

ISSN: 2658–5782

Номер 1–2

2022

# МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

[mfs.uimech.org](https://mfs.uimech.org)





## Дисперсные среды: рассеяние звуковых волн, стратификация в закрученных потоках и процессы осаждения<sup>1</sup>

Урманчиев С.Ф.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Представлен краткий обзор по трем задачам из области механики многофазных сред, связанных с изучением динамического поведения дисперсных систем в различных условиях и способах взаимодействия с внешними полями или окружающей средой. Задачи являются составной частью научного проекта «Гидродинамические эффекты в многофазных и термовязких средах при волновых и тепловых воздействиях». Обзор проведен в контексте вектора развития современных исследований в соответствующих направлениях. В рамках решения задачи по рассеянию акустических волн на множестве сферических пузырьков или капель с учётом их звукопроницаемости был развит метод быстрых мультиполей для расширения возможностей его применения в рассмотренных случаях. На основе теорем сложения для сферических волновых функций впервые получена формула для полного сечения рассеяния на множестве взаимодействующих звукопроницаемых сфер, произвольно расположенных в пространстве. Важным аспектом исследований стала оценка области в пространстве параметров задачи, в которой эффекты многократного рассеяния являются существенными. Вторая задача связана с математическим моделированием закрученного турбулентного потока, содержащего частицы дисперсной фазы. Для численных исследований температурной стратификации в вихревой трубе создан алгоритм и компьютерный код с использованием ортогонализированной конечно-объемной сетки с выделением пристеночного слоя. Проведен ряд параметрических исследований, в частности, рассмотрена зависимость температуры выходящего воздуха в канале холодной диафрагмы в зависимости от диаметра диафрагмы. С целью повышения эффективности геологоразведки при решении третьей задачи для описания процесса магматического рудообразования предложена система уравнений, основанная на методах механики многофазных сред и термогидродинамики. Математическая модель предусматривает теплообмен потока магматического расплава с окружающими его вмещающими породами, а также выделение тяжелых и лёгких фракций из базальтовой магмы при её охлаждении. Полученные в ходе вычислительного эксперимента результаты свидетельствуют о возможности периодически-неоднородного характера распределения рудообразующих фракций.

**Ключевые слова:** акустическое рассеяние, система звукопроницаемых сфер, температурная стратификация, энергоразделение, циклострофическое приспособление, магматическое рудообразование, дифференциация

### 1. Введение

Программа исследований по теме, указанной в названии, связана с установлением фундаментальных закономерностей в гидродинамических процессах, происходящих при воздействии температурных и акустических полей. В настоящем

обзоре представлены некоторые результаты по задачам, выполняемым в рамках темы. К ним относятся: взаимодействие сферических пузырьков и капель с источником волн акустического диапазона; температурная стратификация жидкостей и газов, содержащих дисперсные частицы в вихревых трубах; моделирование процессов дифференциации магматических расплавов при течении в субвулканических камерах с учетом теплообмена с окружающими горными породами.

<sup>1</sup>Работа поддержана средствами государственного задания № 0246-2019-0052

Цель исследований состоит в определении взаимного влияния акустических, гидродинамических и термодинамических параметров рассмотренных систем и, при этом, изучение закономерностей распределения частиц дисперсной фазы, физических свойств объектов исследований, эффектов стратификации и локализации.

## 2. Формирование поля акустического рассеяния при взаимодействии источника звука с совокупностью звукопроницаемых сферических частиц

Рассеяние волн на множестве частиц — одна из важнейших задач акустики и квантовой теории поля. Поскольку в последние десятилетия основное внимание было приковано к решению обратных задач, развитие математических методов решения прямых задач происходило сравнительно медленными темпами, хотя публикации решений конкретных задач никогда не прекращались. Общее представление о теоретических и экспериментальных методах в области рассеяния звука от одиночных абсолютно твердых и звукопроницаемых частиц можно получить из монографии В.Т. Гринченко, И.В. Вовка и В.Т. Мацыпуры (2009) [1]. Однако рассмотрение совокупности множества частиц, сложность поставленных задач требует развития соответствующих методов вычислений, так как при описании взаимодействия каждой частицы со всеми остальными, производительность даже мощных вычислительных систем быстро исчерпывается с увеличением размерности задачи и числа частиц. Принципиально важный вклад в этом направлении был внесен благодаря исследованиям нашего коллеги Н.А. Гумерова. Так, в работах Н.А. Гумерова и Р. Дураисвами (Nail A. Gumerov and Ramani Duraiswami, 2002, 2004) [2, 3], была рассмотрена задача рассеяния волн от множества сфер. С целью решения задачи авторы разработали вычислительную методику, основанную на методе Т-матрицы с использованием теории переноса и переразложения мультипольных решений уравнения Гельмгольца для быстрого и точного рекурсивного вычисления матричных элементов. Сферическим частицам задавались радиусы, импедансы и значения их координат. Разработанный ими метод быстрых мультиполей оказался намного быстрее, чем другие численные методы, основанные на дискретизации пространства или сферических поверхностей. Следует при этом отметить, что существует некоторый нижний предел эффективности метода: его выгодно применять при трехмерной постанов-

ке задачи с достаточно большим числом частиц.

Однако для математического обеспечения измерений в акустической диагностике требуется более общая постановка задач, чем в существующих публикациях. В частности, необходим учет звукопроницаемости частиц, их расположения в пространстве и еще целого ряда сопутствующих геометрических факторов. С целью адекватного описания физических процессов, связанных с воздействием источников звука на дисперсные среды, Э.Ш. Насибуллаевой была осуществлена постановка ряда новых задач по рассеянию акустических волн от пузырьков газа в жидкости и капель жидкости в газе или в другой жидкости. Одновременно ею был развит метод быстрых мультиполей для расширения возможностей его применения в указанных случаях.

Исходная формулировка поставленных задач заключалась в исследовании рассеяния акустической волны на системе  $N$  сфер различных радиусов  $a_1, a_2, \dots, a_N$  произвольным образом расположенных в бесконечном трехмерном пространстве, заполненном однородной средой — дисперсионной фазой, которая характеризуется плотностью  $\rho_0$  и скоростью звука  $c_0$ . Сферы являются звукопроницаемыми и волна внутри них распространяется уже в среде дисперсной фазы с плотностью  $\rho_v$  и скоростью звука  $c_v$ . Рассмотрены два варианта звукового воздействия: на систему сфер падает либо плоская волна с нормальным вектором  $\hat{n}_{PW}$  к ее фронту, либо сферическая волна от монополярного источника излучения, расположенного в произвольной точке  $M_s$  трехмерного пространства. Схема для системы сфер и основные обозначения представлены на рис. 1. Задачи решены при двух существенных предположениях: во-первых, центры сфер неподвижны и, во-вторых, радиальное движение сферической поверхности отсутствует.

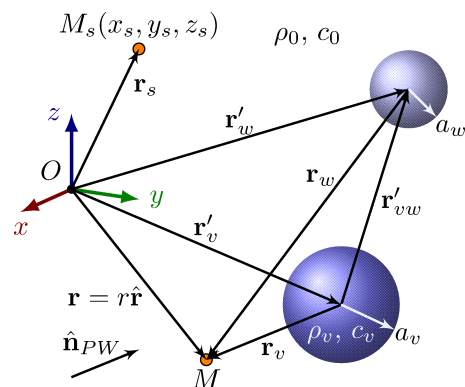


Рис. 1. Схема задачи и основные обозначения в разных системах отсчета

Следуя основным положениям метода быстрых мультиполей [2] задача была сведена к решению уравнения Гельмгольца для комплексного потенциала  $\psi(\mathbf{r})$  в произвольной точке  $\mathbf{r}$ :

$$\nabla^2 \psi + k_0^2 \psi = 0, \quad (1)$$

с граничными условиями, выражающими равенства потенциала и нормальных составляющих скорости частиц на поверхности препятствия  $S_v$ , сквозь которую проходит волна:

$$\begin{aligned} (\psi(\mathbf{r}) - \psi_{\text{int}}^{(v)})|_{S_v} &= 0, \\ \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{\rho_v} \frac{\partial \psi_{\text{int}}^{(v)}}{\partial r} \right)|_{S_v} &= 0, \quad v = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2)$$

В формулах (1) и (2)  $k_0$  — волновое число для внешней среды;  $\psi_{\text{int}}^{(v)}$  — комплексный потенциал внутри  $v$ -й сферы, который также удовлетворяет уравнению Гельмгольца, но с волновым числом  $k_v$  для среды внутри сферы.

При этом потенциал внешнего поля представляется в виде суммы потенциалов падающего поля  $\psi_{\text{in}}(\mathbf{r})$  и поля рассеяния  $\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r})$ :

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) + \psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}),$$

где  $\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r})$  удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial \psi_{\text{scat}}}{\partial r} - ik_0 \psi_{\text{scat}} \right) = 0,$$

которое соответствует затуханию волн на бесконечности.

Однако в исходном варианте техника разложения по мультиполям [2], была разработана для случая звуконепроницаемых сфер, когда падающая волна не проходит через границу раздела сред. Обобщение указанного метода для расчета звукопроницаемых сфер, центры которых лежат на одной оси, проведено в работах [4, 5]. Алгоритм для расчета множества сфер, произвольным образом расположенных в трехмерном пространстве, представлен в работе [6]. Для численной реализации алгоритмов разработаны программные коды на языке программирования Fortran 90 (GCC) в среде MSYS2 (MinGW-w64) с подключением библиотеки LAPACK [7] для решения системы линейных алгебраических уравнений в осесимметричном и общем случаях. Для осесимметричной задачи получено свидетельство о регистрации программы [8].

