

ISSN: 2658–5782

Номер 3–4

2022

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org





Исследование спектральных характеристик течения термовязкой жидкости в кольцевом канале¹

Низамова А.Д.* , Киреев В.Н.** , Урманчиев С.Ф.*

*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

**Башкирский государственный университет, Уфа

В работе рассмотрено течение термовязкой модельной жидкости в кольцевом канале с заданным температурным полем. Задача об устойчивости течения термовязкой жидкости решается на основе обобщенного уравнения спектральным методом разложения по полиномам Чебышева первого рода. Исследуется влияние учета экспоненциальной зависимости вязкости жидкости от температуры и геометрии канала на спектральные характеристики уравнения гидродинамической устойчивости течения несжимаемой жидкости в плоском канале при различных значениях температуры стенок. Построены спектральные картины собственных значений обобщенного уравнения. Спектральные характеристики определяют структуру собственных функций и критические параметры течения термовязкой жидкости, при этом собственные функции демонстрируют поведение возмущений поперечной скорости, их возможный рост или затухание с течением времени. Показано, что структура спектров в значительной степени зависит как от свойств жидкости, определяемых показателем функциональной зависимости вязкости, так и от геометрии канала. Установлено, что при малых значениях параметра термовязкости спектр сопоставим спектру для изотермического течения жидкости в плоском канале, однако при его увеличении число собственных значений и их плотность возрастают, то есть существует большее количество точек, при которых задача имеет ненулевые амплитуды возмущений поперечной скорости. Устойчивость течения термовязкой жидкости зависит от наличия собственного значения с положительной мнимой частью среди всего множества найденных собственных значений при фиксированных параметрах числа Рейнольдса и волнового числа. Показано, что при фиксированных значениях числа Рейнольдса и волнового числа с ростом параметра термовязкости течение может стать неустойчивым.

Ключевые слова: термовязкая жидкость, гидродинамическая устойчивость, спектр собственных значений, кольцевой канал

1. Введение

В настоящее время накоплен достаточный задел в исследовании устойчивости течений жидкости в плоских каналах, однако при изучении этой задачи часто пренебрегают воздействием температурного фактора на смену режима течений [1–5]. Течения вязких жидкостей возникают в ряде отраслей промышленности при эксплуатации различ-

ных технических установок и устройств, а также при реализации ряда технологических процессов. В таких случаях существенной является проблема выявления особенностей такого течения при различных режимах. С точки зрения энергетической эффективности важен ламинарный режим, с другой стороны, при учете эффективности тепломассообмена — турбулентный. Вязкость жидкости является важным параметром, который определяет закономерности течения.

В плоском канале теория гидродинамической устойчивости хорошо исследована, в том числе и для термовязких жидкостей [6–8]. Известно также, что в соответствии с линейной теорией в ци-

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00915).

линдрическом канале течение всегда устойчиво, что противоречит экспериментальным наблюдениям. В технических устройствах используются и теплоизолированные поверхности, поэтому изменение коэффициента теплоотдачи является предметом исследования с точки зрения его влияния на устойчивость течения. В целом ряде теплообменных устройств используется схема, когда внутри трубы устанавливается трубка небольшого диаметра, содержащая нагревательный элемент. Исследование влияния геометрии канала на устойчивость течения жидкости является одной из задач в настоящей работе.

2. Постановка задачи

Рассмотрим течение несжимаемой жидкости в кольцевом канале с заданными внешним и внутренним радиусами и температурным полем под действием перепада давления.

Задача гидродинамической устойчивости течения термовязкой жидкости в плоскопараллельном канале с неоднородным температурным полем сводится к обобщенному уравнению Орра–Зоммерфельда [6–8].

