ISSN: 2658–5782

Номер 1–3

2022

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org

ИМех им. Р.Р. Мавлютова

ISSN 2658–5782 Том 17 (2022), № 1–3, с. 51–62

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/mfs2022.1.005
DOI: 10.21662/mfs2022.1.005
УДК 517.958:533.7

Получена: 19.04.2022
Принята: 27.06.2022

Основные задачи группового анализа дифференциальных уравнений механики

Хабиров С.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Групповой анализ дифференциальных уравнений использует теорию Ли соответствия между непрерывными группами преобразований и алгебрами Ли операторов дифференцирования первого порядка. Дифференциальные уравнения механики обязательно допускают обширную группу преобразований. Теория Ли изучает структуру алгебры этой группы. Групповой анализ уравнений механики использует структуру допускаемой алгебры для производства подмоделей и точных решений, для изучения краевых задач подмоделей и поведения механической среды для точных решений. Формулируются основные задачи группового анализа и приведены простые примеры их решения.

Ключевые слова: уравнения механики, групповой анализ, теория Ли, подмодели, точные решения

1. Введение

Вывод уравнений механики основан на представлении о пространстве, в котором происходит движение. Для нерелятивистских движений пространство–время инвариантно относительно переносов по времени, пространству и галилеевых переносов (движение с постоянной скоростью). Предполагается также изотропность пространства, т.е. инвариантность относительно вращений. Все эти преобразования порождают 10-и параметрическую группу. По теории Ли этой группе соответствует 10-мерная алгебра Ли, структура которой хорошо изучена [1, 2]. Законы движения сплошной среды инвариантны относительно этой группы. Законы, записанные в виде дифференциальных уравнений, замыкаются уравнениями состояния. Для специальных уравнений состояния допускаемая уравнениями группа может расширяться. Различным подалгебрам допускаемых групп соответствуют подмодели — представление части решений дифференциальных уравнений. Полным описанием подмоделей занимается групповой анализ, основные задачи которого разработаны в [3]. Здесь они представлены в простейшем изложении на простейших примерах для уравнений идеальной газовой динамики и дано развитие основных идей за прошедшее время, не претендующих на полноту.

2. Допускаемая группа и групповая классификация

1. Первая задача группового анализа системы дифференциальных уравнений $S(\vec{x}, \vec{u})$, $\vec{x} \in R^n$, $\vec{u} \in R^m$ заключается в нахождении группы непрерывных преобразований в пространстве R^{n+m}, не меняющих систему S. По теории Ли однопараметрические подгруппы разыскивают как операторы $X = \vec{\xi}\partial_{\vec{x}} + \vec{\eta}\partial_{\vec{u}}$ из условий инвариантности [4].

   Система S может содержать произвольный элемент — функцию, зависящую от части переменных $\vec{x}$, $\vec{u}$ и $\vec{u}_{\vec{x}}$.

2. Вторая задача — найти преобразования эквивалентности, сохраняющие вид системы S, но изменяющие лишь произвольный элемент.

3. Задача групповой классификации — перечислить произвольные элементы с точностью до преобразований эквивалентности, для которых допускаемая группа расширяется.

Приведем решение этих задач на примере уравнений одномерной газовой динамики с плоскими волнами [5]:

закон сохранения массы

$$V_t + uV_x = Vu_x,$$

закон сохранения импульса

$$u_t + uu_x + Vp_x = 0,$$

закон сохранения внутренней энергии

$$\varepsilon_t + u\varepsilon_x + pV\nabla \cdot \vec{u} = 0.$$

Система замыкается уравнением состояния $\varepsilon = e(V, S)$, которое следует из термодинамического тождества

$$TdS = de + pdV \quad \Rightarrow \quad T = e_S, \;\; p = -e_V.$$

Здесь u — скорость; V — удельный объем ($\rho = V^{-1}$ — плотность); ε — удельная внутренняя энергия; p — давление; S — энтропия; T — температура. Из термодинамического тождества следуют уравнения для всех термодинамических параметров:

$$S_t + uS_x = 0,$$
$$p_t + up_x + Ve_{VV}u_x = 0,$$
$$T_t + uT_x = Ve_{SV}u_x.$$

Достаточно взять два из пяти уравнений для термодинамических параметров (мы возьмем уравнения для V и S, $p_x = -e_{VS}S_x - e_{VV}V_x$).

Замена $\tilde{s} = h(s)$ с любой гладкой функцией h является преобразованием эквивалентности. Если $e_{VV} = 0$, то линейное по V уравнение состояния эквивалентно следующему

$$\varepsilon \sim \begin{cases} SV + e(S), & e_{VS} \neq 0; \\ EV + S, & e_{VS} = 0. \end{cases}$$

Уравнение импульсов принимает вид

$$u_t + uu_x = VS_x \;\; \text{или} \;\; 0.$$

Во втором случае система интегрируется

$$x = ut + h(u); \;\; S = S(u), \;\; V = g(u)(t + h'(u))$$

с тремя произвольными функциями.

В первом случае решим первую задачу группового анализа. Разыскиваем оператор, продолженный на производные

$$X = \xi^i \partial_{x^i} + \eta^k \partial_{u^k} + (D_i \eta^k - u^k_j D_i \xi^j)\partial_{u^k_i},$$
$$u^1 = u, \;\; u^2 = V, \;\; u^3 = S; \;\; x^1 = t, \;\; x^2 = x$$

из условий инвариантности. Здесь ξ^i, η^k — функции x^i, u^k; $D_i = \partial_{x^i} + u^k_i \partial_{u^k}$.

Условие инвариантности уравнения для энтропии

$$X(S_t + uS_x) = 0,$$

где производные по переменной t исключены в силу уравнений системы, расщепляем по оставшимся производным (приравниваем нулю коэффициенты при степенях производных по x). В результате получим уравнения на координаты оператора X:

$$\xi^x_V = u\xi^t_V, \;\; \eta^S_V = 0, \;\; \xi^x_u = u\xi^t_u, \;\; \eta^S_t + u\eta^S_x = 0,$$
$$\eta^u = \xi^x_t + u(\xi^x_x - \xi^t_t) - u^2\xi^t_x - V\eta^S_u.$$

Условие инвариантности уравнения для удельного объема

$$X(V_t + uV_x - Vu_x) = 0$$

расщепляется по производным переменной x. Учитывая предыдущие равенства, получим

$$\xi^t_V = \xi^x_V = 0, \;\; \xi^x_S = \xi^t_S = 0, \;\; \eta^V = V\eta^V_V + V^2\eta^S_{uu},$$
$$\eta^V_u - \eta^u_S + V\xi^t_x = 0, \;\; \eta^V_t + u\eta^V_x = V\eta^u_x.$$

Условие инвариантности уравнения для импульса приводит к соотношениям

$$\xi^t_u = \xi^x_u = 0, \;\; \eta^S_u = \eta^S_t = \eta^S_x = 0, \;\; \xi^t_x = 0,$$
$$\eta^V = V(E + \xi^x_x), \;\; \eta^S_S + E = \xi^x_x - 2\xi^t_t, \;\; \eta^u_t + u\eta^u_x = 0.$$

Полученная переопределенная система уравнений интегрируется

$$\xi^t = Bt + B_0, \;\; \xi^x = x(2B + E + C) + At + A_0,$$
$$\eta^u = A + u(B + E + C), \;\; \eta^V = V(2B + C + 2E),$$
$$\eta^S = CS + C_0$$