При численной реализации метода быстрых мультиполей решение сводится к бесконечномерной системе матричных уравнений и одним из

главных вопросов является выбор репрезентативного числа членов  $n_{tr}$  при усечении полученных рядов, поскольку при малом числе  $n_{tr}$  точность расчетов будет низкой, а при большом — возрастет объем памяти, необходимой для расчета и, соответственно, машинное время. В работах [4, 9] при расчете звукопроницаемых сфер проведено сравнение двух рациональных подходов к усечению рядов в разложении по мультиполям. В работах Э.Ш. Насибуллаевой применялся комбинированный подход, то есть, сначала производилось усечение всех рядов в каждом разложении при фиксированном числе, определяемом эмпирическими формулами, указанными в статьях [2] и [10], и вычислялось минимальное значение  $n_{tr}$ . Затем, начиная с этой минимальной величины, применяется подход [11], основанный на сравнении двух последовательных значений суммы искомого ряда, до достижения необходимой точности.

Полученные численные результаты позволяют наглядно продемонстрировать картину распределения давления вне и внутри совокупности сфер, в том числе для определения зон повышения и понижения давления. Так, для осесимметричного случая в работе [5] анализ полученных расчетных данных и построенных диаграмм показал, что в рассмотренных случаях увеличение радиуса сферы приводит к росту максимального значения давления за сферой. В случае длинных волн, когда физические параметры внешней и внутренней сред отличаются незначительно, рассеяние практически отсутствует, а в коротковолновом случае — напротив, становится существенным, но только если плотность и скорость звука внутри сфер меньше соответствующих параметров внешней среды. При малых волновых числах вне резонанса распределение давления вокруг воздушных пузырьков в воде аналогично распределению давления вокруг мягких звуконепроницаемых сфер; при малых волновых числах для случая капель воды в воздухе распределение давления во внешней среде аналогично распределению давления вокруг жестких звуконепроницаемых сфер.

В работах [6, 12] было исследовано акустическое рассеяние от слоя равномерно распределенных сфер одного радиуса (рис. 2). На рис. 3 для наглядности приведена одна из диаграмм распределения нормированного давления, полученная в работе [6]. Численные расчеты позволили установить зоны повышенного и пониженного давления как результат наложения падающей и рассеянных от системы сфер волн. Важно при этом отметить, что рассеивающий слой играет роль двумерной дифракционной решетки, имеющей раз-

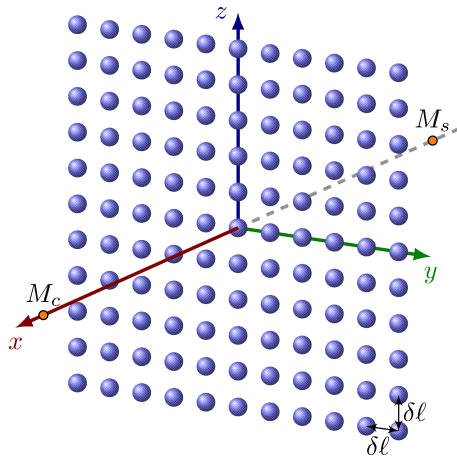


Рис. 2. Рассеивающий слой из 121 равномерно распределенных в плоскости  $Oyz$  звукопроницаемых сфер одного радиуса  $a$ :  $\delta l$  — наименьшее расстояние между центрами сфер;  $M_s$  — монополюсный источник излучения;  $M_c$  — расчетная точка

личную степень прохождения акустических волн, которая зависит от соотношений физических параметров внешней и внутренней сред. Показано также, что изменение наименьшего расстояния между сферами существенно меняет картину и качественно, и количественно. Это связано с тем, что взаимодействие между сферами сильно зависит от плотности расположения сфер в конфигурации.

В случае акустического воздействия заданной интенсивности на воздушные пузырьки, находящиеся в воде, установлено, что давление перед слоем в результате отражения возрастает в 1,8 раз, а

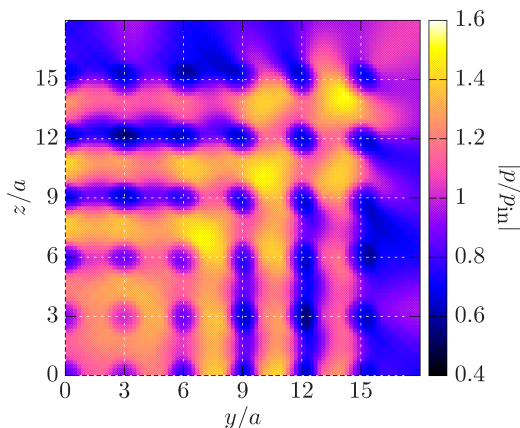


Рис. 3. Диаграмма распределения нормированного давления  $|p/p_{in}|$  для конфигурации капель воды в воздухе в плоскости  $x = 0$ , содержащей центры сфер, при  $\delta l = 3a$  и  $k_0 a = 1$  в первой четверти

за слоем давление падает более, чем в 5 раз.

В работе [13] впервые получено явное выражение для полного сечения рассеяния на множестве взаимодействующих звукопроницаемых сфер. Формула выведена с помощью теорем сложения для сферических волновых функций и применима для любого числа сфер различных радиусов, произвольным образом расположенных в трехмерном пространстве, а также для произвольного внешнего воздействия. Исследование полного сечения рассеяния, на основании формулы, полученной в [13] позволило выявить параметрическую область, в которой эффектами многократного рассеяния пренебречь нельзя.

Развитие темы исследований по данному направлению будет связано с дальнейшим усложнением математических моделей рассматриваемых задач, в которых предполагается хаотическое расположение частиц дисперсной фазы и их подвижность в окрестности заданного положения. Особенно интересным представляется исследование рассеяния звукового воздействия на дисперсные системы с учетом колебаний, связанных с изменением объема и формы частиц, а также с возможностью излучения акустических волн самими частицами.

### 3. Численное моделирование процессов температурной стратификации

Со времени обнаружения Ж. Ранком (J. Ranque, 1933) [14] эффекта температурной стратификации в вихревом потоке газа в трубе, позднее названной его именем, опубликовано огромное количество научных статей и зарегистрировано множество патентов с предложениями по совершенствованию этого, на первый взгляд, достаточно простого устройства. Но, собственно говоря, систематические исследования температурного разделения начались после публикации Р. Хилша (R. Hilsch, 1947) [15], в которой он привел свои экспериментальные данные по исследованию процессов в вихревой трубе. Суть эффекта можно объяснить достаточно просто: при тангенциальной подаче воздуха в трубу на одном её конце, происходит разделение потока на высокотемпературную и низкотемпературную составляющие. Причём «горячий» выход находится в кольцевом отверстии на периферии трубки, а «холодный» — на её оси.

Интересно отметить, что обнаружение температурной стратификации было связано с исследованиями Ж. Ранка процессов в циклонах-пылеуловителях [14]. Более поздние исследования [16] позволили установить некоторые параметры трубок Ранка, при которых температурное



разделение достигает максимальных значений. В частности, в работе А.П. Меркулова [16] предлагается проводить выбор диаметра  $D$  вихревой трубы в пределах от 5 до 35 мм, так как в этом диапазоне с увеличением диаметра происходит уменьшение температуры газа на «холодном» выходе. Дальнейшее увеличение диаметра трубы ведёт уже к снижению эффекта температурной стратификации. Так же, экспериментально, была установлена характерная длина трубы:  $L \sim 9D$ . Диаметр отверстия для выхода «холодного» воздуха приблизительно определён значением  $d \sim 0.45D$ , а площадь кольцевого отверстия для выхода «горячего» воздуха сопоставима с площадью сечения входного отверстия для подачи воздуха. Давление на входе ограничивается величиной  $p_0 \leq 6 \cdot 10^5$  Па, при температуре  $T_0 \sim 300$  °К.

Несмотря на широкое применение труб Ранка в различных областях техники и большое число исследований, включающих, в том числе, теоретические работы, общепринятая теория температурной стратификации отсутствует.

Не все предложенные подходы заслуживают внимания, поэтому отметим здесь лишь те из них, которые могут быть рассмотрены в качестве исходных для постановки и решения новых задач, связанных с применением эффекта Ранка в современных технологических процессах таких, как, например, непрерывная осушка газа.

Прежде всего обратимся к обширному обзору А.Ф. Гуцола [17], в котором проведен тщательный анализ работ полувекового периода с 1947 по 1996 годы, выявлены недостатки и некоторые внутренние противоречия ряда предлагаемых теорий при трактовке экспериментальных исследований. Автором обзора предложена собственная гипотеза, смысл которой описан следующей фразой: «Благодаря наличию трения и турбулентности как на выходе из тангенциального сопла, так и в самой трубе имеются элементы потока,двигающиеся с различными скоростями, т.е. имеющие разную кинетическую энергию при прочих равных параметрах». В результате, в центре вихря оказываются частицы входящего в трубу газа, имеющие наименьшую кинетическую энергию. Разделение частиц происходит в поле центробежных сил из-за различия их тангенциальных скоростей. В этом обзоре, также, предложена и физическая схема, позволяющая строить модель развития процесса разделения частиц газа в зависимости от их энергии в турбулентном потоке, позволившая сделать целый ряд оценок, связанных с энергоразделением в закрученном потоке газа. Следует отметить, что в соответствии с предложенными в статье гипотезой

и схемой, полноценную математическую модель целесообразно было бы представить с учётом некоторого распределения частиц газа по энергиям, например, на основе уравнений Больцмана с функцией распределения Максвелла.

