

ISSN: 2658–5782

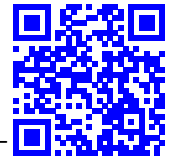
Номер 2

2023

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org





Задачи группового анализа. Законы сохранения

Хабиров С.В.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Дифференциальные уравнения механики получены из законов сохранения массы, импульса и энергии. Другие законы сохранения можно получить с помощью симметрий этих уравнений. Любой закон сохранения может быть получен из одного с помощью канонических операторов, частными случаями которых являются операторы симметрий. Вычисление канонических операторов закона сохранения равносильно прямому методу отыскания дивергентного вида уравнений справедливых в силу уравнений механики. На примере одномерных уравнений газовой динамики получены все законы сохранения нулевого порядка прямым методом. Для специальных уравнений состояния получено бесконечное множество законов сохранения, многие из которых являются новыми.

Ключевые слова: законы сохранения, газовая динамика, уравнение состояния, условия совместности

1. Введение

Уравнения механики сплошной среды допускают достаточно широкую группу преобразований. Множество решений изучают с помощью допускаемой группы. В работе [1] поставлены основные задачи группового анализа, для которых известны алгоритмы решений. На примере уравнений одномерной газовой динамики решен ряд основных задач в качестве описания работы алгоритмов. Сформулированы другие задачи группового анализа. В настоящей работе рассмотрены алгоритмы получения законов сохранения [2] и на примере уравнений одномерной газовой динамики получены все законы сохранения. Законы сохранения используют в прикладных задачах, например, для нахождения выражений из физических величин, не изменяющихся со временем, для определения обобщенных решений с сильными разрывами, для организации консервативных разностных схем при численном решении краевых задач.

Пусть S система дифференциальных уравнений для функций $\vec{u} = (u^1, \dots, u^m)$ от независимых переменных $\vec{y} = (t, x^1, \dots, x^n)$. Продолженная система \tilde{S} задается уравнениями S вместе с ее дифференциальными следствиями.

Законом сохранения системы S называют соотношение

$$\vec{D} \cdot \vec{A} = 0, \quad (1)$$

которое выполняется в силу \tilde{S} . Здесь $\vec{D} = (D_t, D_1, \dots, D_n)$ — операторы полного дифференцирования по переменным t, x^1, \dots, x^n ; $\vec{A} = (A^0, A^1, \dots, A^n)$ — вектор закона сохранения, зависящий от t, \vec{x}, \vec{u} и производных. Порядок закона сохранения — порядок старшей производной в векторе \vec{A} . Вектор \vec{A} определен с точностью до слагаемого, для которого (1) выполнено без перехода на многообразие \tilde{S} (тривиальный закон).

Канонический оператор

$$X = \vec{\eta}(\vec{y}, \vec{u}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k) \partial_{\vec{u}} + \dots$$

для вектора закона сохранения \vec{A} определяется условием инвариантности

$$\left(X \vec{D} \cdot \vec{A} \right) \Big|_{\tilde{S}} = 0.$$

Здесь \vec{u}_k — производные порядка k .

Показано, что действие канонического оператора симметрии системы S на любой ее вектор дает вектор закона сохранения [3]. Канонический оператор коммутирует с операторами полного дифференцирования [3]:

$$0 = \left(X \vec{D} \cdot \vec{A} \right) \Big|_{\tilde{S}} = \left(\vec{D} \cdot X \vec{A} \right) \Big|_{\tilde{S}}.$$

Значит $X\vec{A}$ — вектор закона сохранения для любого канонического оператора вектора \vec{A} закона сохранения.

Пусть \vec{A} — вектор закона сохранения системы S нулевого порядка с условием $\text{rank} \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{u}} = n + 1$. Для любого вектора \vec{B} закона сохранения системы S найдется канонический оператор X для вектора \vec{A} такой, что $X\vec{A} = \vec{B}$. Для этого надо решить линейную систему для координат $\vec{\eta}$ с матрицей Якоби $\frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{u}}$ [4].

2. Законы сохранения одномерной газовой динамики

Уравнения газовой динамики выводятся из законов сохранения массы, импульса и энергии элементарного объема. В дивергентном виде в одномерном случае уравнения таковы [5]:

$$\begin{aligned} \rho_t + (u\rho)_x &= 0 \Rightarrow \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \\ (\rho u)_t + (u^2\rho + p)_x &= 0 \Rightarrow u_t + uu_x + \rho^{-1}p_x = 0, \\ \left(\rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho u^2\right)_t + \left(u\rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho u^3 + pu\right)_x &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \varepsilon_t + u\varepsilon_x + p\rho^{-1}u_x &= 0, \end{aligned}$$

