



ISSN: 2658–5782

Номер 2

2021

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org





О преобразованиях эквивалентности газодинамических сред¹

Хабилов С.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В работе рассмотрена квазилинейная система дифференциальных уравнений, описывающая движение идеальной газодинамической сплошной среды. Из термодинамического тождества следует, что среда двухпараметрическая. Уравнение состояния задается внутренней энергией в функции от энтропии и удельного объема. Преобразования эквивалентности не изменяют вид системы, но меняют лишь уравнения состояния. Найдены преобразования эквивалентности, преобразующие лишь термодинамические параметры и растягивающие все переменные. Известная групповая классификация, расширяющая допускаемую группу, состоит из найденных преобразований эквивалентности. Есть два случая не удовлетворяющие этому правилу. Первый случай — уравнение состояния линейно по удельному объему. Второй случай — для одноатомного газа, когда модель инвариантна относительно проективного преобразования. Если уравнение состояния изменяется со временем, то найдены семейства уравнений состояния, для которых проективные преобразования являются преобразованиями эквивалентности.

Ключевые слова: газовая динамика, уравнение состояния, преобразование эквивалентности, групповая классификация

1. Введение

Групповой анализ уравнений газовой динамики наиболее продвинуто [1, 2]. Найдены алгебры Ли допускаемой группы преобразований. Проведена групповая классификация по функции $A(p, \rho) = \rho c^2$, $c^2 = f_\rho$, где c — скорость звука; $p = f(\rho, S)$ — уравнение состояния в виде давления как функции плотности и энтропии [1, 3]. Построены оптимальные системы неподобных подалгебр основных допускаемых групп [4]. Составлен граф вложенных подалгебр, позволяющий строить цепочки вложенных подмоделей [5]. Рассмотрены множества инвариантных, частично инвариантных подмоделей и точных решений, которые тоже могут быть подвержены групповому анализу. Физическая интерпретация полученных решений, подобно тому, как это сделано для одномерных нестационарных движений и плоских установившихся

безвихревых течений [6, 7], далека от завершения.

В работе рассмотрены преобразования эквивалентности, которые изменяют лишь уравнения состояния $\varepsilon = e(V, S)$, $V = \rho^{-1}$, стационарного типа и $\varepsilon = e(t, V, S)$ нестационарного типа. Показано, что все расширения допускаемых групп при групповой классификации [1] являются преобразованиями эквивалентности некоторых классов уравнений состояния.

2. Идеальные двухпараметрические среды газодинамического типа

Законы сохранения массы, импульса и энергии без внешних сил и теплопроводности в дифференциальной форме имеют вид [6]:

$$\begin{aligned} V_t + (\vec{u} \cdot \nabla)V &= V \nabla \cdot \vec{u}, \\ \vec{u}_t + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + V \nabla p &= 0, \\ \varepsilon_t + (\vec{u} \cdot \nabla)\varepsilon + V p \nabla \cdot \vec{u} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $V = \rho^{-1}$ — удельный объем; ρ — плотность; p — давление; ε — удельная внутренняя энергия; \vec{u} — скорость частицы газа в момент времени t

¹Работа поддержана РФФИ (грант № 18-29-10071) и средствами государственного задания № 0246-2019-0052.

точке пространства $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$; $\nabla = \partial_{\vec{x}}$ — градиент. Пять скалярных уравнений связывают шесть газодинамических величин. Для замыкания системы пользуются энергетическим термодинамическим тождеством

$$TdS = d\varepsilon + pdV, \quad (2)$$

справедливым в частице газа. Здесь T — температура; S — энтропия; d — дифференциал; $\varepsilon = e(S, V)$ — уравнение состояния термодинамической среды. Все термодинамические функции в системе (1) зависят от t и \vec{x} . Покажем, как связаны функции $e(S, V)$ и $\varepsilon(t, \vec{x})$. Если дифференциал взять вдоль мировой линии $D = \partial_t + \vec{u} \cdot \nabla$, то из (2) следует уравнение для энтропии

$$S_t + \vec{u} \cdot \nabla S = 0. \quad (3)$$

Дифференцирование вдоль \vec{x} , t дает еще $n + 1$ равенство

$$T\nabla S = \nabla\varepsilon + p\nabla V, \quad TS_t = \varepsilon_t + pV_t. \quad (4)$$

Мы получаем $n + 3$ эволюционных уравнений, n неэволюционных равенств и $2^{-1}n(n - 1)$ условий совместности, сравнивая смешанные производные функции $\varepsilon(t, \vec{x})$.