Оригинальная и достаточно убедительная модель температурной стратификации была предложена в работе М.В. Калашника и К.Н. Вишератина [18]. Она основана на идее циклострофического приспособления, то есть приведения системы к балансу между градиентом давления и центробежной силой. В работе показано, что циклострофический процесс носит нестационарный волновой характер и при достаточно больших начальных скоростях вращения сопровождается ощутимым падением температуры газа в окрестности оси трубы. Когда тангенциальная скорость газа на входе достигает величины, равной приблизительно половине скорости звука и выше, температура на оси может достигать до  $-100$  °С и ниже. В то же время газ в пристеночной области нагревается. Математическое описание процесса приспособления выполнено с использованием системы уравнений газовой динамики для осесимметричного закрученного течения идеального политропного газа. На основе анализа математической модели в классе точных стационарных решений получено уравнение циклострофического баланса. Решение было представлено в виде суммы стационарной сбалансированной и нестационарной составляющих. Наблюдаемый в экспериментах интенсивный шум в акустическом диапазоне свидетельствует, по мнению авторов, о волновом характере процесса циклострофического приспособления, а сбалансированное стационарное состояние поддерживается при незатухающих акустических колебаниях.

При всех достоинствах представленной в [18] модели, она обладает естественными ограничениями при описании множества конструктивных особенностей, которыми экспериментаторы и инженеры снабжают свои оригинальные устройства по энергоразделению. Это, во-первых, относится к одномерному описанию процесса циклострофического приспособления, во-вторых, модель построена для идеального газа, не предусматривающего наличие вязкости, в-третьих, при рассматриваемых в задаче скоростях газа необходим учёт турбулентности потока. В частности, при моделировании возникающих в трубке Ранка приосевых возвратных течений, очевидно, необходимы двух- или трехмерные модели. Объяснение эффекта Ранка на основе принципа минимизации интегрального лагранжиана было выполнено в работе В.Г. Усыченко [19]. Автор утверждает, что ему удалось каче-

ственно описать «причину образования вынужденного вихря и снижения температуры наполняющих его молекул; тенденцию к увеличению числа Маха; отклонение радиального распределения температуры газа от закона адиабаты; механизм возникновения турбулентности». Несмотря на отсутствие конкретных результатов, польза статьи заключается, прежде всего, в обосновании возможности существования энергоразделения в вихревой трубе с точки зрения синергетики.

Новый импульс для развития технологий температурной стратификации был дан в работах А.И. Леонтьева [20–22], в которых он предложил принципиально новую схему энергоразделения. В 1998 году он получил патент на способ температурной стратификации газа и устройство для его осуществления (приоритет 1996 г.), которое позволяет сохранить полное давление одного из потоков и способствует построению различных многокаскадных и комбинированных схем.

Принцип действия трубы Леонтьева основан на газодинамическом эффекте температурной стратификации, который заключается в следующем: разность количества теплоты, получаемой от работы сил трения за счет диссипативных процессов в пограничном слое сжимаемого газа и количества теплоты, которое может быть отведено за счёт теплопроводности при данной температуре приводит к разности между температурой пристенного слоя газа и температурой торможения в основном потоке. Данное обстоятельство и применяется для энергоразделения. А.И. Леонтьевым и его коллегами был выполнен значительный объём теоре-

тических и экспериментальных исследований по совершенствованию «трубы Леонтьева», методам расчета и промышленным приложениям. Эти работы были отражены в обзорных статьях [23, 24], в которых был также приведен подробный анализ вихревой стратификации температуры в системах, основанных на эффекте Ранка и других методах энергоразделения.

Интересным примером использования энергоразделения в трубе Леонтьева может служить безогневой подогрев газа, предложенный в работе Е.В. Цветовой и ее коллег [25].

Так или иначе, но к настоящему времени уже существует достаточное количество и математических моделей, и методов расчёта различных способов температурной стратификации. Все они построены на предложенных их авторами допущениях и приближениях. Между тем, всестороннее исследование газодинамических процессов даже в простейших системах энергоразделения требует использования методов численного моделирования, которые позволяют снять ограничения, связанные с размерностью задачи и геометрическими особенностями конструкции, учётом турбулентности, наличия дисперсной фазы в потоке, фазовых превращений и других факторов.

Построение математической модели процесса температурной стратификации в трёхмерной области для турбулентного потока газа в рамках заявленной темы было предпринято К.И. Михайленко [26–28] (Рис. 4). С этой целью к настоящему времени была построена и детально исследована оптимальная структура расчётной сетки для учёта

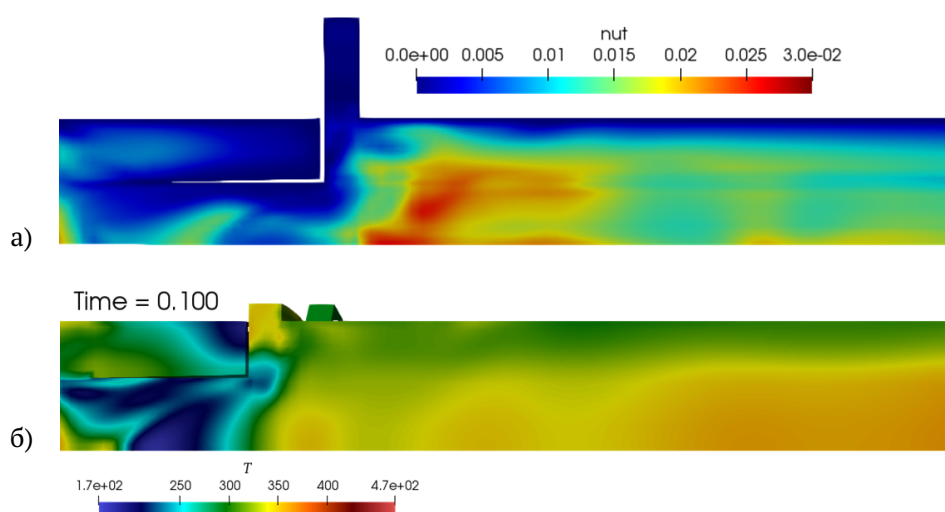


Рис. 4. Распределение турбулентной вязкости в канале диафрагмы холодного выхода и в районе завихрителя вихревой трубы (а) и распределение температуры в канале холодного выхода, области завихрителя и прилегающей области основного канала вихревой трубы (б)

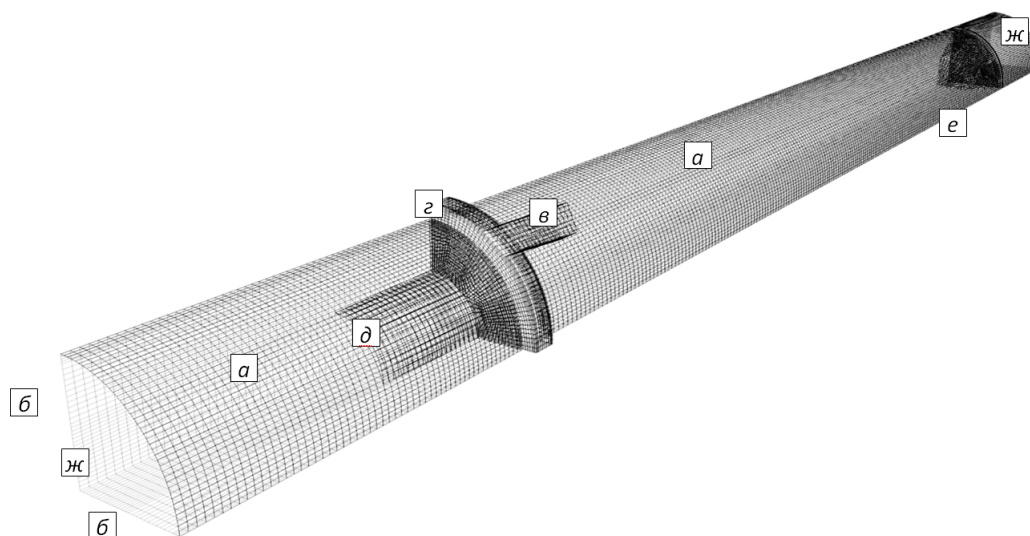


Рис. 5. Схема расчетной области: внешняя стенка (а), показанная темной сеткой; периодические границы (б) обозначены более светлой сеткой; также на схеме буквами показаны: область подачи сжатого газа (в) с направляющим патрубком; завихритель (г); выходной канал диафрагмы холодного воздуха (д); конус диафрагмы горячего выхода и области, на которых устанавливается граничное условие для выходящего газа (ж)

возможных конструктивных элементов, влияющих на эффективность температурной стратификации. Отдельно была рассмотрена задача о закрученном потоке монодисперсной смеси. Математическая модель процесса представлена уравнениями газовой динамики для дисперсионной фазы и кинетическими уравнениями Больцмана — для дисперсной фазы. Численное исследование системы уравнений модели выполнено с помощью решателя MPPICFoam (Multiphase Particle-in-Cell method) пакета OpenFOAM [29]. В результате получены распределения скоростей частиц в сепараторе.

В результате подготовлена и исследована с точки зрения сходимости ортогонализированная конечно-объемная сетка с пристеночным слоем (Рис. 5). Показана высокая эффективность параллельных вычислений при моделировании динамики газа в рассматриваемой области на высокопроизводительном вычислительном кластере [30, 31]. С использованием рассмотренного подхода проведен ряд параметрических исследований, в частности, рассмотрена зависимость температуры выходящего воздуха в канале холодной диафрагмы в зависимости от диаметра диафрагмы [32, 33].

Рассмотрена возможность моделирования динамики двухфазной системы газ–дисперсная среда [34] в канале вихревой трубы при использовании математической модели, основанной на применении больцмановской функции распределения при описании динамики дисперсной фазы (Рис. 6). Показано, что с соблюдением некоторых ограниче-

ний, такой подход допустим и может быть использован при моделировании в среде OpenFOAM [29].

В целом, в этом направлении выполнен большой объем вычислений по тестированию и адаптации трёхмерной численной модели закрученного потока газа с присутствием в нем дисперсной фазы для решения конкретных прикладных задач. Для широкого диапазона турбулентных течений были определены оптимальные, с точки зрения температурной стратификации потока, геометрические параметры входного и выходного сечений вихревой трубы.