где ρ — плотность; u — скорость частицы; p — давление; ε — удельная внутренняя энергия. Замыкает систему уравнение состояния $\varepsilon = \varepsilon(\rho, S)$, которое записывают в виде $p = \rho^2\varepsilon_\rho = f(\rho, S)$ или $a^2(\rho, p) = f_\rho(\rho, S)$ для нормального газа. Здесь S — энтропия, которая удовлетворяет уравнению [5]

$$(\rho S)_t + (u\rho S)_x = 0 \Rightarrow S_t + uS_x = 0.$$

Любой закон сохранения записывают в виде

$$D_t\eta + D_x(u\eta + B) = 0,$$

где η — плотность, B — поток. Это равенство должно выполняться в силу уравнений системы. Отыскание η и B из этого равенства — прямой метод нахождения законов сохранения.

Уравнения газовой динамики возьмем в виде уравнений для $\vec{u} = (\rho, u, S)$. Канонический оператор имеет вид:

$$\begin{aligned} X &= \eta^\rho \partial_\rho + \eta^u \partial_u + \eta^S \partial_S + D_t \eta^\rho \partial_{\rho_t} + D_x \eta^\rho \partial_{\rho_x} + \\ &+ D_t \eta^u \partial_{u_t} + D_x \eta^u \partial_{u_x} + D_t \eta^S \partial_{S_t} + D_x \eta^S \partial_{S_x}, \end{aligned}$$

где координаты зависят от t, x, \vec{u}, \vec{u}_x .

Возьмем закон сохранения для энтропии и подействуем на него оператором X в силу уравнений

газовой динамики:

$$\begin{aligned} 0 &= X(D_t(\rho S) + D_x(\rho S u)) = \\ &= X(\rho_t S + \rho S_t + \rho S u_x + \rho u S_x + u S \rho_x) = \\ &= S(D_t \eta^\rho + u D_x \eta^\rho + u_x \eta^\rho) + \rho S D_x \eta^u + \\ &+ (\rho S_x + \rho_x S) \eta^u + \rho(D_t \eta^S + u D_x \eta^S) = \\ &= D_t \eta + D_x(u\eta + B), \\ \eta &= S \eta^\rho + \rho \eta^S, \quad B = \rho S \eta^u. \end{aligned} \quad (2)$$

Это уравнение для нахождения канонических операторов закона сохранения для энтропии. Оно имеет дивергентный вид и является уравнением для нахождения плотности η и потока B . Таким образом, нахождение канонических операторов равносильно прямому методу нахождения законов сохранения. Далее найдем законы сохранения нулевого порядка прямым методом. В уравнении (2) произведем дифференцирование в силу уравнений газовой динамики. Переменные u_x, ρ_x, S_x свободные, так как η и B не зависят от производных. Приравнявая нулю коэффициенты при свободных переменных, получим переопределенную систему уравнений:

$$\begin{aligned} B_u &= \rho \eta_\rho - \eta, \quad \rho B_\rho = f_\rho \eta_u, \quad \rho B_S = f_S \eta_u, \\ \eta_t + B_x + u \eta_x &= 0. \end{aligned}$$

Из условий совместности первых трех уравнений следует:

$$\begin{aligned} B &= B(p, u, t, x), \quad p = f(\rho, S), \\ \eta &= \rho h(p, u, t, x) + \tilde{\eta}(p, \rho, t, x), \quad B_p = h_u, \\ B_u &= (\rho h_p + \tilde{\eta}_p) \rho f_\rho + \rho \tilde{\eta}_\rho - \tilde{\eta}, \\ B_x &= -\rho(h_t + u h_x) - \tilde{\eta}_t - u \tilde{\eta}_x. \end{aligned} \quad (3)$$

Отсюда получим $B_{uu} = \rho a^2 B_{pp}$. Если $(\rho^2 a^2)_\rho \neq 0$, то

$$\begin{aligned} B_{uu} &= B_{pp} = 0, \quad B = b_{11} p u + b_{10} u + b_{01} p + b_{00}, \\ h &= \frac{1}{2} b_{11} u^2 + b_{01} u + h_1(p, t, x), \quad b_{ij}(t, x), \\ b_{11} p + b_{10} &= \rho^2 a^2 h_{1p} + \rho a^2 \tilde{\eta}_p + \rho \tilde{\eta}_\rho - \tilde{\eta}, \\ b_{11x} u p + b_{10x} u + b_{01x} p + b_{00x} &= \\ &= -\rho \left(\frac{1}{2} b_{ut} u^2 + b_{01t} u + h_{1t} \right) - \\ -\rho u \left(\frac{1}{2} b_{11x} u^2 + b_{01x} u + h_{1x} \right) - \tilde{\eta}_t - u \tilde{\eta}_x &\Rightarrow \\ \Rightarrow b_{11x} &= 0, \quad b_{11t} + 2b_{01x} = 0, \\ b_{10x} + \rho b_{01t} + \rho h_{1x} + \tilde{\eta}_x &= 0, \\ p b_{01x} + b_{00x} + \rho h_{1t} + \tilde{\eta}_t &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Интегрированием получим:

$$\begin{aligned} b_{11}(t), \quad b_{01} &= -\frac{1}{2}b'_{11}x + \tilde{b}_{01}(t), \\ (\rho h_1 + \tilde{\eta})_t &= \frac{1}{2}b'_{11}p - b_{00x}, \\ (\rho h_1 + \tilde{\eta})_x &= \rho \left(\frac{1}{2}b''_{11}x - b'_{01} \right) - \\ &\quad - b_{10x} \Rightarrow b''_{11} = 0, \quad \tilde{b}'_{01} = 0, \\ b_{00xx} &= b_{10tx} \Rightarrow b_{11} = C_2t^2 + C_1t + C_0, \\ \tilde{b}_{01} &= D_1t + D_0, \quad b_{00} = \varphi_t, \quad b_{10} = \varphi_x - \tilde{b}(t), \\ \tilde{\eta} + \rho h_1 &= v(\rho, p) - \varphi_x + \frac{1}{2}pt(C_2t + C_1) + \\ &\quad + \rho x \left(\frac{1}{2}C_2x - D_1 \right). \end{aligned}$$

Уравнение (4) принимает вид:

$$p \left(C_2t^2 + C_1t + C_0 \right) - \tilde{b} = \rho a^2 v_p + \rho v_p - v + \frac{1}{2}t(C_2t + C_1)(\rho a^2 - p) \Rightarrow \tilde{b} = A_2t^2 + A_1t + A_0.$$

Расщепляя по t , получим

$$\begin{aligned} (\rho a^2 - 3p)(C_2t + C_1) + 2(A_2t + A_1) &= 0, \\ \rho a^2 v_p + \rho v_p &= v + pC_0 - A_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow v &= C_0\rho\varepsilon + A_0 + \rho g(S), \\ B &= up(C_0 + t(C_2t + C_1)) + \\ &+ u(\varphi_x - A_2t^2 - A_1t - A_0) + \\ &+ p(D_1t + D_0 - x(C_2t + \frac{1}{2}C_1)) + \varphi_t, \\ \eta &= \frac{1}{2}\rho u^2(C_2t^2 + C_1t + C_0) + \\ &+ \rho u \left(-\frac{1}{2}x(2C_2t + C_1) + D_1 + D_0 \right) + \\ &+ C_0\rho\varepsilon + A_0 + \rho g(S) - \varphi_x + \frac{1}{2}pt(C_2t + C_1) + \\ &+ \rho x \left(\frac{1}{2}C_2x - D_1 \right). \end{aligned} \tag{5}$$

Величинам $A_0, \varphi(t, x)$ соответствуют тривиальные законы сохранения. Если $(\rho a^2 - 3p)_\rho \neq 0$, то $C_1 = C_2 = A_1 = A_2 = 0$. Оставшиеся произвольные величины задают закон сохранения энергии (C_0); закон сохранения центра масс $\eta = \rho(tu - x)$, $B = tp(D_1)$; закон сохранения импульса (D_0); закон сохранения массы ($g' = 0$); закон сохранения энтропии ($g(S)$).

Пусть $\rho f_\rho - 3p = -3n$ — постоянная $\Rightarrow p = f(\rho, S) = n + g(S)\rho^3$. Такое уравнение состояния соответствует одноатомному газу в одномерном случае [5]. Из (5) следует $A_2 = \frac{3}{2}C_2n$,

$A_1 = \frac{3}{2}C_1n$. Постоянным C_2 и C_1 соответствуют по формулам (6) дополнительные законы сохранения:

$$\begin{aligned} \eta &= \rho u \left(\frac{1}{2}ut^2 - xt \right) + \frac{1}{2}(pt^2 + \rho x^2), \\ B &= up t^2 - \frac{3}{2}nut^2 - ptx(C_2), \\ \eta &= \frac{1}{2}\rho u(ut - x) + \frac{1}{2}pt, \\ B &= up t + \frac{3}{2}nut - \frac{1}{2}px(C_1). \end{aligned}$$

Эти формулы уточняют результат из работы [4].

3. Законы сохранения для специального газа

Пусть $\rho^2 a^2 = \theta(p) \Rightarrow F(p) = \int \theta^{-1} dp = g(S) - \rho^{-1}$. Если справедливы неравенства $F > 0, F' > 0, F'' < 0$, то выполняются условия нормального газа [5].