В одномерном случае $n = 1$ все функции зависят от t и x : $\varepsilon = \varepsilon(t, x)$, $V = V(t, x)$, $S = S(t, x)$. Исключение t, x дает уравнение состояния двухпараметрической среды

$$\varepsilon = e(V, S), \quad T = e_S, \quad p = -e_V. \quad (5)$$

При $n = 2$ из условий совместности равенств (4) следует

$$\begin{vmatrix} S_t & S_x & S_y \\ p_t & p_x & p_y \\ V_t & V_x & V_y \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} S_t & S_x & S_y \\ T_t & T_x & T_y \\ V_t & V_x & V_y \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$p = p(V, S)$, $T = T(V, S)$, а из (2) следует (5). В пространстве $\mathbb{R}^n(\vec{x})$, $n \geq 3$ из условий совместности (4) следует

$$\begin{vmatrix} S_t & S_{x^i} & S_{x^j} \\ p_t & p_{x^i} & p_{x^j} \\ V_t & V_{x^i} & V_{x^j} \end{vmatrix} = 0 \quad (i \neq j) \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} S_t & S_{x^i} & S_{x^j} \\ T_t & T_{x^i} & T_{x^j} \\ V_t & V_{x^i} & V_{x^j} \end{vmatrix} = 0.$$

В новой системе координат S, V, x^3, \dots, x^n , отсюда следует $p = p(V, S)$, $T = T(V, S)$, а из (2) следует (5).

Итак, среды с термодинамическим тождеством (2) являются двухпараметрическими. С уравнением состояния $\varepsilon = e(V, S)$ движение определяется уравнениями

$$\begin{aligned} DV &= V\nabla \cdot \vec{u}, \\ D\vec{u} &= V(e_{VV}\nabla V + e_{VS}\nabla S), \quad DS = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Для других термодинамических функций справедливо уравнение

$$\begin{aligned} D\varepsilon &= Ve_V\nabla \cdot \vec{u}, \quad Dp = -Ve_{VV}\nabla \cdot \vec{u}, \\ DT &= Ve_{SV}\nabla \cdot \vec{u}. \end{aligned} \quad (7)$$

Если $e_{VV} > 0$, то система уравнений гиперболична и описывает движения газа [6, 7]. Для измеряемых термодинамических величин p, V, T уравнение состояния и дифференциальные уравнения принимают вид [7]:

$$\begin{aligned} p &= g_V, \quad \varepsilon = Tg_T - g(T, V), \quad S = g_T, \\ g_{TT}Dp &= V(g_{VV}g_{TT} - g_{TV}^2)\nabla \cdot \vec{u}, \\ g_{TT}DT &+ Vg_{TV}\nabla \cdot \vec{u} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Дифференциальные уравнения для V, \vec{u} из (1) и для T из (8) задают замкнутую систему с измеряемым уравнением состояния.

3. О преобразованиях эквивалентности

Система (6) удобна для группового анализа, когда разыскиваются преобразования всех переменных (зависимых и независимых), оставляющих неизменными уравнения системы. Преобразования, не меняющие уравнение состояния, образуют ядро допускаемых групп преобразований. Ядро было найдено Л.В. Овсянниковым [3]. Оно состоит из переносов по времени и по пространству, галилеевых переносов (движения начала с постоянной скоростью), вращений вокруг любой оси, проходящей через начало и равномерного растяжения по времени и пространству. Ядро образует 11-параметрическую группу преобразований. Ядро может расширяться для специальных уравнений состояния. Классификацию всех расширений следует делать с точностью до преобразований эквивалентности, когда система (6) не меняется, но изменяется лишь уравнение состояния. Некоторые преобразования были замечены в работах [1, 2], и с их помощью была проделана групповая классификация. Оказывается, что почти все расширения являются преобразованиями эквивалентности.