#### 4. Численное моделирование течения магмы по трещинам и каналам горных пород и проблемы магматического рудообразования

Образование большинства рудных месторождений связано магматическими процессами в земной коре. В этой связи центральное место в теории магматогенных гидротермальных месторождений занимает проблема математического моделирования формирования рудоносных флюидов, осаждения и дифференциации (перераспределения) компонентов в процессе их охлаждения [35, 36].

Сама магма представляет собой природную жидкость, обычно это силикатный расплав, обогащенный летучими компонентами ( $H_2O$ ,  $CO_2$ ,  $CO$ ,  $H_2S$  и др.). Подвижность магмы, как и других жидкостей, определяется ее вязкостью, зависящей от химического состава и температуры. Последнее об-



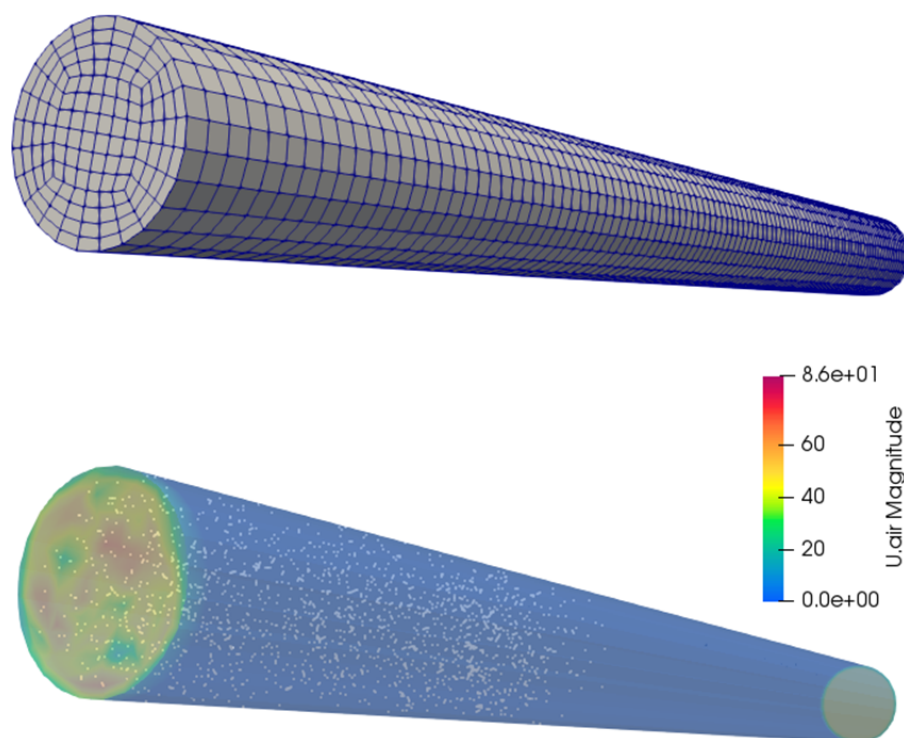


Рис. 6. Вычислительная сетка модели трубы и распределение дисперсных частиц в трубе при наличии закрученного потока воздуха

стоятельство будет играть ведущую роль при дальнейшем изложении. Наименьшая вязкость присуща мантийным магмам с малым содержанием кремнезема ( $\text{SiO}_2$ ), находящимся на достаточно большой глубине и имеющим высокую температуру — до  $1600\text{--}1800\text{ }^\circ\text{C}$ . Магмы, образовавшиеся за счет плавления вещества верхней континентальной коры при дегидратации минералов при температуре  $700\text{--}600\text{ }^\circ\text{C}$  максимально насыщены кремнеземом и обладают уже достаточно высокой вязкостью.

Прежде всего отметим, что течение магмы происходит в достаточно узких каналах, образованных трещинами горных пород, имеющих значительно более низкую температуру, чем магматический расплав. Обычно предполагается, что во вмещающих породах задан геотермальный вертикальный перепад температуры от  $20\text{ }^\circ\text{C}$  на верхней границе условной трещины и до  $1500\text{ }^\circ\text{C}$  — на нижней границе.

Характерные скорости движения магматического расплава при фильтрационном режиме определяются диапазоном от нескольких сантиметров до нескольких метров в год. С другой стороны, согласно расчетам, проведенным по полевым измерениям, скорость истечения ультраосновных магм по трещинам может достигать средней скорости

$10\text{ м/с}$ . Отметим, что ультраосновными магматическими горными породами называют отряд магматических горных пород (ультрабазитов, гипербазитов), содержащих кремнезем ( $\text{SiO}_2$ ) в пределах  $30\text{--}45\%$ . Как правило, они содержат большое количество  $\text{MgO}$ .

Рассматривая процессы течения магматического расплава в трещинах горных пород, мы имеем дело с особенностями течения термовязких сред в каналах с интенсивным теплообменом. В соответствии с результатами предыдущих исследований в области термовязких сред, зависимость вязкости расплава от температуры в значительной мере определяет гидродинамические параметры потока. Следовательно, математические модели целесообразно строить, основываясь на связанных уравнениях термогидродинамики с учетом этой зависимости.

Ранее, в работах [37–44] были рассмотрены особенности свободной конвекции в жидкостях, вязкость которых зависит от температуры в соответствии с аррениусовской кинетикой или вообще является немонотонной функцией. Здесь предполагается, что магма представляет собой однородную несжимаемую неньютоновскую жидкость со степенным законом вязкого трения Оствальда-де-Ваала. Сообразно данным работ [45, 46] вязкость

магмы может быть представлена выражением:

$$\mu = \left[ \mu_1 \exp\left(\frac{T_A}{T}\right) + \mu_2 \exp\left(\frac{T_B}{T - T_C}\right) \right] \times \left\{ 2 \left[ \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 \right\}^{\frac{n-1}{2}},$$

где  $\mu_1$  — вязкость магмы при температуре очага  $T_0$ ;  $\mu_2$  — вязкость магмы при температуре застывания магмы  $T_C$ ;  $T_A$  — температура в ядре;  $T_B$  — температура застывшей магмы. Для представления о значениях рассматриваемых величин отметим, что в работах [47–50] принимались следующие значения:  $\mu_1 = 0.04, 0.4, 4, 40, 400, 4 \cdot 10^3, 4 \cdot 10^4$ ;  $\mu_2 = 2$ ;  $T_A = 6800$  °C;  $T_B = 500$  °C;  $T_C = 1040$  °C. Степенной показатель неньютоновских свойств жидкости можно принять, в соответствии с данными работы [51], равным  $n = 1.9, 2.4$ .

В рамках развития теории и методов гидродинамики термовязких жидкостей, а также для выполнения контракта с ООО «НН Технические сервисы», К.В. Моисеевым был решен ряд задач, связанных с течением базальтовой магмы в системе каналов, разделенных субвулканической камерой в условиях динамической дифференциации при формировании сульфидных руд в интересах месторождений ПАО «ГМК „Норильский никель“», в частности, для Курейского и Хараелахского интрузивов.

На рис. 7(а) представлены поля скорости потока магмы с обособлениями после прохождения количества магмы, равной 10 объемам выделен-

ного участка субвулканической камеры. Имеет место установившийся ламинарный профиль. На рис. 7(б) приведено поле температуры потока магмы с обособлениями совместно с температурой вмещающих пород. После прохождения 10 объемов заметен разогрев вмещающих пород. На рис. 8 приведена объемная доля сульфидной (рис. 8(а)) и легкой (рис. 8(б)) фаз на выходе из субвулканической камеры. Из рис. 8(а) видно, что в конце камеры происходит увеличение объемной доли сульфидной фазы у подошвы субвулканической камеры, то есть наблюдается осаждение. На рис. 8(б) приведена объемная доля легкой фазы на выходе из нее, то есть в конце камеры происходит увеличение объемной доли сульфидной фазы у кровли субвулканической камеры. В начале камеры доли сульфидной и легкой фаз были равномерно распределены по сечению потока магмы.

Далее были рассмотрены задачи осаждения и всплытия соответствующих компонентов магмы. В процессе теплообмена с вмещающими породами магма охлаждается, что способствует выделению из состава магматического расплава компонентов в виде тяжёлых или лёгких фракций, образующих многофазную смесь дисперсных частиц. В целом, магму следует рассматривать как дисперсную систему, состоящую из дисперсионной фазы — базальтового расплава и дисперсной фазы — капелек ликвированных сульфидов, более тяжелой силикатной жидкости, автолитов, ксенолитов, сростков и кристаллов оливина и других компонентов, включая летучие. Таким образом, следует подчерк-