с семью произвольными постоянными. Обнуляя постоянные кроме одного, получим операторы алгебры Ли L_7. Базис удобно выбрать в виде:

$$\partial_x, \;\; t\partial_x + \partial_u, \;\; t\partial_t + x\partial_x, \;\; \partial_t,$$
$$x\partial_x + u\partial_u + 2V\partial_V, \;\; V\partial_V - S\partial_S, \;\; \partial_S.$$

Далее считаем $e_{VV} \neq 0$, $e_V \neq 0$, $e_S \neq 0$.

$$S_t + uS_x = 0, \;\; p_t + up_x + Ve_{VV}u_x = 0,$$
$$T_t + uT_x = Ve_{sv}u_x.$$

Оператор преобразований эквивалентности разыскивается в виде продолженном на производные, входящие в уравнение [4]

$$Y = \xi^i\partial_{x^i} + \eta^k\partial_{u^k} + \eta^\varepsilon\partial_\varepsilon + (\tilde{D}_i\eta^k - u^k_j\tilde{D}_i\xi^j)\partial_{u^k_i} + \zeta^i\partial_{e_{x^i}} +$$
$$+\zeta^{u^k}\partial_{e_{u^k}} + (D_V\zeta^V - e_{VV}D_V\eta^V - e_{VS}D_V\eta^S)\partial_{e_{VV}} +$$
$$+(D_S\zeta^V - e_{VV}D_S\eta^V - e_{VS}D_S\eta^S)\partial_{e_{VS}},$$

где

$$\zeta^i = D_i\eta^\varepsilon - e_V D_i \eta^V - e_S D_i \eta^S,$$
$$\zeta^{u^k} = D_{u^k}\eta^\varepsilon - e_V D_{u^k}\eta^V - e_S D_{u^k}\eta^S,$$
$$\tilde{D}_i = \partial_{x^i} + u_i^k \partial_{u^k} + (e_V V_i + e_S S_i)\partial_\varepsilon,\ D_i = \partial_{x^i},$$
$$D_{u^k} = \partial_{u^k} + e_{u^k}\partial_\varepsilon + \varepsilon_{Vu^k}\partial_{e_V} + \varepsilon_{Su^k}\partial_{e_S} + \ldots$$

Координаты оператора ξ^i, η^k, η^ε зависят от переменных x^i, u^k, ε. Для уравнения состояния выполняются уравнения

$$e_t = e_x = e_u = 0,$$

которые вместе с уравнениями системы удовлетворяют условиям инвариантности относительно оператора Y [4]. Условия инвариантности получаются действием оператора Y на каждое уравнение системы в силу всех уравнений системы. Получается тождество в продолженном на производные пространстве всех переменных. Расщепление по независимым переменным дает уравнения для координат оператора Y и новое уравнение на функцию e. Это уравнение тоже должно быть инвариантным относительно оператора Y. В результате получится классификация системы по уравнениям состояния, для которых преобразования эквивалентности различны.

Действуем оператором Y на уравнение для энтропии, исключаем производные по t в силу системы. Полученное тождество расщепляем по производным от переменной x:

$$uD_V\xi^t = D_V\xi^x,\ \ u\xi_u^t - \xi_u^x = 0,\ \ D_V\eta^S = 0,\ \ \eta_u^S = 0,$$
$$\eta^u = \xi_t^x + u(\xi_x^x - \xi_t^t) - u^2\xi_x^t,$$
$$\eta_t^S + u\eta_x^S = 0 \ \ \Rightarrow\ \ \eta_t^S = \eta_x^S = 0.$$

Условия инвариантности для удельного объема приводят к равенствам

$$D_V\xi^t = 0,\ \ D_V\xi^x = 0,\ \Rightarrow\ \ D_V\eta^u = 0;$$
$$D_S\xi^t = 0,\ \ D_S\xi^x = 0\ \ \Rightarrow\ \ D_S\eta^u = 0;$$
$$\eta_u^V = -V\xi_x^t,\ \ \eta_t^V + u\eta_x^V = V\eta_x^u.$$

Условия инвариантности уравнения для скорости дают

$$\xi_u^t = \xi_u^x = 0,\ \ \eta_u^V = V\xi_x^t\ \ \Rightarrow\ \ \eta_u^V = \xi_x^t = 0,$$
$$2e_{VS}(\xi_x^x - \xi_t^t) = D_S D_V\eta^\varepsilon - V^{-1}e_V D_S\eta^V,$$
$$2e_{VV}(\xi_x^x - \xi_t^t) = D_V^2\eta^\varepsilon - e_V D_V(V^{-1}\eta^V),$$
$$\eta_t^u + u\eta_x^u = Ve_{VV}\eta_x^V.$$

Условие инвариантности уравнений для функции e имеют вид: $\eta_u^\varepsilon = 0$, $\eta_t^\varepsilon = e_V\eta_t^V$, $\eta_x^\varepsilon = e_V\eta_x^V$.

Изучение совместности полученной переопределенной системы определяет координаты оператора Y:

$$\xi^t = Nt^2 + Bt + B_0,\ \ \xi^x = Ntx + N_0x + At + A_0,$$
$$\eta^u = u(-Nt + N_0 - B) + Nx + A,$$
$$\eta^S = \eta(V, S, \varepsilon),\ \ D_V\eta = 0;$$
$$\eta^V = V(Nt + N_0) + \sigma(V, S, \varepsilon),\ \ VD_V\sigma = \sigma,$$
$$\eta^\varepsilon = Ve_V Nt + \mu(V, S, \varepsilon),$$

где каждая из величин N, B, B_0, N_0, A, A_0 удовлетворяет равенствам $D_V N = 0$, $D_S N = 0$. Остаются два равенства

$$2e_{VS}(-Nt + N_0 - B) = D_S D_V(Ve_V Nt + \mu) - V^{-1}e_V D_S\sigma,$$
$$2e_{VV}(-Nt + N_0 - B) = D_V^2(Ve_V Nt + \mu).$$

Совместность этих равенств дает $D_S = 0$. Расщепляем по t:

$$ND_S D_V(Ve_V + 2e) = 0,\ \ ND_V^2(Ve_V + 2e) = 0,$$
$$D_S D_V(\mu - 2e(N_0 - B)t) = 0,\ D_V^2(\mu - 2e(N_0 - B)) = 0.$$

Вместо функций $h(t, x, u, \varepsilon)$ рассмотрим функции $\tilde{h}(t, x, V, S) = h(t, x, u, e(V, S))$. Тогда равенства $D_V h = 0$, $D_S h = 0$ равносильны следующим $\tilde{h}_V = 0$, $\tilde{h}_S = 0$ и величины N, B, B_0, N_0, A, A_0 можно считать постоянными, $\eta^S = \eta(S)$, $\eta^V = V(Nt + N_0) + EV$, $\eta^\varepsilon = Ve_V Nt + \mu(V, S)$, $N(Ve_V + 2e) = 0$, $\mu = 2e(N_0 - B) + KV + \kappa(S)$.