Изменение продольной компоненты скорости по длине канала z рассчитывается следующим образом:

$$v_r = \varphi(r)e^{ik(z-ct)},$$

где $\varphi(r)$ — амплитуда возмущения поперечной скорости; i — мнимая единица; k — проекция волнового вектора на ось канала (волновое число); $c = w/k$ — фазовая скорость волны вдоль оси канала (собственное значение), $c = c_r + ic_i$; w — частота; t — время.

Аналогичными к задаче о гидродинамической устойчивости термовязкой жидкости в плоском канале преобразованиями получим обобщенное уравнение об устойчивости течения жидкости в

кольцевом канале для радиальной координаты r :

$$\begin{aligned} & \frac{i\mu}{k\text{Re}} \left(\varphi^{IV} + \frac{2}{r}\varphi''' + \left(-\frac{3}{r^2} - 2s^2 \right) \varphi'' + \right. \\ & + \left. \left(\frac{3}{r^4} - 2s^2 \right) \varphi' + \left(-\frac{3}{r^4} + 2 \left(\frac{s}{r} \right)^2 + s^4 \right) \varphi \right) + \\ & + u_0 \left(\varphi'' + \frac{\varphi'}{r} - \left(\frac{1}{r^2} + s^2 \right) \varphi \right) - \\ & - \left(u_0'' - \frac{u_0'}{r} \right) \varphi - \frac{i}{k\text{Re}} \times \\ & \times \left(\mu' \left(2\varphi''' + 3\frac{\varphi''}{r} - \varphi' \left(\frac{3}{r^2} + 2s^2 \right) + \left(\frac{3}{r^3} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \left(\frac{s}{r} \right)^2 \right) \varphi + \mu'' \left(\varphi'' + \frac{\varphi'}{r} - \frac{\varphi}{r^2} - s^2\varphi \right) \right) \right) + \\ & + c \left(\varphi'' + \frac{\varphi'}{r} - \frac{\varphi}{r^2} - s^2\varphi \right) = 0 \end{aligned}$$

со следующими граничными условиями:

$$\varphi(r_1) = \varphi(r_2) = 0, \quad \varphi'(r_1) = \varphi'(r_2) = 0,$$

где $s = \frac{r_2}{r_1}$ — отношение радиусов канала (внешнего r_2 к внутреннему r_1); $\mu = \mu(r) = \left(\frac{k-1}{2}r \right)^{-\beta}$ — вязкость; Re — число Рейнольдса;

$$u_0 = u_0(r) = \frac{\eta_M^2 \left((fr)^\beta - 1 \right) - \beta \left((fr)^{\beta+2} - 1 \right)}{\eta_M^2 \left(\eta_M^\beta - 1 \right) - \beta \left(\eta_M^{\beta+2} - 1 \right)}$$

— профиль скорости в невозмущенном состоянии; $\eta_M^2 = \frac{\beta}{(\beta+2)(k^{\beta+2}-1)(k^\beta-1)}$; $f = \frac{k-1}{2}$; $\beta = \frac{\alpha}{\ln s + \frac{1}{\text{Nu}}}$; Nu — число Нуссельта; α — ко-

эффициент термовязкости или коэффициент крутизны вискограммы — это множитель в показателе экспоненты, характеризующий степень зависимости вязкости от температуры. Величина $\ln s + \frac{1}{\text{Nu}}$ появляется в точном решении уравнения теплопроводности с учетом граничных условий теплообмена в безразмерном виде.

При решении задачи в уравнениях и формулах параметры представлены в безразмерном виде.

Следует отметить, что вывод представленного выше уравнения осуществлялся при задании возмущений только на давление и компоненты вектора скорости.

Для решения задачи об устойчивости течения жидкости необходимо найти все собственные значения c , которым соответствуют нетривиальные собственные функции $\varphi(y)$. Тогда критерием неустойчивости, очевидно, будет условие $c_i > 0$:

если существует хотя бы одно собственное значение с положительной мнимой частью, то течение является неустойчивым при заданных числе Рейнольдса и волновом числе. Если же все собственные значения имеют неположительную мнимую часть, то течение устойчиво при заданных параметрах.