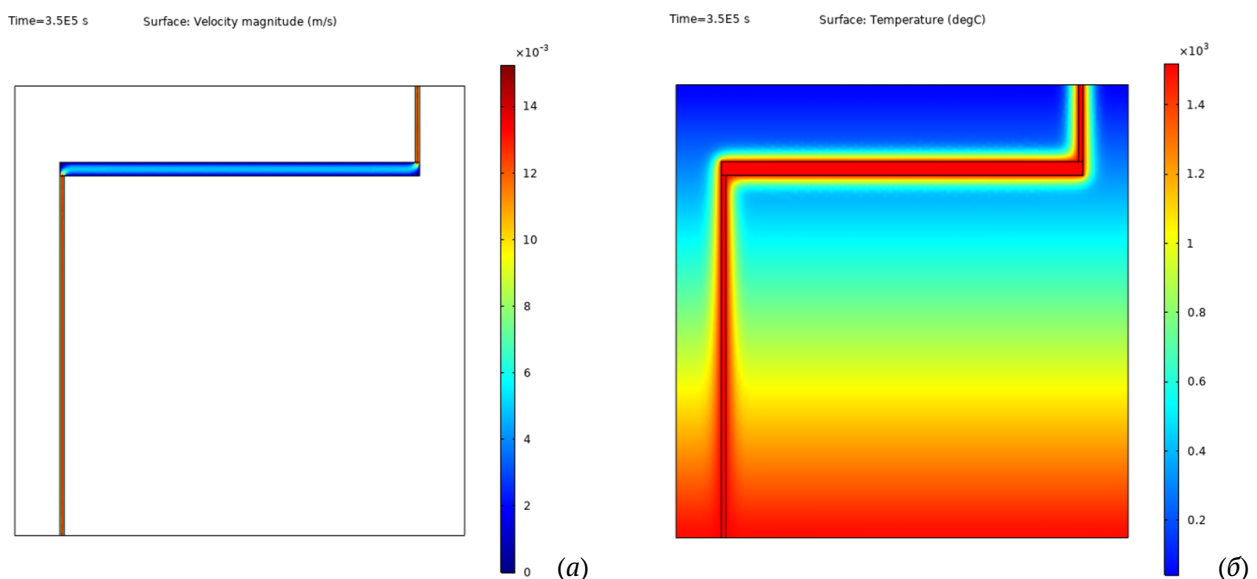


Рис. 7. Поля скорости потока магмы с обособлениями (а) и температуры в потоке магмы с окружающими его вмещающими породами (б)

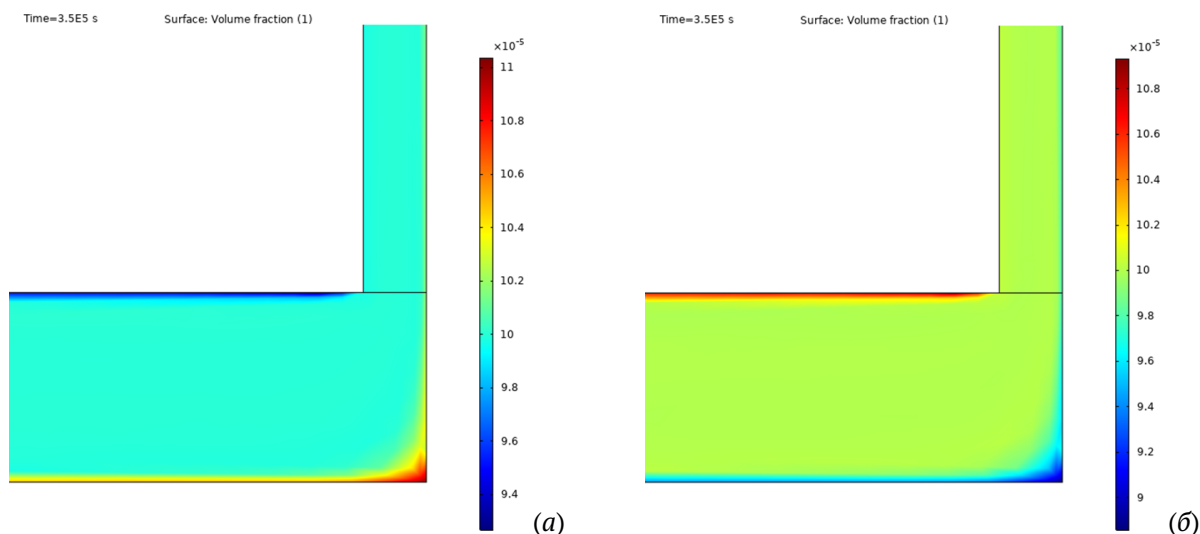


Рис. 8. Объемные доли сульфидной (а) и легкой (б) фаз на выходе из субвулканической камеры

нуть, что в составе дисперсной фазы может находиться два или большее число компонентов, которые практически не смешиваются и химически не реагируют друг с другом. В поле силы тяжести происходит их разделение или, иначе говоря, дифференциация. При этом предполагается, что частицы дисперсной фазы движутся с равновесной скоростью, соответствующей скорости потока дисперсионной фазы. Скоростная неоднородность учитывается только в направлении вектора ускорения силы тяжести.

С целью описания процесса дифференциации фаз была разработана математическая модель, в основе которой лежат принципы механики многофазных сред. Модель многофазной смеси включает уравнения неразрывности и уравнения движения для дисперсионной, а также, для каждой компоненты дисперсной фазы. Кроме того, для определения распределения температурного поля принято во внимание уравнение внутренней энергии дисперсной системы в форме притока тепла или уравнение теплопроводности. Представленная модель динамики многофазной смеси позволяет рассчитать среднее содержание дисперсных частиц в единице объема.

Далее представлены результаты расчетов в случае открытого Курейского интрузива мощностью 1500 м, выходной канал которого расположен во фронтальной части интрузива на одной стороне с дайкой.

На рис. 9 приведены линии тока базальтовой магмы с обособлениями (рис. 9(а)), поле температуры в интрузиве и окружающих породах (рис. 9(б)), объемная доля обособлений (сульфидной фазы) в

горизонтальном сечении интрузива (рис. 9(в)), объемная доля обособлений (легкой фазы) в горизонтальном сечении интрузива (рис. 9(г)). Результаты даны для Курейского интрузива при наличии выходного канала.

Из рис. 9(а) видно, что течение базальтовой магмы с обособлениями имеет структуру, в соответствии с которой при наличии выходного канала во фронтальной части интрузива базальтовая магма прорывается к нему, а впоследствии течение охватывает все поперечное сечение интрузива. На некотором расстоянии от дайки поток магмы становится равномерным до достижения фронтальной границы, после чего поток базальтовой магмы разгоняется, устремляясь в выходной канал.

Из рис. 9(б) следует, что при течении горячей базальтовой магмы с обособлениями холодный интрузив интенсивно разогревается, а также происходит разогрев вмещающих интрузив пород.

Рис. 9(в) наглядно демонстрирует, что при течении смеси базальтовой магмы с малой долей обособлений (менее 0.01%) в камере интрузива наблюдается осаждение тяжелой сульфидной фазы в виде полосчатых структур с объемной долей содержания до  $10^{-3}$  д. ед. или 0.1%.

На рис. 9(г) видно, что при течении смеси базальтовой магмы с малой долей обособлений (менее 0.01%) незначительное объемное содержание легкой фазы ( $10^{-5}$  д. ед. или 0.001%) наблюдается на периферии интрузива. В этом случае часть легкой фазы выносятся с потоком базальтовой магмы.

Таким образом можно сделать вывод, что в открытых интрузивах возможен процесс дифференциации и образования рудоносных тел.

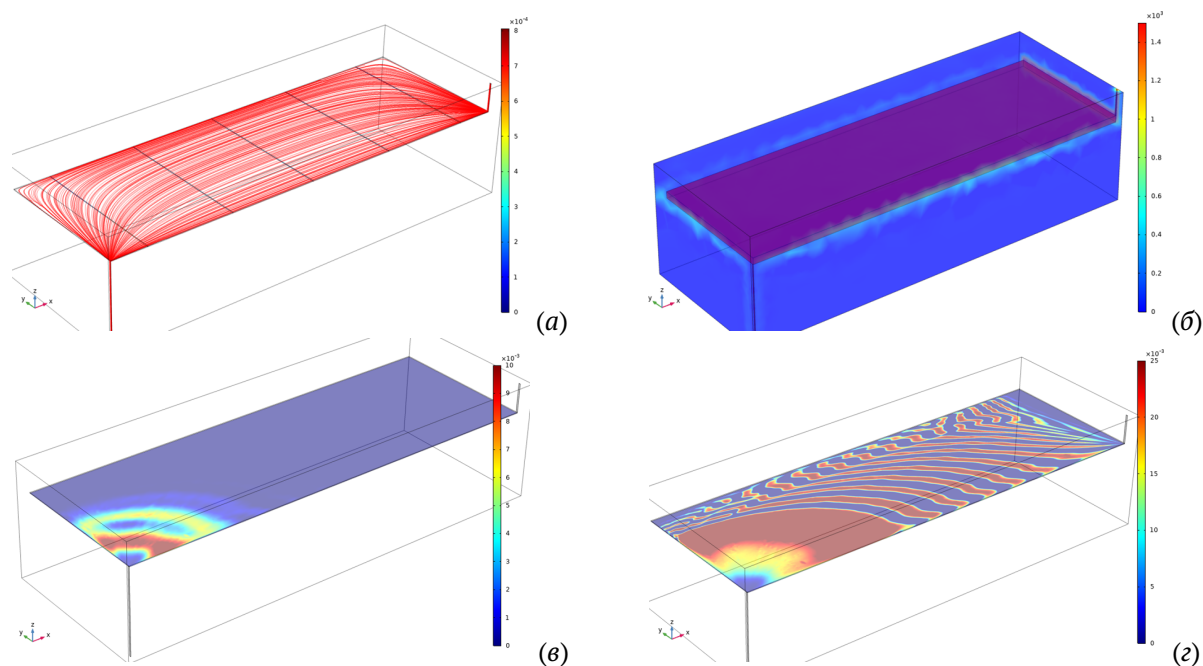


Рис. 9. Линии тока базальтовой магмы с обособлениями (а), поле температуры в интрузиве и окружающих породах (б), объемная доля обособлений (сульфидной фазы) в горизонтальном сечении интрузива при прохождении 1 объема (в), объемная доля обособлений в горизонтальном сечении интрузива при прохождении 10 объемов (г) для Курейского интрузива при наличии выходного канала

## 5. Заключение

Подводя итоги обзора можно сделать некоторые выводы.

Результаты исследований при решении задачи о взаимодействии источника звука со слоем звукопроницаемых сферических частиц представляет интерес с точки зрения идентификации данных измерений при акустической диагностике пузырьковых и капельных систем в технологических установках и для анализа последствий воздействия ультразвука и волн давления на экранирующие слои, состоящие из частиц дисперсной фазы, если гипотезы механики многофазных сред оказываются неприменимыми для описания физической модели рассматриваемого процесса. Изучение характеристик рассеяния позволит внести поправки на коэффициенты отражения и прохождения акустических волн при взаимодействии со слоем дисперсных частиц, а также оценить влияние звукопроницаемости частиц на энергию волн как отраженных от слоя, так и прошедших сквозь него.