Вычислим частный случай преобразований эквивалентности системы (6) вида

$$\tilde{\varepsilon} = h(S, V, \varepsilon), \quad \tilde{V} = g(S, V, \varepsilon), \quad \tilde{S} = f(S, V, \varepsilon), \quad (9)$$

когда уравнение состояния $\varepsilon = e(S, V)$ перейдет в $\tilde{\varepsilon} = \tilde{e}(\tilde{S}, \tilde{V})$, т.е. выполнено соотношение

$$\begin{aligned} h(S, V, e(S, V)) &= \\ &= \tilde{e}(f(S, V, e(S, V)), g(S, V, e(S, V))), \end{aligned} \quad (10)$$

а переменные t, \vec{x}, \vec{u} инвариантны.

Из уравнений (6) и (7) следует

$$\begin{aligned} D\tilde{S} &= f_S DS + f_V DV + f_\varepsilon D\varepsilon = 0 \Rightarrow f_V + f_\varepsilon e_V = 0; \\ D\tilde{V} &= g_S DS + g_V DV + g_\varepsilon D\varepsilon = \tilde{V} \nabla \cdot \tilde{u} \\ &\Rightarrow g = V(g_V + g_\varepsilon e_V). \end{aligned}$$

Если уравнение состояния общего вида, т.е. g_V принимает любые значения, то $f_V = 0$, $f_\varepsilon = g_\varepsilon = 0$, $g = Vg_V$ (расщепление по e_V). Далее считаем $\tilde{S} = f(S)$, $\tilde{V} = Vg(S)$. Из уравнений для импульса

$$\nabla \cdot \tilde{u} = \tilde{V}(\tilde{e}_{\tilde{V}\tilde{V}} \nabla \tilde{V} + \tilde{e}_{\tilde{V}\tilde{S}} \nabla \tilde{S}) = V(e_{VV} \nabla V + e_{VS} \nabla S)$$

следует

$$e_{VS} = g(Vg' \tilde{e}_{\tilde{V}\tilde{V}} + f' \tilde{e}_{\tilde{V}\tilde{S}}), \quad e_{VV} = g^2 \tilde{e}_{\tilde{V}\tilde{V}}. \quad (11)$$

Дифференцирование (10) по S и по V дает зависимость между первыми производными функций e , \tilde{e} :

$$h_S + h_\varepsilon e_S = \tilde{e}_{\tilde{S}} f' + \tilde{e}_{\tilde{V}} Vg', \quad h_V + h_\varepsilon e_V = \tilde{e}_{\tilde{V}} g. \quad (12)$$

Дальнейшее дифференцирование по V в силу (11) и расщепления по e_V , e_{VV}

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{\tilde{V}\tilde{V}} g^2 &= h_{VV} + 2h_{V\varepsilon} e_V + h_{\varepsilon\varepsilon} e_{VV} = e_{VV} \\ &\Rightarrow h_\varepsilon = 1, \quad h_{VV} = 0 \end{aligned}$$

определяет функцию $h = \varepsilon + V\alpha(S) + \beta(S)$, а (12) принимает вид:

$$\alpha' V + \beta' + e_S = \tilde{e}_{\tilde{S}} f' + \tilde{e}_{\tilde{V}} Vg', \quad \alpha + e_V = \tilde{e}_{\tilde{V}} g.$$

Дифференцирование по V в силу (11) дает

$$\begin{aligned} \alpha' &= g' \tilde{e}_{\tilde{V}} \Rightarrow \alpha' = g' = 0 \\ &\Rightarrow \alpha = A, \quad g = C - \text{постоянные.} \end{aligned}$$

Таким образом, преобразование эквивалентности вида (9) таковы:

$$\tilde{S} = f(S), \quad \tilde{V} = CV, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon + AV + \beta(S), \quad (13)$$

где A, C — произвольные постоянные; f, β — произвольные функции.

