМех УФИЦ РАН
Руководитель — д.ф.-м.н. В.Ш. Шагапов
3 место

В данной работе представлена математическая модель для описания колебаний столба жидкости в вертикальной скважине, возникающих при резком закрытии или открытии скважины. Для описания модели использованы уравнения сохранения масс и импульсов в области скважины, уравнения сохранения масс в области открытого участка скважины, уравнение для описания упругого режима фильтрации в сообщающемся со скважиной пласте. Используя решение уравнения в виде стоячих волн с учетом граничных и начальных условий получено характеристическое уравнение для определения комплексных частот. На основании численного решения характеристического уравнения определены предельные режимы процесса, проведен анализ влияния основных параметров системы на зависимости частоты колебаний, коэффициента затухания и декремента затухания и изучена динамика давления в различных точках скважины.

Зависимость между давлением и расходом при неустановившихся режимах работы скважины с ГРП

Фокеева Н.О., аспирант ИМех УФИЦ РАН
Руководитель — д.ф.-м.н. В.Ш. Шагапов
3 место

В современном мире «сложной» нефти одним из важнейших методов интенсификации притока является гидроразрыв пласта. В работе теоретически изучается задача о фильтрации флюида в трещине ГРП и окружающем трещину пласте, а также динамика изменения давления и дебита при переходных режимах работы скважины. Полученные в работе решения позволяют описывать связь между расходом жидкости и эволюцией давления в трещине. Результаты могут быть применены для интерпретации данных ГДИС, отображают основные зависимости параметров пласта и характеристик трещины ГРП.

2. Конкурс научных работ молодых ученых УФИЦ РАН

Моделирование пространственных динамических процессов в водных пенах

Гайнуллина Э.Ф., аспирант ИМех УФИЦ РАН
Руководитель — д.ф.-м.н. Р.Х. Болотнова
3 место

На сегодняшний день актуальна проблема ослабления ударных волн (УВ) и преобразования их энергии в менее разрушительные формы. Препарды из водных пен являются одной из перспективных технологий противоударной защиты: в силу своей высокой сжимаемости пены способны значительно снижать скорость распространения и амплитуду УВ. В настоящей работе исследованы динамические процессы, сопровождающие распространение УВ различной интенсивности в водных пенах. При моделировании сильного ударного воздействия на водную пену использовано предположение о разрушении пены на микрокапли за фронтом УВ, и справедлива двухскоростная модель газожидкостной смеси с учетом сил межфазного взаимодействия, межфазного теплообмена и явления синерезиса пены. Поведение водной пены при взаимодействии со слабыми УВ описывалось применением односкоростной модели, учитывающей межфазный теплообмен и эффективную вязкость пены как неньютоновской жидкости. Численная реализация моделей выполнена в новых решателях, созданных в открытом программном комплексе OpenFOAM. Изучены особенности взаимодействия мощного сферического ударного импульса с барьером из водной пены, причины блокировки воздушных УВ пенной преградой и эволюция импульса давления при взаимодействии с границей газовой области и пены, приводящая к образованию серии тороидальных вихрей. Показано существенное снижение амплитуды и скорости УВ при ее распространении вглубь пены для условий экспериментов E. Del Prete et al. (2013) по сферическому взрыву. Установлено, что процесс синерезиса пены сопровождается увеличением скорости УВ. Исследован процесс распространения слабой УВ в пенный слой в соответствии с экспериментами M. Monloubou et al. (2019) с анализом структуры водной пены за фронтом УВ. Проведен сравнительный анализ расчетов с экспериментальными данными, который показал их удовлетворительное согласование. Полученные результаты могут быть использованы в задачах проектирования эффективных защитных барьеров, локализирующих энергию ударных волн и снижающих риски возникновения аварийных ситуаций при проведении взрывоопасных работ.

Содержание

Механика жидкости и газа

Насибуллаева Э.Ш.

Рассеяние звуковых волн на сферах: методы решения и основные характеристики (обзор) 88–104

Мамаева З.З., Рафикова Г.Р.

Исследование собственных колебаний нефти в вертикальной скважине 105–111

Галимзянов М.Н.

Волны давления в трубе, заполненной жидкостью при наличии в ней
пузырьковой области в форме тора 112–120

Насибуллаев И.Ш.

Использование свободного ПО для визуализации результатов
моделирования динамических процессов 121–143

Краткие сообщения

Баширова К.И.

Моделирование осаждения закрученного потока разреженной гранулированной среды
в цилиндрической области методом МР-РС 144–148

Бабков О.К., Мухаметова Г.З.

О симметриях обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза 149–154

Моисеев К.В.

Семинары Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН
2021 год (аннотации докладов) 155–156

Сираева Д.Т.

Конкурсы молодых ученых Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН
2021 год (аннотации докладов) 157–158

Contents

Liquid & Gas Mechanics

Nasibullaeva E.Sh.

Scattering of sound waves on spheres: methods and main characteristics (review) [in Russian] 88–104

Mamaeva Z.Z., Rafikova G.R.

Study of natural oscillations of oil in a vertical well [in Russian] 105–111

Galimzyanov M.N.

Pressure waves in a tube filled with a liquid with a bubble region
in it in the form of a torus [in Russian] 112–120

Nasibullayev I.Sh.

Application of free software to visualize the results of simulation
of dynamic processes [in Russian] 121–143

Brief Communications

Bashirova K.I.

Simulation of the sedimentation of a swirling flow of a rarefied granular medium
in a cylindrical region by MP-PIC method [in Russian] 144–148

Babkov O.K., Mukhametova G.Z.

On the symmetries of the generalized Korteweg-de Vries equation [in Russian] 149–154

Moiseev K.V.

Seminars of the Mavlyutov Institute of Mechanics UFRS RAS 2021 (abstracts) [in Russian] 155–156

Siraeva D.T.

Concurses for young scientists of the Mavlyutov Institute of Mechanics UFRS RAS
2021 (abstracts) [in Russian] 157–158