Анализ научной литературы свидетельствует, что сложность процессов, происходящих в закрученных потоках, тем более при наличии дисперсной фазы такова, что для их описания необходимы численные модели, которые могли бы позволить с достаточной степенью точности учесть, как все

особенности конструкции вихревых труб, так и гидродинамические и теплофизические особенности процесса течения в этих трубах. Например, было показано, что эффективность температурной стратификации в трубах Ранка в значительной степени определяется геометрическими параметрами входного и выходных сечений.

Аналогичным образом обстоит дело и с проблемой формирования рудных отложений. Методы математического моделирования при посредстве вычислительного эксперимента позволяют повысить точность прогнозирования локализации тех или иных рудных месторождений, образующихся при истечении магматического расплава.

Представленные работы выполнены в рамках государственного задания № 0246-2019-0052 и являются значительным вкладом в решение важных технических задач и развития новых технологий.

## Список литературы

- [1] Гринченко В.Т., Вовк И.В., Мацыпура В.Т. Основы акустики. Киев: Наукова думка, 2009. 867 с.
- [2] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from  $N$  spheres using multipole reexpansion // J. Acoust. Soc. Am. 2002. Vol. 112, No. 6. P. 2688–2701.  
DOI: [10.1121/1.1517253](https://doi.org/10.1121/1.1517253)



- [3] Gumerov N.A., Duraiswami R. Fast Multipole Methods for the Helmholtz Equation in Three Dimensions. Elsevier, 2004. 520 p. DOI: 10.1016/b978-0-08-044371-3.x5000-5
- [4] Насибуллаева Э.Ш. Численное моделирование акустического рассеяния от коаксиальных звукопроницаемых сфер // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 2. С. 115–124. DOI: 10.21662/mfs2019.2.016
- [5] Насибуллаева Э.Ш. Численный анализ акустического рассеяния от звукопроницаемых сфер при внешнем воздействии // Вестник УГАТУ. 2021. Т. 25, № 2(92). С. 93–101. DOI: 10.54708/19926502\_2021\_2529293
- [6] Насибуллаева Э.Ш. Моделирование акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер в трехмерном пространстве // Вычислительные технологии. 2022. Т. 27, № 2. С. 19–36. DOI: 10.25743/ICT.2022.27.2.003
- [7] LAPACK — Linear Algebra PACKage. <https://netlib.sandia.gov/lapack/> (accessed: 24.10.2022).
- [8] Насибуллаева Э.Ш. Моделирование акустического рассеяния от коаксиальных сфер при внешнем воздействии. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020618862 от 05.08.2020 г. eLIBRARY ID: 43889013
- [9] Насибуллаева Э.Ш. Определение числа членов при усечении рядов для численного решения задачи акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер // Многофазные системы. 2020. Т. 15, № 3–4. С. 176–182. DOI: 10.21662/mfs2020.3.128
- [10] Antoine X., Chniti C., Ramdani K. On the numerical approximation of high-frequency acoustic multiple scattering problems by circular cylinders // J. Comput. Phys. 2008. V. 227, No. 3. Pp. 1754–1771. DOI: 10.1016/j.jcp.2007.09.030
- [11] Duda R.O., Martens W.L. Range dependence of the response of a spherical head model // J. Acoust. Soc. Am. 1998. V. 104, no 5. Pp. 3048–3058. DOI: 10.1121/1.423886
- [12] Насибуллаева Э.Ш. Численный анализ акустического рассеяния от слоя звукопроницаемых сфер // Многофазные системы. 2021. Т. 16, № 2. С. 50–57. DOI: 10.21662/mfs2021.2.008
- [13] Насибуллаева Э.Ш. Численный анализ многократного рассеяния акустической волны на множестве звукопроницаемых сфер в трехмерном пространстве // Вычислительная механика сплошных сред. 2022. Т. 15, № 4. С. 383–398. DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.4.29
- [14] Ranque G.J. Experiments on expansion a vortex with Simultaneous Exhaust of hot air and cold air // Journal de Physique et Le Radium. 1933. V. 4. P. 112s–114s (in French).
- [15] Hilsch R. The Use of the Expansion of Gases in a Centrifugal Field as Cooling Process // Review of Scientific Instruments. 1947. V. 18. P. 108–113. DOI: 10.1063/1.1740893
- [16] Меркулов А.П. Вихревой эффект и его применение в технике. М.: Машиностроение, 1969. 182 с.
- [17] Гуцол А.Ф. Эффект Ранка // УФН. 1997. Т. 167, № 7. С. 665–687. DOI: 10.3367/UFN.0167.199706e.0665
- [18] Калашник М.В., Вишератин К.Н. Циклострофическое приспособление в закрученных газовых потоках и вихревой эффект Ранка // ЖЭТФ. 2008. Т. 133, вып. 4. С. 935–947. eLIBRARY ID: 11517654
- [19] Усаченко В.Г. Эффект Ранка как явление самоорганизации // ЖТФ. 2012. Т. 82, вып. 3. С. 67–74. eLIBRARY ID: 20325506
- [20] Леонтьев А.И. Температурная стратификация сверхзвукового газового потока // ДАН. 1997. Т. 354, № 4. С. 475–477. eLIBRARY ID: 25515403
- [21] Леонтьев А.И. Газодинамический метод энергоразделения газовых потоков // ТВТ. 1997. Т. 35, № 1. С. 157. eLIBRARY ID: 25515598
- [22] Леонтьев А.И. Способ температурной стратификации газа и устройство для его осуществления (Труба Леонтьева). Патент на изобретение РФ № 2106581. Кл. МПК-6: F25B9/02.10.03.1998.
- [23] Леонтьев А.И. Газодинамические методы температурной стратификации (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 4. С. 6–26. eLIBRARY ID: 25641770
- [24] Бурцев С.А., Леонтьев А.И. Исследование влияния диссипативных эффектов на температурную стратификацию в потоках газа (обзор) // ТВТ. 2014. Т. 52, № 2. С. 310–322. DOI: 10.7868/S0040364413060069
- [25] Цветова Е.В., Ковальногов В.Н., Хахалев Ю.А. Моделирование и исследование процесса газодинамической температурной стратификации для повышения эффективности редуцирования природного газа // Вестник Ульяновского государственного технического университета. 2021. Т. 10, № 2(54). С. 54–58. DOI: 10.46548/21vek-2021-1054-0010
- [26] Баширова К.И., Михайленко К.И. Трехмерное моделирование ударной трубы в пакете OpenFOAM // Вестник Башкирского университета. 2018. Т. 23, № 3. С. 621–626. eLIBRARY ID: 36476517
- [27] Mikhaylenko C.I. A finite volume mesh with periodic boundary conditions for a vortex tube numerical simulation // Многофазные системы. 2021. Т. 16, № 2. С. 72–78. DOI: 10.21662/mfs2021.2.010
- [28] Михайленко К.И. Исследование вычислительных сеток для моделирования динамики воздуха в канале вихревой трубы средствами пакета OpenFOAM // Вычислительная механика сплошных сред. 2022. Т. 15, № 1. С. 56–66. DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.1.5
- [29] Баширова К.И. Моделирование осаждения закрученного потока разреженной гранулированной среды в цилиндрической области методом MP-PIC // Многофазные системы. 2021. Т. 16, № 3–4. С. 144–148. DOI: 10.21662/mfs2021.3.017
- [30] Газизов Р.К., Лукашук С.Ю., Михайленко К.И. Разработка параллельных алгоритмов решения задач механики сплошной среды на основе принципа пространственной декомпозиции // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2003. Т. 4, № 1. С. 100–107. eLIBRARY ID: 42340448
- [31] Марьин Д.Ф., Михайленко К.И., Хазиев Л.Х. Прямое численное моделирование эффекта Ранка // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2011) : Труды международной научной конференции, Москва. Москва: Издательский центр ЮУрГУ, 2011. С. 539–547. eLIBRARY ID: 22641213
- [32] Михайленко К.И. Зависимость перераспределения температуры в вихревой трубе от геометрии завихрителя // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2017. Т. 12, № 2. С. 174–179. DOI: 10.21662/uim2017.2.026
- [33] Mikhaylenko C.I. Vortex tube modelling: Outlet parameter dependencies of cold air production // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1158, Issue 3. 032032. DOI: 10.1088/1742-6596/1158/3/032032
- [34] Михайленко К.И., Валеева Ю.Р. Моделирование осаждения мелкодисперсной взвеси из воздуха при прохождении волн давления // Вычислительные методы и программирование. 2013. Т. 14, № 3. С. 328–333. eLIBRARY ID: 21014483