Вычислим преобразования эквивалентности — растяжения общего вида. Учитывая преобразования (13) достаточно искать преобразования эквивалентности — растяжения вида

$$\tilde{t} = Tt, \quad \tilde{x} = X\tilde{x}, \quad \tilde{u} = U\tilde{u}, \quad \tilde{\varepsilon} = E\varepsilon.$$

Система (6) с произвольной функцией $e(S, V)$ сохраняет свой вид, только если

$$X = TU, \quad E = U^2. \quad (14)$$

Базисные операторы бесконечной алгебры Ли L группы преобразований эквивалентности в декартовой системе координат записываются в виде ($k = 1, 2, 3$) [8]:

$$\begin{aligned} X_k &= \partial_{x^k}, \quad X_{3+k} = t\partial_{x^k} + \partial_{u^k}, \\ X_{6+k} &= x^i \partial_{x^j} - x^j \partial_{x^i} + u^i \partial_{u^j} - u^j \partial_{u^i}, \end{aligned}$$

(i, j, k) — круговая перестановка индексов (1, 2, 3);

$$\begin{aligned} X_{10} &= \partial_t, \quad X_{11} = t\partial_t + x^k \partial_{x^k}; \quad X_{12} = V\partial_V - p\partial_p, \\ X_{13} &= t\partial_t - u^k \partial_{u^k} - 2\varepsilon\partial_\varepsilon - 2p\partial_p, \quad X_{14} = V\partial_\varepsilon - \partial_p, \\ \langle f(S) \rangle_1 &= f(S)\partial_S, \quad \langle \beta(S) \rangle_2 = \beta(S)\partial_\varepsilon, \end{aligned}$$

где $f(S), \beta(S)$ — произвольные функции.

Здесь операторы продолжены на производную $p = -e_V$ для сравнения с групповой классификацией из работы [3]. Есть только два расширения из групповой классификации, которые не входят в алгебру L . Выясним для каких уравнений состояния они являются преобразованиями эквивалентности. Первое расширение задается оператором контактных преобразований [9]

$$\begin{aligned} -\varphi'(-e_V)V\partial_V - V(\varphi(-e_V) + e_V\varphi'(-e_V))\partial_\varepsilon - \\ -\varphi(-e_V)\partial_{e_V}, \quad \varphi'' \neq 0, \end{aligned}$$

где $\varphi(e)$ — произвольная функция.

Бесконечная псевдогруппа задается равенствами

$$\begin{aligned} p &= -e_V, \quad \tilde{e}_{\tilde{V}} = -\mu(p), \quad \tilde{V} = \frac{V}{\mu'(p)}, \\ \tilde{\varepsilon} &= \varepsilon - Vp + \frac{V\mu(p)}{\mu'(p)}, \quad \varphi(p)\mu' = \varphi(\mu). \end{aligned}$$

Уравнения (6) не изменятся при таких преобразованиях с произвольной функцией $\mu(p)$ лишь при линейном уравнении состояния

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -P(S)V + \varepsilon_0(S), \\ \tilde{P}(\tilde{S}) &= P(S)\mu(P(S)), \quad \tilde{\varepsilon}_0(\tilde{S}) = \varepsilon_0(S) \end{aligned}$$

с произвольной функцией $P(S)$.

Второе расширение связано с проективным оператором

$$\begin{aligned} t(t\partial_t - u^k \partial_{u^k}) + x^j(t\partial_{x^j} + \partial_{u^j}) - \\ - t(2\varepsilon\partial_\varepsilon - 3V\partial_V + MS\partial_S + 5p\partial_p), \quad p = -e_V, \end{aligned}$$

где M — постоянная.

Решая уравнения Ли [8], получим проективные преобразования

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= t(1 - at)^{-1}, \quad \tilde{x}^j = x^j(1 - at)^{-1}, \\ \tilde{u}^k &= ax^k + u^k(1 - at), \quad \tilde{V} = V(1 - at)^{-3}, \\ \tilde{S} &= S(1 - at)^M, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon(1 - at)^2, \end{aligned}$$

где a — групповой параметр.