Уравнение для функции $e(V, S)$ записано с точностью до преобразования $\widetilde{e} = e + K_1V + \kappa_1(S)$, которое не меняет систему уравнений. Если $Ve_V + 2e \neq 0$, то $N = 0$ и произвольным постоянным B, B_0, N_0, A, A_0, K и произвольным функциям $\kappa(S)$, $\eta(S)$ отвечают операторы

$$\partial_t,\ \ \partial_x,\ \ t\partial_x + \partial_u,\ \ t\partial_t + x\partial_x;$$
$$x\partial_x + u\partial_u - V\partial_V + 2\varepsilon\partial_\varepsilon;\ \ V\partial_\varepsilon,\ \ \eta(S)\partial_S,\ \ \kappa(S)\partial_\varepsilon,\ \ V\partial_V.$$

Первые четыре оператора допускаются системой с произвольной функцией $e(V, S)$. Они образуют алгебру L_4 — ядро допускаемых групп. Остальные операторы задают преобразование эквивалентности

$$\Pi_a:\ \ \tilde{\varepsilon} = \varepsilon + aV,\ \ \Pi_b:\ \ \tilde{x} = bx,\ \ \tilde{u} = bu,\ \ \tilde{V} = b^{-1}V,$$
$$\tilde{e}(\tilde{V}, S) = b^2 e(V, S);\ \ \Pi_{n(S)}:\ \ \tilde{S} = n(S),$$
$$\tilde{e}(V, \tilde{S}) = e(V, S);\ \ \Pi_{m(S)}:\ \ \tilde{e} = e + m(S).$$

Здесь $a, b > 0$ — постоянные; $n(S)$, $m(S)$ — произвольные функции. Допускается также дискретное преобразование Π_b с $b = -1$.

Если $Ve_V + 2e = 0$, то с точностью до преобразования $\Pi_{n(S)}$ уравнение состояния принимает вид $e = V^{-2}S$. К ядру добавляются операторы: $V\partial_V + 2S\partial_S$, $t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - tu)\partial_u + tV\partial_V - 2t\varepsilon\partial_\varepsilon$, $x\partial_x + u\partial_u - V\partial_V + 2\varepsilon\partial_\varepsilon$ с преобразованиями Π_b, Π_l: $\tilde{V} = lV$, $\tilde{S} = l^2 S$ и Π_c: $\tilde{t} = \dfrac{t}{1-ct}$, $\tilde{x} = \dfrac{x}{1-ct}$, $\tilde{u} = u + c(x - tu)$, $\tilde{V} = \dfrac{V}{1-ct}$, $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(1-ct)^2$, которые допускаются системой и уравнением состояния.

Перейдем к задаче групповой классификации системы:

$$S_t + uS = 0,\ \ V_t + uV_x = Vu_x,$$
$$u_t + uu_x = V(e_{VV}V_x + e_{VS}S_x)$$

с некоторой функцией $e(V, S)$. Разыскивается оператор X, удовлетворяющий условиям инвариантности системы. Условия инвариантности уравнения для энтропии S приводят к соотношениям

$$\xi^x_u = u\xi^t_u,\ \ \xi^x_V = u\xi^t_V,\ \ \eta^S_V = 0,\ \ \eta^S_u = 0,\ \ \eta^S_t = 0,$$
$$\eta^S_x = 0,\ \ \eta^u = \xi^x_t + u(\xi^x_x - \xi^t_t) - u^2\xi^t_x.$$

Условия инвариантности для удельного объема V уточняют координаты оператора X

$$\xi^t_V = \xi^x_V = 0 = \eta^u_V,\ \ \xi^t_u = \xi^x_u = 0,\ \ \xi^t_S = \xi^x_S = 0 = \eta^u_S;$$
$$V\eta^V_V = \eta^V,\ \ \eta^V_u + V\xi^t_x = 0,\ \ \eta^V_t + u\eta^V_x = V\eta^u_x.$$

Условия инвариантности для скорости дают

$$\eta^V_u = V\xi^t_x \ \Rightarrow\ \eta^V_u = \xi^t_x = 0;\ \ \eta^u_t + u\eta^u_x = Ve_{VV}\eta^V_x,$$
$$2Ve_{VV}(\xi^x_x - \xi^t_t) = (Ve_{VV}\eta^V)_V + Ve_{VVS}\eta^S,$$
$$2Ve_{VS}(\xi^x_x - \xi^t_t) = Ve_{VV}\eta^V_S + (Ve_{VS})_V\eta^V + (Ve_{VS}\eta^S)_S.$$

Исследование условий совместности полученной переопределенной системы определяют представление для координат оператора X:

$$\xi^t = Nt^2 + Bt + B_0,\ \ \xi^x = Ntx + N_0x + At + A_0,$$
$$\eta^u = u(N_0 - B - Nt) + Nx + A,$$
$$]\eta^V = V(Nt + N_0 + \lambda(S)),\ \ \eta^S = \eta(S).$$

Остаются два равенства

$$2a_{VV}(-Nt + N_0 - B) =$$
$$= (2e_{VV} + Ve_{VVV})(Nt + N_0 + \lambda(S)) + e_{VVS}\eta(S),$$
$$2e_{VS}(-Nt + N_0 - B) = e_{VS}\eta' + Ve_{VV}\lambda' +$$
$$+ (Ve_{VS})_V(Nt + N_0 + \lambda) + e_{VDD}\eta.$$

Расщепляем эти равенства по переменной t:

$$N(3e_V + Ve_{VV})_V = N(3e_V + Ve_{VV})_S = 0 \ \Rightarrow$$
$$N(Ve_V + 2e - KV - \kappa(S)) = 0.$$

Преобразования эквивалентности обнуляют постоянную K и функцию $\kappa(S)$. Случай $Ve_V + 2e = 0$ уже рассмотрен. Далее считаем $Ve_V + e \neq 0 \ \Rightarrow\ N = 0$. Первое равенство интегрируется дважды по V:

$$Ve_V(N_0 + \lambda) + 2e(B - N_0) + \eta e_S = \nu_1(S)V + \nu(S).$$

Подстановка во второе равенство дает

$$\nu' = e_V\lambda' \ \Rightarrow\ \lambda' = \nu_1' = 0 \ \Rightarrow\ \lambda = E,\ \nu_1 = K.$$

Координаты оператора X уточняются

$$\xi^t = Bt + B_0,\ \xi^x = N_0x + At + A_0,$$
$$\eta^u = u(N_0 - B) + A,\ \eta^V = V(N_0 + E),\ \eta^S = \nu(S); \quad (1)$$
$$Ve_V(N_0 + E) + 2e(B - N_0) + \eta(S)e_S = KV + \nu(S).$$

Если функция $e(V, S)$ общего вида, то расщепление уравнения для e дает

$$N_0 = B,\ \ E = -B,\ \ \eta = 0,\ \ K = 0,\ \ \nu = 0.$$

Оставшимся постоянным B_0, A_0, A, B соответствуют операторы ядра L_4: ∂_t, ∂_x, $t\partial_x + \partial_u$, $t\partial_t + x\partial_x$.

Пусть функция e удовлетворяет уравнению типа (1)

$$\tilde{N}_0Ve_V + \tilde{\eta}(S)e_S = \tilde{B}e + \tilde{K}V + \tilde{\nu}(S).$$

Преобразование эквивалентности $\Pi_a, \Pi_b, \Pi_{n(S)}$, $\Pi_{m(S)}$ изменяют коэффициенты уравнения

$$\tilde{N}_0Ve_V + \tilde{\eta}(n(S))n'(S)^{-1}e_S = \tilde{B}e +$$
$$+ Vb^{-3}(\tilde{K} + a(\tilde{B} - \tilde{N}_0)) + b^{-2}\tilde{\nu}(n(S)) +$$
$$+ \tilde{B}m(S) - \tilde{\eta}n'^{-1}m'.$$

Если $\tilde{\eta} \neq 0$, то выбором $n(S)(n' = \tilde{\eta})$ и $m(S)$ уравнение приводится к виду

$$e_S + \tilde{N}_0Ve_V = \tilde{B}e + Vb^{-3}(\tilde{K} + a(\tilde{B} - \tilde{N}_0)).$$

Если $\tilde{N}_0 \neq \tilde{B}$, то выбором a получим

$$e_S + kVe_V = ne,\ \ k \neq n \ \Rightarrow\ e == e^{nS}g(I),\ \ I = Ve^{-kS}.$$