- [35] Радько В.А. Модель динамической дифференциации интрузивных траппов северо-запада Сибирской платформы // Геология и геофизика. 1991. № 11. С. 19–27.
- [36] Радько В.А. Фации интрузивного и эффузивного магматизма Норильского района. СПб.: Картографическая фабрика ВСЕГЕИ, 2016. 226 с.
- [37] Ильясов А.М., Моисеев К.В., Урманчиев С.Ф. Численное моделирование термоконвекции жидкости с квадратичной зависимостью вязкости от температуры // Сибирский журнал индустриальной математики. 2005. Т. 8, № 4(24). С. 51–59. [eLIBRARY ID: 9484545](#)
- [38] Кулешов В. С., Моисеев К. В., Хизбуллина С. Ф., Михайленко К. И., Урманчиев С. Ф. Особенности конвективных течений anomalно термовязкой жидкости // Математическое моделирование. 2017. Т. 29. № 5. С. 16–26. [eLIBRARY ID: 29255015](#)
- [39] Кулешов В. С., Моисеев К. В., Урманчиев С. Ф. Периодические структуры при конвекции anomalно термовязкой жидкости // Вестник БашГУ. 2017. Т. 22. № 2. С. 297–302. [eLIBRARY ID: 29729319](#)
- [40] Моисеев К. В., Хизбуллина С. Ф., Бахтизин Р. Н., Урманчиев С. Ф., Кулешов В. С., Алфёров А. В. Математические модели термогравитационной конвекции неоднородной жидкости // Нефтегазовое дело. 2017. Т. 15. № 2. С. 165–170. [eLIBRARY ID: 29931683](#)
- [41] Кулешов В.С., Моисеев К.В., Урманчиев С.Ф. Изолированные режимы течений при конвекции anomalно термовязкой жидкости в плоской ячейке // Прикладная математика и механика. 2019. Т. 83, № 3. С. 484–494. [DOI: 10.1134/S0032823519030093](#)
- [42] Kuleshov V. S., Moiseev K. V., Uрманchiev S. F. Isolated Convection Modes for the Anomalous Thermoviscous Liquid in a Plane Cell // Fluid Dynamics. 2019. Vol. 54, P. 983–990. [DOI: 10.1134/S0015462819070097](#)
- [43] Кулешов В. С., Моисеев К. В. Конвекция термовязкой жидкости в ячейке, подогреваемой сбоку // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 1. С. 67–72. [DOI: 10.21662/mfs2019.1.010](#)
- [44] Moiseev K. V., Kuleshov V. S., Bakhtizin R. N. Free convective of a linear heterogeneous liquid in a square cavity at side heating // SOCAR Proceedings. 2020. №.4, P. 108–116. [DOI: 10.5510/OGP20200400472](#)
- [45] Титов В.В., Федотов С.А. Математическое моделирование подъема вязкой магмы по вертикальной дайке. Препринт ИАЭ-3470/16. М.: ИАЭ, 1981. 24 с.
- [46] Kaddiri M., Naimi M., Raji A., Hasnaoui M. Thermal convection within a square cavity filled with non-newtonian power-law fluids and differentially heated with uniform heat fluxes // International Scientific Journal for Alternative Energy and Ecology. 2010. No. 8(88). P. 57–69. [eLIBRARY ID: 15632654](#)
- [47] Михайлова–Филиппова М.И., Федотов С.А. Теплообмен потока магмы со стенками трещины-дайки: математическая модель и алгоритм расчета // Вулканология и сейсмология. 1994. № 6. С. 17–23.
- [48] Федотов С.А., Михайлова–Филиппова М.И. Течение магм в дайках разной мощности (по данным математического моделирования при вязкости, зависящей от температуры) // Вулканология и сейсмология. 1994. № 6. С. 24–43.
- [49] Михайлова–Филиппова М.И., Федотов С.А. Течение магмы по цилиндрическому каналу, питающему вулкан: математическая модель // Вулканология и сейсмология. 1996. № 6. С. 20–30.
- [50] Федотов С.А., Михайлова–Филиппова М.И. Непрерывное течение магмы с убывающим расходом по цилиндрическому каналу, питающему вулкан: условия длительного существования // Вулканология и сейсмология. 1997. № 1. С. 3–16.
- [51] Babeyko A.Y., Sobolev S.V., Trumbull R.B., Oncken O., Lavier L.L. Numerical models of crustal scale convection and partial melting beneath the Altiplano-Puna plateau // Earth Planet. Sci. Lett. 2002. V. 199. P. 373–388. [DOI: 10.1016/S0012-821X\(02\)00597-6](#)



## Dispersed media: scattering of sound waves, stratification in swirling flows and sedimentation processes

Urmancheev S.F.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

A brief review on three problems from the multiphase media mechanics area related to the study of the dynamic behavior of disperse systems under various conditions and methods of interaction with external fields or the environment is presented. The problems are an integral part of the scientific project «Hydrodynamic effects in multiphase and thermoviscous media under wave and thermal effects». The review is carried out in the context of the vector of development of modern research in the relevant areas. As a part of solving the problem of acoustic wave scattering by a set of spherical bubbles or drops, taking into account their sound permeability, the fast multipole method was developed to expand the possibilities of its application in the considered cases. On the basis of addition theorems for spherical wave functions, a new formula for the total scattering cross section for a set of interacting sound-permeable spheres arbitrarily located in space is obtained. An important aspect of the research was the estimation of the region in the parameter space of the problem, in which the effects of multiple scattering are significant. The second problem is related to mathematical modeling of a swirling turbulent flow containing particles of a dispersed phase. For numerical studies of temperature stratification in a vortex tube, an algorithm and a computer code were created using an orthogonalized finite-volume mesh with separation of the near-wall layer. A number of parametric studies have been carried out, in particular, the dependence of the temperature of the outgoing air in the cold diaphragm channel depending on the diameter of the diaphragm has been considered. In order to increase the efficiency of geological exploration in solving the third problem for describing the process of magmatic ore formation, a system of equations based on the methods of mechanics of multiphase media and thermohydrodynamics is proposed. The mathematical model provides for the heat exchange of the magmatic melt flow with the surrounding host rocks, as well as the release of heavy and light fractions from basaltic magma during its cooling. The results obtained in the course of the computational experiment indicate the possibility of a periodically inhomogeneous nature of the distribution of ore-forming fractions.

**Keywords:** acoustic scattering, system of sound-permeable spheres, temperature stratification, energy separation, cyclostrophic adaptation, igneous ore formation, differentiation

### References

- [1] Grinchenko V.T., Vovk I.V., Macytura V.T. [Osnovy akustiki] *Basics of acoustics*. Kiev: Naukova Dumka, 2009. 867 p. (in Russian).
- [2] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // *J. Acoust. Soc. Am.* 2002. V. 112, No. 6. P. 2688–2701.  
DOI: 10.1121/1.1517253
- [3] Gumerov N.A., Duraiswami R. *Fast Multipole Methods for the Helmholtz Equation in Three Dimensions*. Elsevier, 2004. 520 p.  
DOI: 10.1016/b978-0-08-044371-3.x5000-5
- [4] Nasibullaeva E.Sh. [Numerical simulation of acoustic scattering from coaxial sound-penetrable spheres]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2019. V. 14, No. 2. Pp. 115–124 (in Russian).  
DOI: 10.21662/mfs2019.2.016
- [5] Nasibullaeva E.Sh. [Numerical analysis of acoustic scattering from sound-permeable spheres under external influence]. *Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University)* [Vestnik UGATU]. 2021. V. 25, No. 2(92). Pp. 93–101 (in Russian).  
DOI: 10.54708/19926502\_2021\_2529293
- [6] Nasibullaeva E.Sh. [Simulation of acoustic scattering from a set of sound-permeable spheres in 3D space]. *Vychislitel'nye tekhnologii* [Computational technologies]. 2022. V. 27, No. 2. Pp. 19–36 (in Russian).  
DOI: 10.25743/ICT.2022.27.2.003