На производные преобразования продолжают по формулам

$$\begin{aligned}\tilde{p} &= p(1-at)^5, \quad \tilde{V}_j = V_j(1-at)^{-2}, \\ \tilde{V}_t &= V_t(1-at)^{-1} - a(x^j V_j - 3V)(1-at)^{-2}, \\ \tilde{u}_j^k &= u_j^k(1-at)^2 + a\delta_j^k(1-at), \\ \tilde{u}_t^k &= u_t^k(1-at)^3 - a(1-at)[ax^k + (x^j u_j^k + u^k)(1-at)], \\ \tilde{S}_j &= S_j(1-at)^{M+1}, \\ \tilde{S}_t &= S_t(1-at)^{M+2} - a(x^j S_j + MS)(1-at)^{M+1}.\end{aligned}$$

Система (6) инвариантна относительно проективных преобразований только, если $M = 0$. Уравнение состояния удовлетворяет функциональному равенству

$$\tilde{e}(S, V(1-at)^{-3}) = e(S, V)(1-at)^2.$$

Дифференцирование по V и по t приводит к уравнению

$$3Ve_V = -2e \Rightarrow e = V^{-2/3}h(S) \Rightarrow p = \frac{2}{3}V^{-5/3}h(S).$$

Получено уравнение состояния одноатомного газа, модель которого инвариантна относительно проективных преобразований. Можно ли обобщить уравнения состояния, для которых проективное преобразование будет преобразованием эквивалентности?

4. Газодинамическая среда, меняющаяся со временем

Многофазная сплошная среда описывается множеством термодинамических параметров — концентрациями компонент и их потенциалами. Физико-химические превращения сопровождаются притоками тепловой энергии. Протекающие процессы описываются большим количеством уравнений и постоянных, которые не всегда можно измерить. Для расчета движения отдельных компонент пользуются различными упрощениями и усреднениями. Если важно знать движение среды в целом, то простейшее усреднение можно задать изменяющимся со временем уравнением состояния для хорошо изученного процесса. Для этого надо измерить лишь мощность притока энергии в элементарном объеме. Для сред с реологией такие уравнения состояния измерены [10].

Рассмотрим газодинамическую сплошную среду с непрерывно меняющимся уравнением состояния

$$\varepsilon = e(t, S, V).$$

В термодинамическом тождестве учитывается приток энергии

$$TdS = d\varepsilon + pdV + \mu dt \Rightarrow T = e_s, p = -e_V, \mu = -e_t,$$

где μ — мощность притока энергии. В системе (6) изменится уравнение для энтропии

$$e_S DS + e_t = 0. \quad (15)$$

Преобразования эквивалентности (13) и (14) остаются прежними.

Чтобы проективное преобразование было преобразованием эквивалентности, уравнение состояния должно удовлетворять функциональному равенству

$$\begin{aligned}\tilde{e} &= (t(1-at)^{-1}, S(1-at)^M, V(1-at)^{-3}) = \\ &= e(t, S, V)(1-at)^2.\end{aligned}$$

Вычисляя преобразования производных функции e и подставляя их в преобразованное уравнение (15), получим

$$MSe_S + 3Ve_V = -2e.$$

Решение этого уравнения

$$\begin{aligned}\varepsilon &= S^{-2/M}e(t, VS^{-3/M}), \quad M \neq 0; \\ \varepsilon &= V^{-2/3}e(t, S), \quad M = 0,\end{aligned}$$

задают уравнения состояния, для которых проективный оператор является преобразованием эквивалентности. Преобразования эквивалентности используют для групповой классификации, когда находят классы уравнений состояния, с которыми система уравнений допускает больше симметрий, чем в случае общего уравнения состояния. Если известна вся группа преобразований эквивалентности, то оптимальная система подгрупп задает групповую классификацию.

5. Заключение

Для стационарных уравнений состояния система квазилинейных уравнений газодинамического типа будет двухпараметрической. Для уравнения состояния $\varepsilon = e(S, V)$ определены преобразования эквивалентности термодинамических параметров и общих растяжений. Проективные преобразования допускаются системой уравнений в случае стационарного уравнения состояния для одноатомного газа. Проективные преобразования эквивалентности возможны для специальных нестационарных уравнений состояния.