Уравнения (3) принимают вид:

$$\begin{aligned} B_p &= h_u, \quad B_u - \theta(p)h_p = \rho^{-1}\theta(p)\tilde{\eta}_p + \rho\tilde{\eta}_p - \tilde{\eta}, \\ B_x &= -\rho(h_t + uh_x) - \tilde{\eta}_t - u\tilde{\eta}_x. \end{aligned} \tag{7}$$

Дифференцируем последнее уравнение по ρ дважды:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{\rho\rho t} + u\tilde{\eta}_{\rho\rho x} &= 0 \Rightarrow \tilde{\eta}_{\rho\rho t} = \tilde{\eta}_{\rho\rho x} = 0 \Rightarrow \\ \tilde{\eta} &= \mu(\rho, p) + \rho\mu_1(p, t, x) + \mu_0(p, t, x), \\ h_t + uh_x + \mu_{1x} + u\mu_{1x} &= 0, \\ B_x &= -\mu_0t - u\mu_{0x} \Rightarrow B_{xu} = -\mu_{0x} \Rightarrow \\ B_u &= -\mu_0 + b_u(p, u, t) \Rightarrow \\ B &= -u\mu_0 + b + c(p, t, x), \quad c_x + \mu_{0t} = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Второе уравнение системы (7) принимает вид:

$$b_u - \theta(h_p + \mu_{1p}) = \rho^{-1}\theta(\mu_p + \mu_{0p}) + \rho\mu_p - \mu. \tag{9}$$

Дифференцируем его по ρ и разделим переменные:

$$\begin{aligned} \rho\mu_{\rho\rho} + \rho^3\theta^{-1}\mu_{\rho\rho} - \mu_p &= \mu_{0p} = v'(p) \Rightarrow \\ \mu_0 &= v(p) + \check{\mu}_0(t, \vec{x}), \quad c_{xp} = 0 \Rightarrow \\ c &= C_1(p, t) + C_0(t, x) \Rightarrow C_{0x} + \check{\mu}_{0t} = 0. \end{aligned}$$

Уравнение (9) запишем в разделенных переменных:

$$\begin{aligned} \rho^{-1}\theta(\mu_p + v'(p)) + \rho\mu_p - \mu &= \theta\check{\kappa}'(p), \\ h_p &= \theta^{-1}b_u - \mu_{1p} - \check{\kappa}'(p). \end{aligned} \tag{10}$$

Первое уравнение системы (7) принимает вид:

$$h_u = -uv'(p) + b_p + C_{1p}.$$

Из уравнения (8) дифференцированием по u найдем

$$h_x = -b_{pt} - C_{1pt} - \mu_{1x}, \quad h_t = u(b_{pt} + C_{1pt}) - \mu_{1t}.$$

Определили все производные функции h . Перекрестное дифференцирование дает:

$$b_{ut} = 0, \quad b_{ppt} + C_{1ppt} = 0, \quad b_{ptt} + C_{1ptt} = 0, \\ \theta^{-1}b_{uu} = b_{pp} + C_{1pp} - uv''.$$

Отсюда определяем

$$b + C_1 = Ktp + \varphi(p, u) + \psi(t), \\ \theta^{-1}(p)\varphi_{uu} = \varphi_{pp} - uv''(p), \\ h = K(tu - x) - \mu_1(p, t, x) - \varkappa(p) + H(u, p), \\ H_u = \varphi_p - uv', \quad H_p = \theta^{-1}\varphi_u. \quad (11)$$

Резюмируя вычисления, запишем плотность и поток:

$$B = -u(\tilde{\mu}_0 + v) + C_0 + Kpt + \varphi + \psi(t), \\ \eta = Kp(tu - x) - \rho\varkappa + \rho H + \mu + v + \tilde{\mu}_0.$$

Функциям C_0 , $\tilde{\mu}_0$, ψ соответствуют тривиальные законы сохранения. Постоянной K соответствует закон сохранения центра масс. Для оставшихся функций сделаем замену $\bar{\mu} = \mu + v$, $\bar{\varphi} = \varphi - v\mu$, $\bar{H} = H - \varkappa$. Учитывая уравнения (10) и (11) получим бесконечное множество законов сохранения:

$$D_t(\rho\bar{H} + \bar{\mu}) + D_x(u(\rho\bar{H} + \bar{\mu}) + \bar{\varphi}) = 0, \quad (12)$$

$$\bar{H}_u = \bar{\varphi}_p, \quad \bar{H}_p = \theta^{-1}(\bar{\varphi}_u + v - \theta\varkappa'),$$

$$\rho^{-1}\theta\bar{\mu}_p + \rho\bar{\mu}_\rho = \bar{\mu} + \theta\varkappa' - v, \quad \theta\bar{\varphi}_{pp} = \bar{\varphi}_{uu}. \quad (13)$$

Теорема. Уравнения газовой динамики с уравнением состояния $\rho^2 f_\rho = \theta(f)$ с любой функцией θ имеют законы сохранения (12) с любыми решениями уравнений (13), где v, \varkappa — произвольные функции.