- [7] LAPACK – Linear Algebra PACKage. <https://netlib.sandia.gov/lapack/> (accessed: 24.10.2022).
- [8] Nasibullaeva E.Sh. [Simulation of acoustic scattering from coaxial spheres under external action]. Certificate of state registration of the computer program No. 2020618862 (publ.: 05.08.2020) (in Russian). eLIBRARY ID: 43889013
- [9] Nasibullaeva E.Sh. [Terms number determination at the series truncation for the numerical solution of the problem of acoustic scattering from a sound-permeable spheres set]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2020. V. 15, No. 3–4. Pp. 176–182 (in Russian). DOI: 10.21662/mfs2020.3.128
- [10] Antoine X., Chniti C., Ramdani K. On the numerical approximation of high-frequency acoustic multiple scattering problems by circular cylinders // *J. Comput. Phys.* 2008. V. 227, No. 3. Pp. 1754–1771. DOI: 10.1016/j.jcp.2007.09.030
- [11] Duda R.O., Martens W.L. Range dependence of the response of a spherical head model // *J. Acoust. Soc. Am.* 1998. V. 104, no 5. Pp. 3048–3058. DOI: 10.1121/1.423886
- [12] Nasibullaeva E.Sh. [Numerical analysis of acoustic scattering from a layer of sound-permeable spheres]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2021. V. 16, No. 2. Pp. 50–57 (in Russian). DOI: 10.21662/mfs2021.2.008
- [13] Nasibullaeva E.Sh. [Numerical analysis of multiple scattering of an acoustic wave on a set of sound-permeable spheres in 3d space] // *Vychislitel'naya mexanika sploshnyx sred* [Computational Continuum Mechanics]. 2022. V. 15, No. 4. Pp. 383–398 (in Russian). DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.4.29
- [14] Ranque G.J. Experiments on expansion a vortex with Simultaneous Exhaust of hot air and cold air // *Journal de Physique et Le Radium.* 1933. V. 4. P. 112s–114s (in French).
- [15] Hilsch R. The Use of the Expansion of Gases in a Centrifugal Field as Cooling Process // *Review of Scientific Instruments.* 1947. V. 18. P. 108–113. DOI: 10.1063/1.1740893
- [16] Merkulov A.P. Меркулов А.П. Vortex effect and its application in technology M.: Mashinostroenie, 1969. 182 p. (in Russian)
- [17] Gutsol A.F. The Ranque effect // *Physics-Uspexhi.* 1997. V. 40, No 6. Pp. 639–658. DOI: 10.1070/PU1997v040n06ABEH000248
- [18] Kalashnik M.V., Visheratin K.N. Cyclostrophic adjustment in swirling gas flows and the Ranque–Hilsch vortex tube effect // *J. Exp. Theor. Phys.* 2008. V. 106. Pp. 819–829. DOI: 10.1134/S1063776108040225
- [19] Usychenko V.G. The Ranque effect as a self-organization phenomenon // *Tech. Phys.* 2012. V. 57. Pp. 379–385 DOI: 10.1134/S1063784212030164
- [20] Leont'ev A.I. Temperature stratification of supersonic gas flow // *Physics. Doklady.* 1997. V. 42, No 6. Pp. 309–311. eLIBRARY ID: 25515403
- [21] Leont'ev A.I. Gas-dynamic method of energy separation of gas flows // *High Temperature.* 1997. V. 35, No 1. Pp. 155–157. eLIBRARY ID: 25515598
- [22] Leont'ev A.I. The method of temperature stratification of gas and a device for its implementation (Leont'ev's pipe). Patent Russian Federation No 2106581.
- [23] Leont'ev A.I. Gas-dynamic methods of temperature stratification (a review) // *Fluid Dynamics.* 2002. V. 37, No 4. Pp. 512–529. DOI: 10.1023/A:1020629000437
- [24] Burtsev S.A., Leontiev A.I. Study of the influence of dissipative effects on the temperature stratification in gas flows (Review) // *High Temp.* 2014. V. 52. Pp. 297–307. DOI: 10.1134/S0018151X13060060
- [25] Tsvetova E.V., Kovalnogov V.N., Khakhalev Yu.A. Modeling and research of the process of gas dynamic temperature s stratification to increase the efficiency of reducing natural gas // *Bulletin of Ulyanovsk University.* 2021. V. 10, No 2(54). Pp. 54–58. DOI: 10.46548/21vek-2021-1054-0010
- [26] Bashirova K.I., Mikhaylenko K.I. Three-dimensional simulation of a shock tube with OpenFOAM software *Vestnik Bashkirskogo Universiteta.* 2018. V. 23, No 3. Pp. 621–626. DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2018.3.8
- [27] Mikhaylenko C.I. A finite volume mesh with periodic boundary conditions for a vortex tube numerical simulation // *Многофазные системы.* 2021. Т. 16, № 2. С. 72–78. DOI: 10.21662/mfs2021.2.010
- [28] Mikhaylenko K.I. Investigation of computational meshes for modeling the air dynamics in a vortex tube channel by OpenFOAM software. *Computational Continuum Mechanics.* 2022. V. 15(1). Pp. 56–66. DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.1.5
- [29] Bashirova K.I. Simulation of the sedimentation of a swirling flow of a rarefied granular medium in a cylindrical region by MP-PIC method. *Multiphase Systems.* 2021. V. 16(3–4). Pp. 144–148 (in Russian). DOI: 10.21662/mfs2021.3.017
- [30] Gazizov R.K., Lukashuk S.Yu., Mikhaylenko C.I. Development of parallel algorithms for solving problems of continuum mechanics based on the domain decomposition method [Razrabotka parallel'nyx algoritmov resheniya zadach mexaniki sploshnoj sredy na osnove principa prostranstvennoj dekompozicii] // *Bulletin of UGATU.* 2003. V. 4, No 1. Pp. 100–107. (in Russian) eLIBRARY ID: 42340448
- [31] Marin D.F., Mikhaylenko C.I., Khaziev L.Kh. The direct numerical simulation of the Ranque effect [Pryamoe chislennoe modelirovanie effecta Ranka] // *Parallel numerical technology.* Moscow. 2011. Pp. 539–547. eLIBRARY ID: 22641213
- [32] Mikhaylenko C.I. Dependence of the temperature distribution in the vortex tube on the geometry of the swirler. *Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics.* 2017. V. 12(2). Pp. 174–179. DOI: 10.21662/uim2017.2.026
- [33] Mikhaylenko C.I. Vortex tube modelling: Outlet parameter dependencies of cold air production // *Journal of Physics: Conference Series.* 2019. Vol. 1158, Issue 3. 032032. DOI: 10.1088/1742-6596/1158/3/032032
- [34] Mikhaylenko K.I., Valeeva Yu.R. Highly Dispersed Medium Sedimentation from Air under Pressure Forces // *Numerical Methods and Programming (Vychislitel'nye Metody i Programirovanie).* 2013. V. 14. Pp. 328–333. eLIBRARY ID: 21014483
- [35] Radko V.A. Model of dynamic differentiation of intrusive traps in the northwest of the Siberian Platform [Model' dinamicheskoy differenciacii intruzivnyx trappov severo-zapada Sibirskoj platformy] // *Russian Geology and Geophysics.* 1991. No. 11. Pp. 19–27 (in Russian).
- [36] Radko V.A. The facies of intrusive and effusive magmatism in the Norilsk region. St. Petersburg: Cartographic factory of VSEGEI, 2016. 226 p.
- [37] Ilyasov A.M., Moiseev K.V., Urmanceev S.F. Numerical simulation of thermoconvection in a liquid for the case when viscosity is a quadratic function of temperature [Chislennoe modelirovanie termokonvekcii zhidkosti s kvadratichnoy zavisimost'yu vyzkostki ot temperatury] // *Siberian Journal of Industrial Mathematics* [Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki]. 2005. Vol. 8, No. 4(24). Pp. 51–59. eLIBRARY ID: 9484545



- [38] Kuleshov V. S., Moiseev K.V., Khizbullina S.F., Mikhaylenko K.I., Urmancheev S.F. The phenomena of convection anomalous thermoviscous fluid flow // *Mathematical modelling*. 2017. T. 29. № 5. C. 16–26.  
eLIBRARY ID: 29255015
- [39] Kuleshov V. S., Moiseev K.V., Urmancheev S.F. Periodic structures during convection of an anomalously thermoviscous liquid // *Bulletin of BashSU*. 2017. T. 22. № 2. C. 297–302.  
eLIBRARY ID: 29729319
- [40] Moiseev K.V., Khizbullina S.F., Bakhtizin R. N., Urmancheev S.F., Kuleshov V. S., Alferov A. V. Mathematical models of thermogravitational convection of an inhomogeneous fluid // *Oil and gas business*. 2017. T. 15. № 2. C. 165–170.  
eLIBRARY ID: 29931683
- [41] Kuleshov V.S., Moiseev K.V., Urmancheev S.F. Isolated convection modes for the anomalous thermoviscous liquid in a plane cell // *Fluid Dynamics*. 2019. Vol. 54, No. 7. C. 983–990.  
DOI: 10.1134/S0015462819070097
- [42] Kuleshov V. S., Moiseev K. V., Urmancheev S. F. Isolated Convection Modes for the Anomalous Thermoviscous Liquid in a Plane Cell // *Fluid Dynamics*. 2019. Vol. 54, P. 983–990.  
DOI: 10.1134/S0015462819070097
- [43] Kuleshov V. S., Moiseev K.V. Convection of a thermoviscous liquid in a cell heated from the side // *Multiphase systems*. 2019. V. 14, No 1. Pp. 67–72.  
DOI: 10.21662/mfs2019.1.010
- [44] Moiseev K. V., Kuleshov V. S., Bakhtizin R. N. Free convective of a linear heterogeneous liquid in a square cavity at side heating // *SOCAR Proceedings*. 2020. №.4, P. 108–116.  
DOI: 10.5510/OGP20200400472
- [45] Titov V.V., Fedotov S.A. Mathematical modeling of the ascent of viscous magma along a vertical dike [Matematicheskoe modelirovanie pod'yoma vyazkoj magmy po vertikal'noj dajke]. Preprint IAE-3470/16. Moscow: IAE, 1981. 24 p.
- [46] Kaddiri M., Naimi M., Raji A., Hasnaoui M. Thermal convection within a square cavity filled with non-newtonian power-law fluids and differentially heated with uniform heat fluxes // *International Scientific Journal for Alternative Energy and Ecology*. 2010. No. 8(88). P. 57–69.  
eLIBRARY ID: 15632654
- [47] Mikhailova-Filippova M.I., Fedotov S.A. Heat transfer of a magma flow with the walls of a fissure-dyke: a mathematical model and calculation algorithm [Teploobmen potoka magmy so stenkami treshchiny-dayki: matematicheskaya model' i algoritm rascheta] // *Journal of Volcanology and Seismology*. 1994. No. 6. Pp. 17–23 (in Russian).
- [48] Fedotov S.A., Mikhailova-Filippova M.I. Magma flow in dikes of different thickness (based on data of mathematical modeling with temperature-dependent viscosity) [Techenie magmy v dajkax raznoj moshchnosti (po dannym matematicheskogo modelirovaniya pri vyazkosti, zavisyashchej ot temperatury)] // *Journal of Volcanology and Seismology*. 1994. No. 6. Pp. 24–43 (in Russian).
- [49] Mikhailova-Filippova M.I., Fedotov S.A. Magma flow through a cylindrical channel feeding a volcano: a mathematical model [Techenie magmy po tsilindricheskomu kanalu, pitayushchemu vulkan: matematicheskaya model'] // *Journal of Volcanology and Seismology*. 1996. No. 6. Pp. 20–30 (in Russian).
- [50] Fedotov S.A., Mikhailova-Filippova M.I. Continuous flow of magma with decreasing flow through a cylindrical channel that feeds a volcano: conditions for long-term existence [Nepriyemnoe techenie magmy s ubyvyayushchim rashodom po tsilindricheskomu kanalu, pitayushchemu vulkan: usloviya dlitel'nogo sushchestvovaniya] // *Journal of Volcanology and Seismology*. 1997. No. 1. Pp. 3–16 (in Russian).
- [51] Babeyko A.Y., Sobolev S.V., Trumbull R.B., Oncken O., Lavier L.L. Numerical models of crustal scale convection and partial melting beneath the Altiplano-Puna plateau // *Earth Planet. Sci. Lett*. 2002. V. 199. P. 373–388.  
DOI: 10.1016/S0012-821X(02)00597-6