Список литературы

- [1] Овсянников Л.В. Программа «Подмодели». Газовая динамика // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.
- [2] Овсянников Л.В. Некоторые итоги выполнения программы «Подмодели» для уравнений газовой динамики // Прикладная математика и механика. 1999. Т. 63, № 3. С. 362–372.
[eLIBRARY ID: 28850604](#)
- [3] Овсянников Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: издательство СО АН СССР, 1962. 239 с.
- [4] Хабиров С.В. Оптимальные системы суммы двух идеалов, допускаемых уравнениями гидродинамического типа // Уфимск. матем. журн. 2014. Т. 6, № 2. С. 99–103.
[eLIBRARY ID: 21596977](#)
- [5] Хабиров С.В. Мукминов Т.Ф. Граф вложенных подалгебр 11-мерной алгебры симметрий сплошной среды // Сибирские электронные матем. известия. 2019. Т. 16. С. 121–143.
[DOI: 10.33048/semi.2019.16.006](#)
- [6] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
- [7] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968. 592 с.
- [8] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
- [9] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
- [10] Малкин А.Я., Исаев А.И. Реология: концепции, методы, приложения. Санкт-Петербург: Издательство ПРОФЕССИЯ, 2010. 557 с.



On equivalence transformations of gasdynamic medium

Khapiro S.V.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

In the work we consider a quasilinear system of differential equations describing the motion of ideal gasdynamic medium. From the thermodynamic identity it follows that the medium is two-parameter. The equation of state is given by the internal energy as a function of an entropy and a specific volume. The equivalent transformations do not change the form of the system but change only the equation of state. We found all equivalent transformations converting only thermodynamic parameters and expanding all variables. The known group classification extended admitted group consists of the equivalent transformations. There is exclusion when the equation of state is linear on the specific volume and in the case of oneatomic gas. In the last case the model is invariant under projective transformations. We found a family of the equations of state for which the projective transformations are the equivalent transformations if the equations of state change with the time.

Keywords: gas dynamics, equation of state, equivalent transformation, group classification

References

- [1] Ovsyannikov L.V. The "podmodeli" program. Gas dynamics // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1994. V. 58, No. 4. Pp. 601–627.
DOI: [10.1016/0021-8928\(94\)90137-6](https://doi.org/10.1016/0021-8928(94)90137-6)
- [2] Ovsyannikov L.V. Some results of the implementation of the "podmodeli" program for the gas dynamics equations // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1999. V. 63, No. 3. Pp. 349–358.
DOI: [10.1016/S0021-8928\(99\)00046-5](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(99)00046-5)
- [3] Ovsyannikov L.V. [Group properties of differential equations]. *Grupповые свойства дифференциальных уравнений*. Novosibirsk: publishing house of the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences, 1962. P. 239. (In Russian)
- [4] Khapiro S.V. Optimal system for sum of two ideals admitted by hydrodynamic type equations // Ufa Mathematical Journal. 2014. V. 6, No. 2. Pp. 97–101.
DOI: [10.13108/2014-6-2-97](https://doi.org/10.13108/2014-6-2-97)
- [5] Khapiro S.V., Mukminov T.F. Graf of embedded subalgebras of 11–dimensional symmetry algebra for continuous medium. Siberian Electronic Mathematical Reports. 2019. V. 16. Pp. 121–143. (In Russian)
DOI: [10.33048/semi.2019.16.006](https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.006)
- [6] Ovsyannikov L.V. [Lectures on the basics of gas dynamics] *Lektsii po osnovam gazovoy dinamiki*. Moskva-Izhevsk: Institut kompyuternykh issledovaniy, 2003. P. 336. (In Russian)
- [7] Rozhdestvensky B.L., Yanenko N.N. [Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics]. *Sistemy kvazilineynykh uravneniy i ikh prilozheniya k gazovoy dinamike*. Moscow: Nauka, 1968. P. 592.
- [8] Ovsyannikov L.V. Group Analysis of Differential Equations. United States: Elsevier Science, 2014.
- [9] Ibragimov N.Kh. Transformation groups applied to mathematical physics. Riedel, Dordrecht, 1985.
- [10] Malkin A.Ya., Isayev A.I. Rheology: conceptions, methods, applications. ChemTecPublishing. Toronto, Canada. 2005. 485 p.