Если $\tilde{N}_0 = \tilde{B} \neq 0$, то выбором b получим

$$e_S + kVe_V = ke + \delta V,\ \ \delta = 0 \text{ или } 1,\ \ k \neq 0 \ \Rightarrow$$
$$e = \delta k^{-1}V\ln V + Vg(I).$$

Если $\tilde{N}_0 = \tilde{B} = 0$, то

$$e_S = V \ \Rightarrow\ e = VS + g(V).$$

Пусть $\tilde{\eta} = 0 \ \Rightarrow\ \tilde{N}_0 \neq 0$ (иначе $e_{VV} = 0$). Уравнение примет вид

$$Ve_V = \tilde{B}e + Vb^{-3}\left((\tilde{B} - 1)a + \tilde{K}\right) + b^{-2}\nu(n(S)) + \tilde{B}m(S).$$

Если $\tilde{B} \neq 0$ или 1, то выбором m и a получим

$$Ve_V = ke \quad \Rightarrow \quad e = SV^k \ \ (k \neq 1).$$

Если $\tilde{B} = 0$, то выбором a, $n(S)$ и $m(S)$ получим

$$Ve_V = S, \quad \Rightarrow \quad e = S \ln V.$$

Если $\tilde{B} = 1$, то выбором m, n и b получим

$$Ve_V = e + V \quad \Rightarrow \quad e = V(\ln V + S).$$

Получили 6 случаев выбора функции $e(V,S)$, когда допускаемая алгебра может быть шире, чем ядро L_4.

1) $e = e^{nS} g(I)$, $I = Ve^{-kS}$, $n \neq k$. Подстановка в (1) дает равенство, в котором надо разделить переменные I и S:

$$Ig'(N_0 + E - k\eta(S)) + g(2B - 2N_0 + n\eta) = \\ = KIe^{(k-n)S} + \nu(S)e^{-nS} \tag{2}$$

Если g — произвольно, то обнуляя коэффициенты, получим

$$K = 0, \ \ \nu = 0, \ \ \eta = C_0 = \text{const}, \ \ N_0 = B + \frac{1}{2} n C_0, \\ E = C_0(k - \frac{1}{2} n) - B.$$

Постоянным B и C_0 отвечают операторы

$$t\partial_t + x\partial_x \ \text{ из ядра}, \ \ n(x\partial_x + u\partial_u) + 2kV\partial_V + 2\partial_S.$$

Последний оператор добавляется к ядру.

Дифференцируем уравнение (2) по S и I:

$$\left(-kIg'' + (n-k)g'\right)\eta' = K(k-n)e^{(k-n)S}.$$

Здесь переменные разделились. Отсюда следует при $\eta' \neq 0$

$$-kIg' + ng = MI + M_0, \ \ M\eta = Ke^{(k-n)S} + M_1, \\ M_0\eta = \nu e^{-nS} + M_2.$$

Подстановка этих выражений в (1) дает (в случае $M \neq 0$):

$$g\left(\frac{n}{k}(N_0 + E) + 2B - 2N_0\right) - \\ -\frac{1}{k}(MI + M_0) + IM_1 = -M_2.$$

Коэффициент при g, I надо обнулить (иначе $e_{VV} = 0$). Тогда получим соотношения

$$\eta = Ce^{(k-n)S} + C_0, \ \ K = MC, \ \ E = kC_0 - N_0, \\ B = N_0 - \frac{1}{2} n C_0.$$

Произвольным постоянным C_0, C, N_0 отвечают операторы

$$t\partial_t + x\partial_x, \ \ n(x\partial_x + u\partial_u) + 2kV\partial_V + 2\partial_S, \ \ e^{(k-n)}\partial_S.$$

Ядро расширяется на два базисных оператора.

При $M = 0$ имеем $B = (1 - \frac{n}{2k})N_0 - \frac{n}{2k}E, \eta(S)$ — любое. Дополнительные к ядру операторыт таковы

$$n(x\partial_x + u\partial_u) + 2kV\partial_V, \ \ \eta(S)\partial_S.$$

В случае $\eta' = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta = C_0, K = 0, \nu = M_0 e^{mS}$.

Соотношение (2) определяет уравнение для функции g:

$$Ig' = mg + m_0 \ \ \Rightarrow \ \ g = GI^m + m_0 \begin{cases} -m^{-1}, & m \neq 0; \\ \ln|I|, & m = 0. \end{cases}$$

Подстановка в (2) дает

$$g\left(m(N_0 + E - kC_0) + 2B - 2N_0 + nC_0\right) = \\ = M_0 - m_0(N_0 + E - kC_0).$$

Так как $g \neq \text{const}$ (иначе $e_v = 0$), то определяем M_0 и $B = N_0(1 - \frac{1}{2}m) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(mk - n)C_0$. Свободным постоянным N_0, E, C_0 отвечают операторы $t\partial_t + x\partial_x$ (из ядра) и два дополнительных оператора

$$m(x\partial_x + u\partial_u) + 2V\partial_V, \ (n - mk)(x\partial_x + u\partial_u) + 2\partial_S.$$

2) $e = \delta k^{-1} V \ln V + Vg(I)$, $I = Ve^{-kS}$, $k \neq 0$, $\delta = 0$ или 1. Уравнение (1) принимает вид:

$$Ig'\left(N_0 + E - k\eta(S)\right) + g(E + 2B - N_0) = \\ = K + \nu I^{-1} e^{-kS} - \delta k^{-1}(N_0 + E) - \\ -\delta k^{-1}(E + 2B - N_0)(k + \ln|I|). \tag{3}$$

Если g — произвольная функция, то расщепление по I дает

$$N_0 = B + \frac{1}{2}kC_0, \ \ \eta = C_0, \ \ E = -B + \frac{1}{2}kC_0, \\ \nu = 0, \ \ K = \delta k^{-1}(N_0 + E).$$

Свободным параметрам B и C_0 отвечают растяжения из ядра и дополнительный оператор

$$k(x\partial_x + u\partial_u) + 2kV\partial_V + 2\partial_S.$$

Дифференцирование по S уравнение (3) разделяет переменные при $\eta' \neq 0$

$$-kI^2 g'\eta' = (\nu e^{-kS})' \ \Rightarrow \\ m_0 k\eta + M_0 = \nu e^{-kS}, \ g = m_0 I^{-1}, \ \delta = 1 (\text{иначе } e_V = 0).$$

Подстановка в (3) и расщепление по I дает

$$N_0 = E + 2B, \;\; K = \delta k^{-1}(N_0 + E),$$
$$M_0 = 2m_0(B + E - N_0), \;\; \eta(S) - \text{произвольное}.$$

Свободные параметры задают дополнительные к ядру операторы

$$x\partial_x + u\partial_u + 2V\partial_V, \;\; \eta(S)\partial_S.$$

При $\eta' = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \eta = C_0$, $\nu = Me^{kS}$ и уравнение (3) принимает вид:

$$Ig' = mg + m_0 + m_1 I^{-1} + m_2 \ln|I| \;\; \Rightarrow$$
$$g = -\frac{m_0}{m} - \frac{m_2}{m^2} + \frac{m_1}{1-m} I - \frac{m_2}{m} \ln|I| + G_0 I^m$$
$$\text{при} \;\; m \neq 0, 1;$$
$$g = -m_1 + I\left(m_0 \ln|I| + \frac{1}{2} m_2 (\ln I)^2\right) + G_0 I$$
$$\text{при} \;\; m = 1;$$
$$g = m_0 \ln|I| - m_1 I^{-1} + \frac{1}{2} m_2 (\ln|I|)^2 + G_0$$
$$\text{при} \;\; m = 0.$$