Условие $c_i = 0$ дает нейтральную кривую, на которой возмущения не растут и не затухают. Минимальное значение числа Рейнольдса на нейтральной кривой называется критическим числом Рейнольдса Re_{cr} .

Согласно теории [5] рассматривается устойчивость течений жидкостей относительно возмущений поперечной скорости, так как они являются самыми «опасными» для турбулизации течения.

3. Результаты численного исследования

Численное исследование выполнялось с использованием спектрального метода разложения по полиномам Чебышева первого рода [6].

Спектральные картины собственных значений течения жидкостей с температурной зависимостью вязкости при фиксированных параметрах числа Рейнольдса $Re = 10^4$ и волновом числе $k = 1$ и параметром термовязкости равным 0,001 представлены на рис. 1. Такие картины принято называть «спектральным галстуком». Анализ полученных результатов показывает, что при малых значениях параметра термовязкости спектр сопоставим спектру для изотермического течения жидкости. Однако при его увеличении количество собственных значений и их плотность возрастают, то есть существует большее количество точек, при которых задача имеет нетривиальное решение. Также стоит отметить, что при заданных числах Re и k для малого соотношения радиусов каналов течение является неустойчивым (рис. 1(а)), однако с увеличением соотношения s течение приобретает устойчивость (рис. 1(б),(в)).

Спектры собственных значений течения жидкости с параметром термовязкости равным 1 для нескольких значений s представлены на рис. 2. По полученным результатам можно сделать вывод о том, что при выполненных предположениях спектр собственных значений для малых параметров s (рис. 2(а)) качественно соответствует спектру собственных значений изотермического течения жидкости. Собственные значения стремятся к оси вещественных частей, группируясь в вертикальную ветвь, а при приближении к нулевым мнимым частям — делятся на отдельные ветви. С увеличением значений параметра s спектр претерпевает значительные изменения: вертикаль-