Замечание. Законов сохранения (12), (13) больше тех, которые представлены в [4].

Произвольные функции и решения уравнений (13) можно подобрать так, что получатся все

законы сохранения, полученные для произвольно-го уравнения состояния.

Уравнение состояния, заданное функцией $p = f(\rho, S)$, где f удовлетворяет уравнению теоремы, можно задать функцией $\varepsilon = \varepsilon(\rho, S) = \bar{\varepsilon}(\rho, p)$. Тогда функция $\bar{\varepsilon}$ удовлетворяет уравнению

$$\rho^2 \bar{\varepsilon}_\rho + \theta(p)\bar{\varepsilon}_p = p. \quad (14)$$

Закон сохранения энергии имеет плотность $\rho\varepsilon + \frac{1}{2}\rho u^2 = \rho\bar{H} + \bar{\mu}$ и поток $\bar{\varphi} = pu$. Из формул (13) определяем:

$$\bar{H} = \frac{1}{2}u^2 - \varkappa + \int \theta^{-1}(p + v)dp,$$

$$\bar{\mu} = \rho \left(\bar{\varepsilon} + \varkappa - \int \theta^{-1}(p + v)dp \right).$$

Уравнение для $\bar{\varphi}$ выполнено. Уравнение для $\bar{\mu}$ есть уравнение (14).

Если $v = \theta\varkappa'$, $\bar{\varphi} = 0$, то $\bar{H} = C$ — постоянная. При $\bar{\mu} = 0$ получим закон сохранения массы.

В переменных ρ, S имеем $\bar{\mu}(\rho, p) = \mu(\rho, S)$, $p = f(\rho, S)$, $\rho\mu_S = \mu \Rightarrow \mu = \rho g(S)$. Получаем закон сохранения энтропии.

Для закона сохранения импульса имеем:

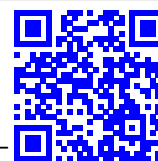
$$\rho u = \rho\bar{H} + \bar{\mu}, \quad \bar{\varphi} = p \Rightarrow \bar{H}_u = 1, \quad \bar{H}_p = \theta^{-1}v - \varkappa' \Rightarrow$$

$$\bar{H} = u - \varkappa + \int v\theta^{-1}dp, \quad \bar{\mu} = \rho(\varkappa - \int v\theta^{-1}dp).$$

Уравнения (13) выполнены.

Список литературы

- [1] Хабилов С.В. Основные задачи группового анализа дифференциальных уравнений механики // Многофазные системы. 2022. Т. 17, № 1–2. С. 51–62. DOI: 10.21662/mfs2022.1.005
- [2] Ibragimov N.H. A new conservation theorem // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007. V. 333, No. 1. P. 311–328. DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.10.078
- [3] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука. 1983. 280 с.
- [4] Чиркунов Ю.А., Хабилов С.В. Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды. Новосибирск. НГТУ. 2012. 659 с.
- [5] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М., Ижевск: ИКИ 2003. 336 с.



Group analysis tasks. Conservation laws

Khapiro S.V.

Mavlyutov Institute of Mechanics of UFRC RAS, Ufa, Russia

Differential equations of mechanics are derived from the laws of conservation of mass, momentum and energy. Other conservation laws can be obtained using the symmetries of these equations. Any conservation law can be derived from one using canonical operators, special cases of which are symmetry operators. The calculation of canonical conservation law operators is equivalent to a direct method of finding a divergent form of equations that are valid by virtue of the equations of mechanics. Using the example of one-dimensional equations of gas dynamics, all zero-order conservation laws are obtained by the direct method. For special equations of state, an infinite set of conservation laws have been obtained, many of which are new.

Keywords: conservation laws, gas dynamics, equation of state, compatibility conditions

References

- [1] Khapiro S.V. The main tasks of group analysis of differential equations of mechanics // *Multiphase systems*. 2022. V. 17, № 1–2. Pp. 51–62 (in Russian).
DOI: [10.21662/mfs2022.1.005](https://doi.org/10.21662/mfs2022.1.005)
- [2] Ibragimov N.H. A new conservation theorem // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2007. V. 333, No. 1. P. 311–328.
DOI: [10.1016/j.jmaa.2006.10.078](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.10.078)
- [3] Ibragimov N.H. Transformation groups in mathematical physics. M.: Nauka. 1983. 280 p. (in Russian).
- [4] Chirkunov Y.A., Khapiro S.V. Elements of symmetry analysis of differential equations of continuum mechanics. Novosibirsk. NGTU. 2012. 659 p. (in Russian).
- [5] Ovsannikov L.V. Lectures on the basics of gas dynamics. M.: IKI 2003. 336 p. (in Russian).