Подстановка в (3) и расщепление определяет постоянные K и M. При $m \neq 0, 1$ остается соотношение

$$\left(\frac{m_2}{m} - \frac{\delta}{k}\right)(E + 2B - N_0) = 0.$$

Если $km_2 \neq \delta m$, то дополнительные операторы к ядру —

$$x\partial_x + u\partial_u + 2V\partial_V, \;\; \partial_S.$$

Если $m_2 k = m\delta$, то свободные параметры определяют дополнительные к ядру операторы

$$x\partial_x + u\partial_u \;\; V\partial_V, \;\; \partial_S.$$

При $m = 1$ расщепление приводит к соотношениям

$$B + E = \frac{1}{2} kC_0, \;\; (km_2 - \delta)(N_0 - E - 2B) = 0.$$

Если $km_2 \neq \delta$, то допускаемые операторы будут такие же, как для произвольной функции $g(I)$. В случае $km_2 = \delta$ к ядру добавляются операторы

$$x\partial_x + u\partial_u + V\partial_V, \;\; kV\partial_V + 2\partial_S.$$

При $m = 0$ расщепление дает

$$m_2(2B + E - N_0) = 0,$$
$$(m_0 + \delta k^{-1})(2B + E - N_0) + m_2(N_0 + E - kC_0) = 0.$$

Если $m_2 \neq 0$ или $m_2 = 0$, $km_0 + \delta \neq 0$, то инвариантность будет как при g произвольном. Если $m_2 = 0$, $km_0 + \delta = 0$, то свободные параметры задают дополнительные к ядру операторы:

$$x\partial_x + u\partial_u, \;\; V\partial_V, \;\; \partial_S.$$

3) $e = VS + g(V)$, $\delta = 1$ (иначе $e_S = 0$). Уравнение (1) принимает вид

$$Vg'(N_0 + E) + 2g(B - N_0) =$$
$$= KV + \nu(S) - V\eta(S) - VS(E + 2B - N_0).$$

Дифференцирование по S и расщепление по V дает

$$\nu = M, \;\; \eta = S(N_0 - E - 2B) + C_0.$$

Уравнение (1) уточняется

$$Vg'(N_0 + E) + 2g(B - N_0) = KV + M - C_0 V \qquad (4)$$

и имеет вид

$$Vg' = mg + m_1 V + m_0$$

с общим решением с точностью до преобразований эквивалентности

а) $g = GV^m$, $m \neq 0, 1$,

б) $g = m_1 V \ln V$, $m = 1$; в) $g = m_0 \ln V$, $m = 0$.

Если функция g общего вида, то $N_0 = B$, $E = -B$, $\eta = 0$ и допускаемые операторы только из ядра.

В случае а) из (4) получим $E = -2m^{-1}B + N_0(2m^{-1} - 1)$, $\eta = 2(1 - m^{-1})(N_0 - B)S$. К ядру добавляется оператор

$$m(x\partial_x + u\partial_u) + 2V\partial_V + 2(m-1)S\partial_S.$$

В случае б) из (4) следует $N_0 = B$, $\eta = C_0 - (E + B)S$ и к ядру добавляются два оператора

$$V\partial_V - S\partial_S, \;\; \partial_S.$$

В случае в) из (4) следует $N_0 = E + 2B$, $\eta = C_0$ и к ядру добавляются операторы

$$x\partial_x + u\partial_u + 2V\partial_V, \;\; \partial_S.$$

4) $e = SV^k$, $k \neq 1$. Уравнение (1) расщепляем по V: $K = 0$, $\nu = 0$, $\eta = -S(2B + (k-2)N_0 + kE)$. К ядру добавляются операторы

$$x\partial_x + u\partial_u + 2S\partial_S, \;\; V\partial_V - kS\partial_S.$$

5) $e = S \ln V$. Уравнение (1) расщепляем по V: $K = 0$, $\nu = S(N_0 + E)$, $\eta(S) = 2S(N_0 - B)$. К ядру добавляются операторы

$$x\partial_x + u\partial_u + 2S\partial_S, \;\; V\partial_V.$$

6) $e = V(\ln V + S)$. Расщепление уравнения (1) по V дает $N_0 = 2B + E$, $\eta = K - 2B - 2E$. К ядру добавляются операторы

$$x\partial_x + u\partial_u + 2V\partial_V - 2S\partial_S,\ \partial_S.$$

Итак, решена задача групповой классификации одномерной газовой динамики. Результат уточняет групповую классификацию для пространственной газовой динамики из работы [1].

К задачам этого пункта относится классификация бесконечных групп преобразований, заданных дифференциальными уравнениями [6, 7].

3. Структура допускаемых групп

4. Построение оптимальной системы: перечислить все подгруппы с точностью до внутренних автоморфизмов.

5. Построение графа вложенных подгрупп с точностью до внутренних автоморфизмов.

Выбирается удобный базис алгебры Ли допускаемой группы, чтобы представить алгебру в виде полупрямой суммы идеала J и подалгебры N. Сначала перечисляются подалгебры в N с точностью до внутренних автоморфизмов. Для каждой подалгебры вычисляется стационарная подгруппа автоморфизмов, действующая в идеале J. Неподобные подалгебры в J записываются в удобном базисе.

Рассмотрим пример ядра допускаемых алгебр для одномерной газовой динамики. Алгебра Ли L_4 с базисом из операторов

$$X_1 = \partial_x,\ \ X_2 = \partial_t,\ \ X_3 = t\partial_x + \partial_u,\ \ X_4 = t\partial_t + x\partial_x$$

имеет таблицу из трех ненулевых коммутаторов $[X_i, X_j] = X_iX_j - X_jX_i$: $[X_1, X_4] = X_1$, $[X_2, X_3] = X_1$, $[X_2, X_4] = X_2$.

Автоморфизмы вычисляются по правилу

$$\frac{dX'}{da_i} = [X', X_i],\ \ X'|_{a_i=0} = X = x^jX_j,\ \ i = 1,2,3,4.$$

Простые вычисления дают автоморфизмы:

$$A_1 : x^{1'} = x^1 - x^4a_1;$$
$$A_2 : x^{1'} = x^1 - x^3a_2,\ \ x^{2'} = x^2 - x^4a_2;$$
$$A_3 : x^{1'} = x^2a_3 + x^1.$$
$$A_4 : x^{1'} = bx^1,\ \ x^{2'} = bx^2,\ \ b = e^{a_4}.$$

При $b = -1$ имеем дискретный автоморфизм, не изменяющий таблицу коммутаторов.

Алгебра L_4 раскладывается в полупрямую сумму абелева идеала $\{X_1, X_2\}$ и абелевой подалгебры $\{X_3, X_4\}$. Подобные подалгебры связаны автоморфизмами. Неподобные подалгебры абелевой подалгебры таковы $0,\ \ X_3 + \alpha X_4,\ \ X_4,\ \ \{X_3, X_4\}$.

К каждой подалгебре добавляем подалгебры общего вида из абелева идеала. С помощью автоморфизмов приводим комбинацию к простейшему виду.

К нулевой подалгебре для одномерных подалгебр добавляем $x^1X_1 + x^2X_2$. Если $x^2 \neq 0$, то автоморфизм A_3 делает $x^1 = 0$. Неподобные подалгебры таковы X_2, X_1, $\{X_1, X_2\}$.