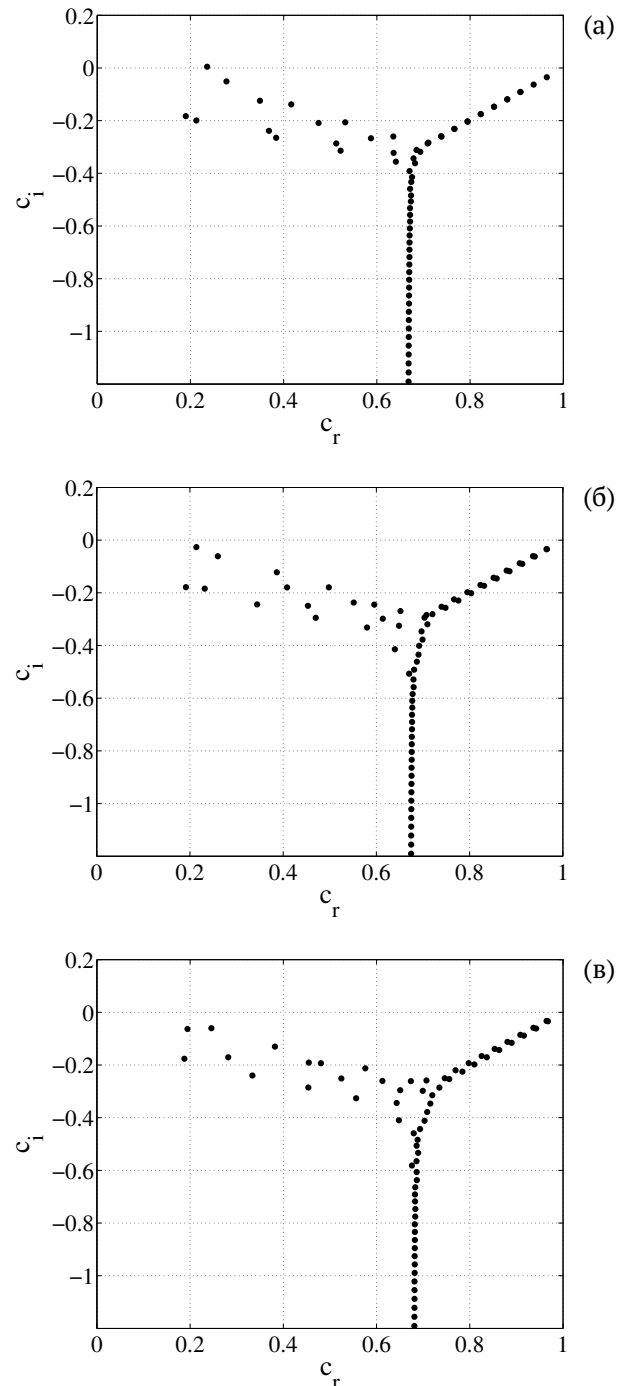


Рис. 1. Спектры собственных значений $Re = 10^4$, $k = 1$, $\alpha = 0.001$: а) $s = 1.001$; б) $s = 2$; в) $s = 8$

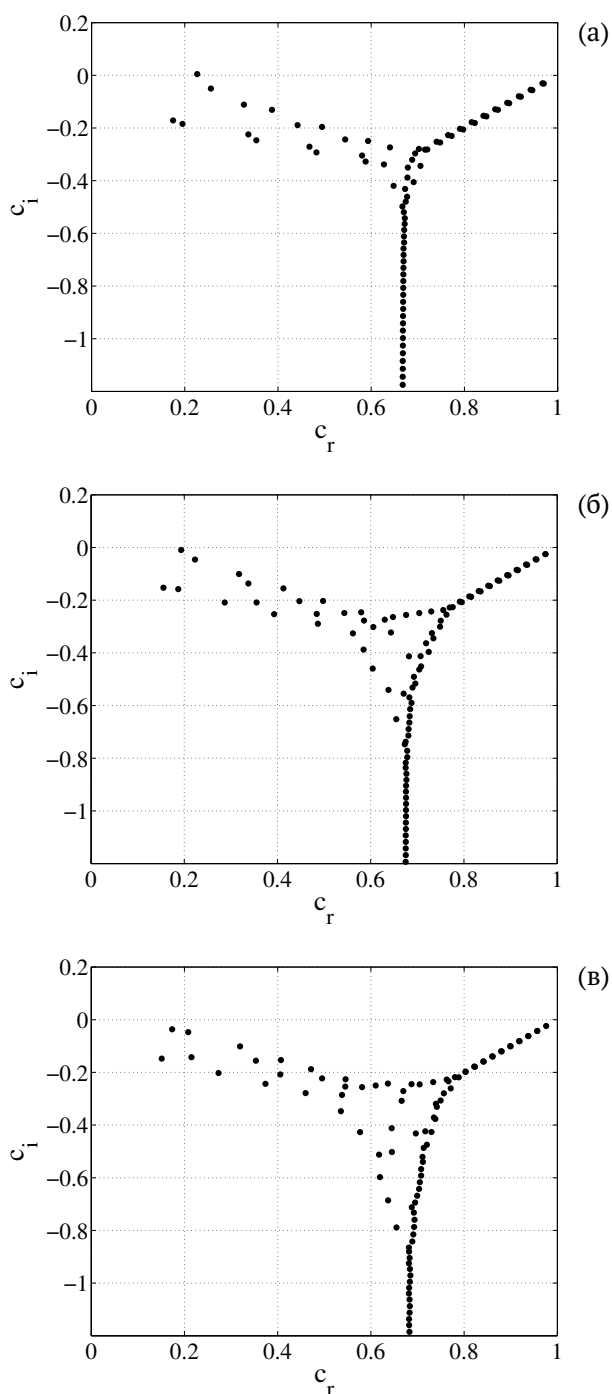


Рис. 2. Спектры собственных значений $Re = 10^4$, $k = 1$, $\alpha = 1$: а) $s = 1.001$; б) $s = 2$; в) $s = 8$