Численный анализ полного сечения рассеяния на множестве звукопроницаемых сфер¹

Насибуллаева Э.Ш.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

При решении задачи рассеяния акустической волны на множестве сферических препятствий малых размеров одной из важнейших подзадач является определение основной характеристики явления рассеяния — полного сечения рассеяния. Ее решение позволит установить при каких параметрах системы взаимодействие между частицами несущественно и им можно пренебречь (в этом случае задачу можно упростить и свести к случаю множества одиночных частиц), а при каких параметрах данным взаимодействием пренебрегать нельзя. В настоящей работе на основе явной формулы для полного сечения рассеяния на множестве взаимодействующих звукопроницаемых сфер проведен численный параметрический анализ полного сечения рассеяния на системе сфер при воздействии сферической волны от монополярного источника излучения. С целью определения соотношений физических параметров сферы и окружающей среды, при которых эффекты многократного рассеяния являются существенными для заданных типов конфигурации системы, проведена серия вычислительных экспериментов для расчетов основной характеристики рассеяния с учетом многократного рассеяния, а также сумм характеристик для одиночных звукопроницаемых сфер. Показано, что во всех рассмотренных случаях эффектами многократного рассеяния при определении полного сечения рассеяния пренебрегать нельзя. В случае воздушных пузырьков в воде существенным фактором является тип конфигурации системы; для капель воды в воздухе существенными являются как тип конфигурации, так и число сфер в ней; а для капель дихлорэтана в воде тип конфигурации и число сфер в ней являются несущественными факторами.

Ключевые слова: акустическое рассеяние, система звукопроницаемых сфер, полное сечение рассеяния, монополярный источник излучения, вычислительный эксперимент, упругость жидкости

1. Введение

В рамках решения задачи рассеяния акустической волны на множестве сферических препятствий малых размеров одной из важнейших подзадач является определение основной характеристики явления рассеяния — полного сечения рассеяния. Данная величина характеризует площадь перпендикулярной потоку области, попадая в которую падающая волна испытывает рассеяние. При встрече с множеством звукопроницаемых препятствий часть волн, рассеянных каждым из них, рассеивается повторно и многократно на других препятствиях (образуются дополнительные звуковые по-

ля), а часть волн проходит через их границы. Исследование полного сечения рассеяния, учитывающего многократное рассеяние, для систем звукопроницаемых сфер при падении волны от внешнего источника является актуальной задачей, поскольку ее решение позволит установить при каких параметрах системы взаимодействие между частицами несущественно и им можно пренебречь (в этом случае задачу можно упростить и свести к случаю множества одиночных частиц), а при каких параметрах данным взаимодействием пренебрегать нельзя.

Анализ научных работ, в которых определяют основные характеристики явления рассеяния показал, что аналитические формулы и численные исследования ограничены случаями одиночной сферы или системы с двумя сферами. С обзором данных исследований для рассеяния на одиночном препятствии до 1950 г. можно ознакомиться в рабо-

¹Работа поддержана средствами государственного задания № 0246-2019-0052

те [1], а после 1950 г. — в [2], где также представлен обзор работ по рассеянию волн на паре сфер. Существующие работы, направленные на нахождение сечений рассеяния на системах, содержащих более двух сфер, либо сводятся к случаю одиночной сферы [3, 4], либо ограничиваются рассмотрением некоторых упрощенных случаев [5]. В работе [6] выведена явная формула полного сечения рассеяния, учитывающая взаимодействие между звукопроницаемыми сферами в системе. Данная формула применима для любого числа сфер различных радиусов, произвольным образом расположенных в трехмерном пространстве, и при произвольном внешнем воздействии в границах применимости алгоритмов, используемых для общего [7] или осесимметричного [8] случаев.

В настоящей работе на основе явной формулы для полного сечения рассеяния на множестве взаимодействующих звукопроницаемых сфер [6] проведен численный параметрический анализ данной характеристики рассеяния на системе сфер при воздействии сферической волны от монополюсного источника излучения. Основная цель — определение соотношений физических параметров сферы и окружающей среды для заданных типов конфигурации системы, при которых эффекты многократного рассеяния являются существенными.