К подалгебре $X_3 + \alpha X_4$ для одномерных подалгебр добавляем $x^1X_1 + x^2X_2$ и с помощью A_1 и A_2 делаем $x^1 = x^2 = 0$. Для двумерных подалгебр добавки имеют вид $\{X_3 + \alpha X_4 + x^1X_1 + x^2X_2, y^1X_1 + y^2X_2\}$. Если $y_1 \neq 0$, то автоморфизмы A_2, A_3 и замена базиса дают $\{X_3 + \alpha X_4, X_2\}$. Коммутатор этих операторов должен быть их линейной комбинацией. Это условие подалгебры не выполняется. Значит $y_2 = 0$ и подалгебра подобна $\{X_3 + \alpha X_4, X_1\}$ при $\alpha \neq 0$ или $\{X_3 + \delta X_2, X_1\}$ при $\alpha = 0,\ \delta = 0$ или 1. Трехмерные подалгебры подобны следующим $\{X_3 + \alpha X_4, X_1, X_2\}$ при $\alpha \neq 0$, $\{X_1, X_2, X_3\}$.

Добавки линейных комбинаций к подалгебре X_4 приводят к неподобным подалгебрам

$$X_4,\ \ \{X_2, X_4\}, \{X_1, X_4\},\ \ \{X_1, X_2, X_4\}.$$

Подалгебра $\{X_3, X_4\}$ порождает одну трехмерную подалгебру $\{X_1, X_3 + \delta X_2, X_4\}$. Построенную оптимальную систему можно представить в виде графа вложенных подалгебр. Удобно представить граф в виде табл. 1 [2], в которой оператор X_j заменен на j, подалгебра имеет номер (r, i), r — размерность, i — порядковый номер в данной размерно-

Таблица 1

r	i	Базис $X_j \to j$	Подалгебры
3	1	1, 2, 3	L_4
	2	1, 2, 3+α4, ($\alpha \neq 0$)	L_4
	3	1, 2, 4	L_4
	4	1, 3+δ2, 4 (δ=0,1)	L_4
2	1	1, 2	3.1, 2,3
	2	1, 3+α4 ($\alpha \neq 0$)	3.2, 4 ($\delta = 0$)
	3	1, 4	3.3, 4
	4	1, 3+δ2 (δ=0,1)	3.1, 4
	5	2, 4	3.3
1	1	1	2.1, 2, 3, 4
	2	2	2.1, 5
	3	3+αX_4	2.2 ($\alpha \neq 0$), 4 ($\alpha = 0, \delta = 0$)
	4	δ2+3	2.4
	5	4	2.3, 5

сти. В последнем столбце указаны номера подалгебр, в которые вкладывается подалгебра рассматриваемой строки.

4. Расслоение и подмодели

Структура допускаемой группы позволяет находить классы точных решений рассматриваемой системы дифференциальных уравнений. Для этого надо найти инварианты подгрупп.

6. Построение базиса дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования для каждой подгруппы из оптимальной системы.

Операторы подалгебры X_i продолжаются на производные любого порядка $X_i^{(k)}$. В каждом порядке можно вычислить инварианты $I_j^{(k)}$: $X_i^{(k)} = 0$. Существуют операторы инвариантного дифференцирования, которые производят инварианты высшего порядка из инвариантов низшего порядка. Дифференциальные инварианты образуют базис, если из них получаются все инварианты с помощью операторов инвариантного дифференцирования [4]. Например, рассмотрим подалгебру 3.1 из §2. Продолженный на производные первого порядка базис имеет вид:

$$X_1 = \partial_x, \;\; X_2 = \partial_t,$$
$$X_3 = t\partial_x + \partial_u - u_x\partial_{u_t} - V_x\partial_{V_t} - S_x\partial_{S_t}.$$

Уравнения для инвариантов $X_i I = 0$ имеют полный набор функционально независимых решений

$$V, \;\; S, \;\; V_x, \;\; S_x, \;\; u_x, \;\; u_t + uu_x, \;\; V_t + uV_x, \;\; S_t + uS_x.$$

Отсюда определяем операторы инвариантного дифференцирования D_x, $Z = D_t + uD_x$. Базис состоит из инвариантов

$$V, \;\; S, \;\; u_x = U_1, \;\; u_t + uu_x = U_0.$$

Система уравнений одномерной газовой динамики записывается через дифференциальные инварианты

$$U_0 = Ve_{VV}D_xV + Ve_{VS}D_xS, ZV = VU_1, YS = 0. \quad (5)$$

7. Расслоение системы на классы подобных решений относительно допускаемой подгруппы (автоморфная система) и уравнений для представителей классов (разрешающая система) [8, 9].

Например, для подалгебры 3.1 назначим дифференциальные инварианты базиса функциями инвариантов нулевого порядка

$$u_x = U_1(V, S), \;\; u_t + uu_x = U_0(V, S). \quad (6)$$

Исследуем совместность в силу уравнений (5):

$$U_{0V}V_x + U_{0S}S_x = U_1(VU_1)_V,$$
$$e_{VV}V_x + e_{VS}S_x = V^{-1}U_0 \;\;\Rightarrow$$
$$V_x = N(V, S), \;\; S_x = M(V, S),$$
$$V_t = VU_1 - uN, \;\; S_t = -uM.$$

Условия дальнейшей совместности определяют разрешающую систему для функций U_0, U_1.

$$VM_V + M = 0,$$
$$VN_V + N = U_1 + (\ln U_1)_V + VM(\ln U_1)_S.$$

Автоморфная система состоит из уравнений (5) и (6).

8. Построение подмоделей и точных решений для подгрупп из оптимальной системы, которые вложены друг в друга согласно графа вложенных подалгебр. Подмодели подразделяются на три типа.

Первый тип — инвариантные подмодели на подалгебрах малой размерности, когда из инвариантов нулевого порядка (точечные инварианты) определяются все функции. Например, для подалгебры 1.5 оператор $X_4 = t\partial_t + x\partial_x$ имеет инварианты $I = \dfrac{x}{t}$, u, V, S. Последние 3 инварианта назначаются новыми функциями переменной I: $u = u(I)$, $V = V(I)$, $S = S(I)$. Это представление решения поставим в систему одномерной газовой динамики

$$S'(u - I) = 0, \;\; V'(u - I) = Vu',$$
$$u'(u - I) = V(e_{VV}V' + e_{VS}S').$$

Если $u = I$, то $V = 0$, S — произвольная функция. Решение не имеет физического смысла.

При $u \neq I$ решение либо постоянно, либо

$$u = I \pm V\sqrt{e_{VV}}, \;\; e_{VVV}VV' = \mp 2\sqrt{e_{VV}}, \;\; S = S_0$$

выражается квадратурами с любым уравнением состояния.

Второй тип — частично инвариантные решения. Они бывают регулярными и нерегулярными [10], когда из точечных инвариантов не определяются все функции. Представление решения — это назначение одних инвариантов функциями других.

Если другие инварианты не содержат значений искомой функции, то это — регулярные частично инвариантные решения.

Рассмотрим пример подалгебры 2.4. Базисные операторы $X_1 = \partial_x$, $X_3 + \delta X_2 = \delta\partial_t + t\partial_x + \partial_u$ имеют точечные инварианты V, S, $u - t$ $(\delta = 1)$ или t $(\delta = 0)$.

При $\delta = 0$ представление решения $V(t)$, $S(t)$, $u = u(t, x)$ задает регулярное частично инвариантное решение ранга 1 дефекта 1. Подстановка в систему уравнений определяет решение

$$S = S_0, \ \ V = V_0 t, \ \ u = \frac{x}{t}$$

с точностью до преобразований допускаемой группы. Это решение определяет движение газа из точечного источника по прямым мировым линиям в вакуум на бесконечности.