ная ветвь начинает делиться на несколько отдельных ветвей (рис. 2(б),(в)). Стоит отметить, что существует собственное значение с мнимой частью большей нуля (рис. 2(а)), а это соответству-

ет неустойчивости течения при фиксированных параметрах волнового числа и числа Рейнольдса. Аналогично результату выше стоит отметить, что с увеличением параметра s течение приобретает устойчивость (рис. 2(б),(в)).

4. Заключение

Установлено, что учет зависимости вязкости от температуры значительно влияет на выводы относительно гидродинамической устойчивости, что, безусловно, важно при анализе режимов течения в каналах теплообменников. При одних и тех же значениях числа Рейнольдса и волнового числа, описывающих устойчивые режимы течения, увеличение параметра термовязкости может привести к возникновению неустойчивых режимов. Следует отметить, что при этом происходит и качественное изменение структуры спектров собственных значений. Спектральные характеристики течения являются важной частью при анализе режимов течения жидкостей.

Список литературы

- [1] Petukhov B.S. Heat transfer and friction in turbulent pipe flow with variable physical properties // *Advances in Heat Transfer*. 1970. V. 6. Pp. 503–564.
DOI: [10.1016/S0065-2717\(08\)70153-9](https://doi.org/10.1016/S0065-2717(08)70153-9)
- [2] Orszag S.A. Accurate solution of the Orr–Sommerfeld equation // *J. of Fluid Mech.* 1971. V. 50. Pp. 689–703.
DOI: [10.1017/S0022112071002842](https://doi.org/10.1017/S0022112071002842)
- [3] Шкаликов А.А. Спектральные портреты оператора Орра–Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса // Труды международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям – сателлита Международного конгресса математиков ICM-2002 (Москва, МАИ, 11–17 августа 2002). Часть 3. СМФН. 2003. Т. 3. С. 89–112.
MathNet: [cmf17](https://mathnet.ru/cmf17)
- [4] Скороходов С.Л. Численный анализ спектра задачи Орра–Зоммерфельда // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2007. Т. 47, № 10. С. 1672–1691.
MathNet: [zvmmf229](https://mathnet.ru/zvmmf229)
- [5] Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука. 1977. 421 с.
- [6] Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчеев С.Ф. Влияние зависимости вязкости от температуры на спектральные характеристики уравнения устойчивости течения термовязких жидкостей // *Многофазные системы*. 2019. Т. 14, № 1. С. 52–58.
DOI: [10.21662/mfs2019.1.007](https://doi.org/10.21662/mfs2019.1.007)
- [7] Киреев В.Н., Низамова А.Д., Урманчеев С.Ф. Некоторые особенности гидродинамической неустойчивости течения термовязкой жидкости в плоском канале // *Прикладная математика и механика*. 2019. Т. 83, № 3. С. 454–459.
DOI: [10.1134/S003282351903007X](https://doi.org/10.1134/S003282351903007X)
- [8] Nizamova A.D., Murtazina R.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Features of Laminar-Turbulent Transition for the Coolant Flow in a Plane Heat-Exchanger Channel // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021. Vol. 42, No. 9. Pp. 2211–2215.
DOI: [10.1134/S1995080221090249](https://doi.org/10.1134/S1995080221090249)



Investigation of the spectral characteristics of a thermoviscous fluid flow in an annular channel