2. Постановка и численный метод решения задачи

Рассматриваются N звукопроницаемых сфер одинакового радиуса a с центрами, имеющими декартовы координаты \mathbf{r}'_v ($v = 1, \dots, N$), которые расположены в бесконечном трехмерном пространстве в двух различных конфигурациях:

- плоская («однослойная») равномерная (центры сфер расположены в узлах правильной сетки с $\delta l_y = \delta l_z \equiv \delta l$) конфигурация в плоскости Oyz , состоящая из $N = N_y \times N_z$ сфер (рис. 1(а));
- объемная («трехслойная») равномерная конфигурация с расстояниями между узлами сетки $\delta l_x = \delta l_y = \delta l_z \equiv \delta l$, состоящая из $N = 3 \times N_y \times N_z$ сфер, где центральный слой расположен также, как в конфигурации на рис. 1(а), а крайние слои — симметрично относительно него (рис. 1(б)).

Внешняя среда и среда внутри сфер являются однородными и характеризуются плотностями ρ_0 и ρ_v , а также скоростями звука c_0 и c_v . Предполагается, что центры сфер неподвижны и радиальное движение сферической поверхности отсутствует. На

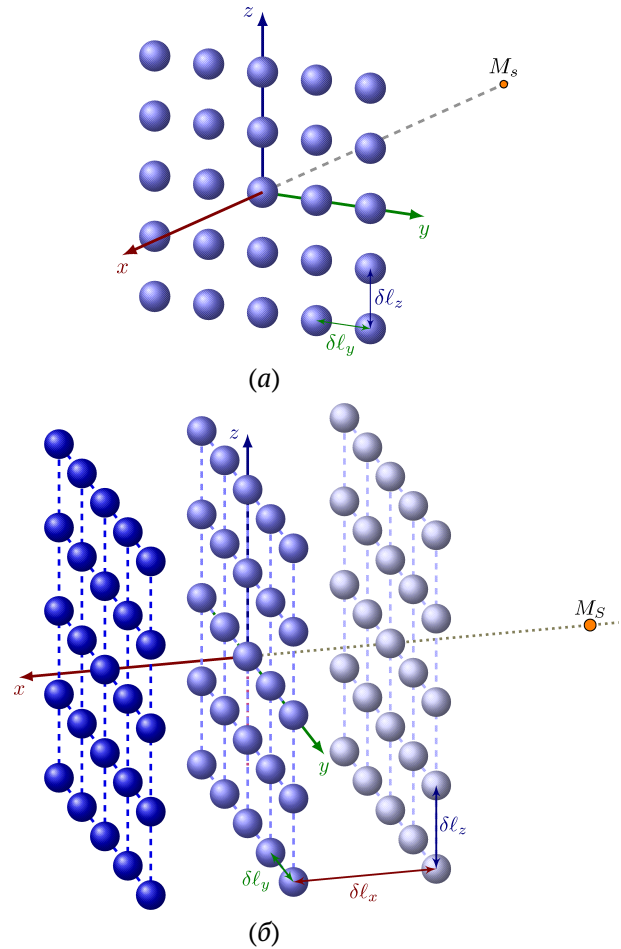


Рис. 1. Плоская равномерная конфигурация в плоскости Oyz , состоящая из $N = N_y \times N_z$ сфер (а); «трехслойная» равномерная конфигурация, состоящая из $N = 3 \times N_y \times N_z$ сфер (б); M_s — монополюсный источник излучения, δl_x ; δl_y , δl_z — расстояния между центрами соседних сфер вдоль соответствующих осей координат

систему сфер падает сферическая волна от монополюсного источника излучения, расположенного в точке $M_s = (-d_{M_s}, 0, 0)$.

Задача рассеяния звука на системе звукопроницаемых сфер сводится к решению уравнений Гельмгольца для комплексных потенциалов $\psi(\mathbf{r})$ для произвольной точки \mathbf{r} вне сфер и $\psi_{\text{int}}^{(v)}$ внутри v -й сферы с граничными условиями, выражающими равенства потенциала и нормальных составляющих скорости частиц на поверхности S_v v -ой сферы, сквозь которую проходит волна [7]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi + k_0^2 \psi &= 0, & \nabla^2 \psi_{\text{int}}^{(v)} + k_v^2 \psi_{\text{int}}^{(v)} &= 0, \\ \left(\psi(\mathbf{r}) - \psi_{\text{int}}^{(v)} \right) \Big|_{S_v} &= 0, & \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{\rho_v} \frac{\partial \psi_{\text{int}}^{(v)}}{\partial r} \right) \Big|_{S_v} &= 0 \end{aligned}$$

($v = 1, \dots, N$), где k_0 и k_v – волновые числа для сред вне и внутри сфер.

В соответствии с классическим решением потенциал внешнего поля $\psi(\mathbf{r})$ представляется в виде суммы потенциалов падающего поля $\psi_{\text{in}}(\mathbf{r})$ и поля рассеяния $\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r})$:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) + \psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}),$$

где $\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r})$ удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда, соответствующего затухающим на бесконечности волнам [9].