При $\delta = 1$ представление

$$S(\alpha), \ \ V(\alpha), \ \ u = t + U(\alpha), \ \ \alpha(t, x), \ \ \alpha_x \neq 0$$

задает нерегулярное частично инвариантное решение ранга 1 дефекта 1. Подстановка в систему определяет решение

$$S = S_0, \ \ \alpha = x - \frac{1}{2}t^2, \ \ V' + VU'^2 = VV' e_{VV}$$

с одной произвольной функцией $V(\alpha)$.

Третий тип — дифференциально инвариантные подмодели, когда некоторые дифференциальные инварианты базиса назначаются новыми функциями других [11].

Например, для подалгебры 3.1 все инварианты базиса назначим функциями от $\alpha(t, x) \neq \mathrm{const}$:

$$V(\alpha), \ \ S(\alpha), \ \ u_x = U_1(\alpha), \ \ u_t + uu_x = U_0(\alpha).$$

Вместо α можно взять любую функцию от α. Подстановка в систему дает $Z = D_t + UD_x$, $S'Z\alpha = 0$, $V'Z\alpha = VU_1$, $U_0 = V(e_{VV}V' + e_{VS}S')\alpha_x$. Совместность уравнений $u_t = U_0 - uU_1$, $u_x = U_1$ дает уравнение для α

$$U_1' Z\alpha = U_0'\alpha_x - U_1^2.$$

Если $Z\alpha = 0$, то $U_1 = 0$, $U_0' = 0 \ \Rightarrow \ u = U_0 t + C$, $\alpha_x = \kappa(\alpha) = U_0 V^{-1}(e_{VV}V' + e_{VS}S')^{-1}$, $\alpha_t = -(U_0 t + C)\kappa(\alpha) \ \Rightarrow \ \alpha = x - 2^{-1}U_0 t^2 - Ct$ с точностью до функционального произвола. Подмодель содержит одно уравнение

$$e_{VV}V' + e_{VS}S' = U_0 V^{-1},$$

функция $S(\alpha)$ произвольна.

Если $Z\alpha \neq 0$, то $S = S_0$, $V' \neq 0$. При $V' = 0$ имеем $U_0' = 0$, $U_1 = 0$ первый случай. Можно считать $\alpha = V$, $V_t + uV_x = VU_1$, $U_0 = VV_x e_{VV}$.

Совместность для V дает интегрируемые уравнения

$$U_0 = C_0 U_1 V e_{VV}, \ \ U_1 = C_1 V^{-1}(C_0^2 e_{VV} - 1).$$

Теперь можно интегрировать совместную переопределенную систему для функций u и V:

$$C_0 u = V + C_1 t,$$
$$C_0^2(Ve_V - e) - \frac{1}{2}V^2 = C_1(C_0 x + \frac{1}{2}C_1 t^2) + C_2.$$

С помощью графа вложенных подалгебр можно находить точные решения у подмоделей, не имеющих симметрий. Для этого надо согласовать инварианты вложенных подалгебр, чтобы инварианты надалгебры содержались в базисе инвариантов подалгебры. Тогда решения подмодели надалгебры будут решениями подмодели подалгебры для одного и того же дефекта. Дефект подмодели подалгебры может уменьшится, а ранг увеличиться [2].

5. Другие задачи группового анализа

Сформулируем другие задачи группового анализа. Методы решения некоторых задач хорошо развиты, но для некоторых возможно нет алгоритмических подходов.

9. Законы сохранения для модели, подмоделей и интегралы. Определение новых обобщенных решений (сильные и слабые разрывы, предельные линии, коллапсы, центрированные волны).

Есть несколько методов нахождения законов сохранения: инвариантность лагранжиана (теорема Нетер–Ибрагимова) [12], прямой метод и с помощью операторов размножения [13–15].

10. Групповой анализ подмоделей, преобразование Беклунда подмоделей, неточечные преобразования Ли–Беклунда [16, 17].

Пример группового анализа подмодели одномерной газовой динамики приведен выше. Это инвариантная подмодель на двумерной алгебре переносов для трехмерной модели. Для некоторых подмоделей найдены интегралы и надо производить групповую классификацию по произвольным элементам интегралов [18].

11. Физическая интерпретация точных групповых решений, сопряжение через слабые и сильные разрывы. Критерии инвариантности и частичной инвариантности краевых задач [19–22].

12. Приближенные симметрии для модели и подмоделей, введение малого параметра и обоснование асимптотик (асимптотическое или строгое стремление к точному решению).

Примером может служить линеаризация на точном решении [5]. Малый параметр обычно вводится из физических соображений, но можно его ввести с помощью симметрии краевых условий, отличных от симметрий уравнений. Тогда приближения по групповому параметру будут инвариантны относительно выбранной симметрии. Если малый параметр введен, то вычисляют приближенные симметрии [23]. Можно вычислить приближенные симметрии по-другому. Условие инвариантности одного из уравнений системы записывать с точностью до малой величины. Значит вектор из координат оператора приближенно касается многообразия системы.

13. Построение инвариантных уравнений и инвариантных отображений (конкомитантов). Например, для псевлогрупп можно определить инвариантные уравнения [24]. Конкомитанты определяют интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений по известной допускаемой группе симметрий.

Список литературы

[1] Овсянников Л.В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // ПММ. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.

[2] Мукминов Т.Ф., Хабиров С.В. Граф вложенных подалгебр 11-и мерной алгебры симметрий сплошной среды // Сибирские электронные математические известия. 2019. Т. 16. С. 121–143.
DOI: 10.33048/semi.2019.16.006

[3] Овсянников Л.В. Некоторые задачи, возникающие в групповом анализе дифференциальных уравнений // Динамика сплошной среды: сб.научн.тр. / Акад. наук СССР, Сиб.отд-ние, Ин-т гидродинамики. Новосибирск, 1974. Вып. 18. С. 211–238.

[4] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1978. 399 с.

[5] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М. Ижевск: Ин-т компьютерных исследований. 2003. 336 с.

[6] Хабиров С.В. Бесконечные непрерывные группы преобразований трехмерного пространства, задаваемые системами дифференциальных уравнений первого порядка // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Институт гидродинамики СО РАН. 1972. Вып. 12. С. 131–146.

[7] Овсянников Л.В. О бесконечных группах отображений, задаваемых дифференциальными уравнениями // Доклады АН СССР. 1963. Т. 148, № 1. С. 36–39.

[8] Овсянников Л.В. Групповое расслоение уравнений пограничного слоя // Динамика сплошной среды. 1969. Вып. 1. С. 24–36.

[9] Чиркунов Ю.А. Групповое расслоение уравнений Ламе классической динамической теории упругости // Известия АН. Механика твердого тела. 2009. Т. 426, № 5. С. 605–607.

[10] Овсянников Л.В. Регулярные и нерегулярные частично инвариантные решения // Доклады РАН. 1995. Т. 343, № 2. С. 156–159.
MathNet: dan4403

[11] Хабиров С.В. Классификация дифференциально инвариантных подмоделей // Сибирский математический журнал. 2004. Т. 45, № 3. С. 682–701.
MathNet: smj1100

[12] Ibragimov N.H. A new conservation theorem // Journal of Mathematical Analysis and Applications 333. No. 1 (2007), С. 311–328.
DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.10.078

[13] Чиркунов Ю.А. Метод A-операторов и законы сохранения для уравнений газовой динамики // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 2. С. 53–60.
eLIBRARY ID: 11839328

[14] Хабиров С.В., Чиркунов Ю.А. Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравреций механики сплошной среды. Новосибирск: НГТУ. 2012. 659 с.