Nizamova A.D.*, Kireev V.N.***, Urmancheev S.F.*

*Mavlyutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa, Russia

**Bashkir State University, Ufa, Russia

The flow of a thermoviscous model fluid in an annular channel with a given temperature field is considered. The problem of the stability of the flow of a thermoviscous fluid is solved on the basis of the generalized equation by the spectral method of expansion in Chebyshev polynomials of the first kind. The effect of taking into account the exponential dependence of the fluid viscosity on temperature and channel geometry on the spectral characteristics of the equation of hydrodynamic stability of an incompressible fluid flow in a flat channel for various wall temperatures is studied. Spectral patterns of eigenvalues of the generalized equation are constructed. The spectral characteristics determine the structure of the eigenfunctions and the critical parameters of the flow of a thermoviscous fluid. In this case, the eigenfunctions demonstrate the behavior of transverse velocity perturbations, their possible growth or decay with time. It is shown that the structure of the spectra largely depends both on the properties of the liquid, determined by the index of the functional dependence of viscosity, and on the geometry of the channel. It has been established that for small values of the thermoviscosity parameter, the spectrum is comparable to the spectrum for an isothermal fluid flow in a flat channel, however, as it increases, the number of eigenvalues and their density increase, that is, there are more points at which the problem has nonzero amplitudes of transverse velocity perturbations. The stability of a thermoviscous fluid flow depends on the presence of an eigenvalue with a positive imaginary part among the entire set of found eigenvalues for fixed parameters of the Reynolds number and wave number. It is shown that, at fixed values of the Reynolds number and wave number, the flow can become unstable with an increase in the thermoviscosity parameter.

Keywords: thermoviscous liquid, hydrodynamics instability, spectra of eigenvalues, annular channel

References

- [1] Petukhov B.S. Heat transfer and friction in turbulent pipe flow with variable physical properties // *Advances in Heat Transfer*. 1970. V. 6. Pp. 503–564.
DOI: [10.1016/S0065-2717\(08\)70153-9](https://doi.org/10.1016/S0065-2717(08)70153-9)
- [2] Orszag S.A. Accurate solution of the Orr–Sommerfeld equation // *J. of Fluid Mech.* 1971. V. 50. Pp. 689–703.
DOI: [10.1017/S0022112071002842](https://doi.org/10.1017/S0022112071002842)
- [3] Shkalikov A.A. Spectral portraits of the Orr–Sommerfeld operator for large Reynolds numbers // *Journal of Mathematical Sciences*. 2004. Vol. 124(6). Pp. 5417–5441.
DOI: [10.1023/B:JOTH.0000047362.09147.c7](https://doi.org/10.1023/B:JOTH.0000047362.09147.c7)
- [4] Skorohodov S.L. Numerical analysis of the spectrum of the Orr–Sommerfeld problem // *Computational mathematics and mathematical physics*. 2007. Vol. 47. Issue 10. Pp. 1603–1621.
DOI: [10.1134/S096554250710003X](https://doi.org/10.1134/S096554250710003X)
- [5] Gol'dshtik M.A., Shtern V.N. [Hydrodynamic stability and turbulence] Novosibirsk: Nauka. 1977. 421 p. (in Russian)
- [6] Nizamova A.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Influence of viscosity temperature dependence on the spectral characteristics of the thermoviscous liquids flow stability equation // *Multiphase systems*. 2019. Vol. 14, No. 1. Pp. 52–58.
DOI: [10.21662/mfs2019.1.007](https://doi.org/10.21662/mfs2019.1.007)
- [7] Kireev V.N., Nizamova A.D., Urmancheev S.F. [Some features of the hydrodynamic instability of the flow of a thermally viscous fluid in a flat channel] *Prikladnaya mexanika i matematika*. 2019. Vol. 83, No. 3. Pp. 454–459 (in Russian).
DOI: [10.1134/S003282351903007X](https://doi.org/10.1134/S003282351903007X)
- [8] Nizamova A.D., Murtazina R.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Features of Laminar-Turbulent Transition for the Coolant Flow in a Plane Heat-Exchanger Channel // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021. Vol. 42, No. 9. Pp. 2211–2215.
DOI: [10.1134/S1995080221090249](https://doi.org/10.1134/S1995080221090249)