[15] Хабиров С.В. О законах сохранения для вязкой жидкости // Труды Имех УНЦ РАН. 2017. Т. 12, № 1. С. 40–43.
DOI: 10.21662/uim2017.1.006

[16] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.

[17] Хабиров С.В. Проблема Беклунда для эволюционных уравнений второго порядка / Препринт БФ АН СССР. Уфа. 1986. 35 с.

[18] Khabirov S.V. Group analysis of the plane steady submodel of ideal gas with varying entropy // MDPI. Mathematics. 2021. V. 9, issue 16. Pp. 1–15.
DOI: 10.3390/math9162006

[19] Меньщиков В.М. О продолжении инвариантных решений уравнений газовой динамики через ударную волну // Динамика сплошной среды. Вып. 4. Новосибирск. 1969. С. 163–169.

[20] Меньщиков В.М. О непрерывном сопряжении инвариантных решений // Динамика сплошной среды. Вып. 10. Новосибирск. 1972. С. 70–84.

[21] Пухначев В.В. Неустановившиеся движения вязкой жидкости со свободной границей, описываемые частично инвариантными решениями уравнений Навье–Стокса // Динамика сплошной среды. Вып. 10. Новосибирск. 1972. С. 125–137.
eLIBRARY ID: 37264575

[22] Хабиров С.В. Автомодельное схождение ударной волны по теплопроводному газу // ПММ. 2009. Т. 73., вып. 5. С. 731–740.
eLIBRARY ID: 12868891

[23] Байков В.А., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Приближенные группы преобразований // Дифференцальные уравнения. 1993. Т. 29, № 10. С. 1712–1732.
MathNet: de8212

[24] Khabirov S.V. Classification of three dimensional Lie algebras in R^3 and their differential invariants // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2010. V. 31, No. 2. P. 152–156.
DOI: 10.1134/S199508021002006X

ISSN 2658–5782 17 (2022), **1–3**, 51–62

Multiphase Systems

http://mfs.uimech.org/mfs2022.1.005
DOI: 10.21662/mfs2022.1.005

Received: 19.04.2022
Accepted: 27.06.2022

The main tasks of group analysis of differential equations of mechanics

Khabirov S.V.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

Group analysis of differential equations uses the Lie theory of correspondence between continuous transformation groups and Lie algebras of first-order differentiation operators. Differential equations of mechanics necessarily admit an extensive group of transformations. Lie theory studies the structure of the algebra of this group. The group analysis of the equations of mechanics uses the structure of the admissible algebra to produce submodels and exact solutions, to study the boundary value problems of submodels and the behavior of the mechanical medium for exact solutions. The main tasks of group analysis are formulated and simple examples of their solutions are given.

Keywords: equations of mechanics, group analysis, lie theory, submodels, exact solutions

References

[1] Ovsannikov L.V. The submodel program. Gaz dynamika // PMM. 1994. Vol. 58., № 4. Pp. 30–55. (in Russian)

[2] Mukminov T.F., Khabirov S.V. Graph of nested subalgebras of the 11-dimensional algebra of continuum symmetries // Siberian Electronic Mathematical News. 2019. Vol. 16. Pp. 121–143. (in Russian)
DOI: 10.33048/semi.2019.16.006

[3] Ovsannikov L.V. Some problems arising in the group analysis of differential equations // Dynamics of a continuous medium / Academy of Sciences of the USSR, siberian branch, Institute of Hydrodynamics. Novosibirsk, 1974. Vol. 18. Pp. 211–238. (in Russian)

[4] Ovsannikov L.V. Group analysis of differential equations. M.: Science. 1978. 399 p. (in Russian)

[5] Ovsannikov L.V. Lectures on the basics of gas dynamics. M. Igevsk: Institute of computer research. 2003. 336 p. (in Russian)

[6] Khabirov S.V. Infinite continuous groups of transformations of three-dimensional space defined by systems of first-order differential equations // Dynamics of a continuous medium. Novosibirsk: Institute of Hydrodynamics SB RAS. 1972. Vol. 12. Pp. 131–146. (in Russian)

[7] Ovsannikov L.V.On infinite groups of maps given by differential equations // Reports of the USSR Academy of Sciences. 1963. Vol. 148, № 1. Pp. 36–39. (in Russian)

[8] Ovsannikov L.V. Group stratification of boundary layer equations // Dynamics of a continuous medium. 1969. Vol. 1. Pp. 24–36. (in Russian)

[9] Chirkunov Y.A. Group stratification of the Lame equations of the classical dynamic theory of elasticity // Izvestia AN. Solid state mechanics. 2009. Vol. 426, № 5. Pp. 605–607. (in Russian)

[10] Ovsannikov L.V. Regular and irregular partially invariant solutions // Dokl. RAS. 1995. Vol. 343, № 2. Pp. 156–159. (in Russian)
MathNet: dan4403

[11] Khabirov S.V. Classification of differentiall invariant submodels // Siberian Mathematical Journal. 2004. Vol. 45, № 3. Pp. 562–579.
DOI: 10.1023/B:SIMJ.0000028621.02366.bf

[12] Ibragimov N.H. A new conservation theorem // Journal of Mathematical Analysis and Application. 2007. Vol. 333, No 1. Pp. 311–328.
DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.10.078

[13] Chirkunov Y.A. Method of A-operators and conservation laws for the equations of gas dynamics // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2009. Vol. 50. Pp. 213–219.
DOI: 10.1007/s10808-009-0029-7

[14] Khabirov S.V, Chirkunov Y.A. Elements of symmetric analysis of differential equations of continuum mechanics. Novosibirsk: NSTU. 2012. 659 p. (in Russian)

[15] Khabirov S.V. On conservation laws for a viscous liquid // Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics. T. 12 (2017), № 1. C. 40–43. (in Russian)
DOI: 10.21662/uim2017.1.006

[16] Ibragimov N.H. Transformation Groups to Mathematical Physics. Moscow: Nauka, 1983. 280 c. (in Russian)

[17] Khabirov S.V The Backlund problem for second-order evolutionary equations / Preprint of the BFAN USSR. Ufa. 1986. 35 p. (in Russian)

[18] Khabirov S.V. Group analysis of the plane steady submodel of ideal gas with varying entropy // MDPI. Mathematics. 2021. V. 9, issue 16. Pp. 1–15.
DOI: 10.3390/math9162006

[19] Menshikov V.M. On the continuation of invariant solutions of gas dynamics equations through a shock wave // Dynamics of a continuous medium. Vol. 4. Novosibirsk. 1969. Pp. 163–169. (in Russian)

[20] Menshikov V.M. On the continuous conjugation of invariant solutions // Dynamics of a continuous medium. Vol. 10. Novosibirsk. 1972. Pp. 70–84. (in Russian)

[21] Pukhnachev V.V. Unsteady motions of a viscous fluid with a free boundary described by partially invariant solutions of the Navier-Stokes equations // Dynamics of a continuous medium. Vol. 10. Novosibirsk. 1972. Pp. 125–137. (in Russian)
eLIBRARY ID: 37264575

[22] Khabirov S.V. Self-similar convergence of a shock wave in a heat conducting gas // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2009. Vol. 73, Issue 5. Pp. 524–531.
DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2009.11.005

[23] Baikov V.A., Gazizov R.K., Ibragimov N.H. Approximate groups of transformations // Partial Differential Equations. Vol. 29, No. 10. (1993). Pp. 1487–1504.
MathNet: de8212

[24] Khabirov S.V. Classification of three dimensional Lie algebras in R^3 and their differential invariants // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2010. V. 31, No. 2. Pp. 152–156.
DOI: 10.1134/S199508021002006X