Далее проводятся разложение всех потенциалов и повторное разложение потенциала поля рассеяния по мультиполям. Техника разложения по мультиполям [10], разработанная изначально для случая звуконепроницаемых сфер (волна не проходит через поверхность) с произвольным акустическим импедансом, была обобщена на случай звукопроницаемых сфер в работе [7]. В данной работе также проведена оптимизация общего алгоритма для сфер, произвольным образом расположенных в трехмерном пространстве. Отметим, что выбор методики разложения по мультиполям обусловлен тем, что она позволяет достичь высокой точности получаемых результатов при минимальных затратах процессорного времени.

В общем случае задача сводится к решению системы линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A_l^{(v)s}$ разложения потенциала поля рассеяния

$$\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}) = \sum_{v=1}^N \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l A_l^{(v)s} S_l^s(\mathbf{r}_v)$$

по мультиполям $S_l^s(\mathbf{r}_v)$ порядка l и степени s ($\mathbf{r}_v = \mathbf{r} - \mathbf{r}'_v$). Данная система имеет следующий матричный вид:

$$\mathbf{L}\mathbf{A} = \mathbf{D}, \quad (1)$$

где элементы матриц скомпонованы определенным образом и определяются по формулам [6]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \{A_u\} = \{A_l^{(v)s}\}, \\ \mathbf{D} &= \{D_t\} = \{-B_n C_{\text{in},n}^m(\mathbf{r}'_w)\}, \\ \mathbf{L} &= \{L_{ut}\}, \quad L_{ut} = \begin{cases} B_l (S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{vw}) & (v \neq w), \\ \delta_{\tilde{u}\tilde{t}} & (v = w), \end{cases} \\ u &= (v-1)(n_{\text{tr}}+1)^2 + (l+1)^2 - (l-s), \\ t &= (w-1)(n_{\text{tr}}+1)^2 + (n+1)^2 - (n-m), \\ \tilde{u} &= (l+1)^2 - (l-s), \quad \tilde{t} = (n+1)^2 - (n-m), \\ l, n &= 0, 1, \dots, n_{\text{tr}}; \quad s = -l, \dots, l; \quad m = -n, \dots, n; \\ v, w &= 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Здесь введено обозначение

$$B_l = \frac{j_l(k_0 a) j'_l(k_w a) - \kappa_w j'_l(k_0 a) j_l(k_w a)}{h_l(k_0 a) j'_l(k_w a) - \kappa_w h'_l(k_0 a) j_l(k_w a)},$$

$j_n(z)$ и $j'_n(z)$ – сферические функции Бесселя 1-го типа и их производные [11]; $h_n(z)$ и $h'_n(z)$ – сферические функции Ханкеля 1-го типа и их производные [11]; $\kappa_w = (k_0 \rho_w) / (k_w \rho_0)$ – введенный параметр; $C_{\text{in},n}^m(\mathbf{r}'_w)$ – коэффициенты разложения падающего поля ψ_{in} около $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_w$; $(S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{vw})$ – коэффициенты перехода при повторном разложении по мультиполям; \mathbf{r}'_{vw} – вектор, направленный от центра v -й сферы к центру w -й сферы; $\delta_{\tilde{u}\tilde{t}}$ – символ Кронекера; n_{tr} – число членов ряда после его усечения. Отметим, что при численной реализации решения система уравнений (1) должна быть конечной, поэтому необходимо проводить усечение рядов при разложении по l и n . Вопрос выбора числа n_{tr} для данного типа задач подробно рассмотрен, например, в работах [6, 7].

Явная формула для определения полного сечения рассеяния системы сфер в общем случае имеет следующий вид [6]:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{\omega \rho_0}{2k_0 I_0} \left(\sum_{v=1}^N \sum_{n=0}^{n_{\text{tr}}} \sum_{m=-n}^n |A_n^{(v)m}|^2 + \right. \\ &+ \text{Re} \left(\sum_{\substack{v,w=1 \\ v \neq w}}^N \sum_{n=0}^{n_{\text{tr}}} \sum_{m=-n}^n \sum_{l=0}^{n_{\text{tr}}} \sum_{s=-l}^l i^{n+l} \times \right. \\ &\times \sqrt{(2n+1)(2l+1) \frac{(n-|m|)!(l-|s|)!}{(n+|m|)!(l+|s|)!}} \times \\ &\times (-1)^{n+m} A_n^{(v)m} \left(A_l^{(w)s} \right)^* c^{(m,s)} e^{i(m-s)\varphi_{vw}} \times \\ &\times \left. \left. \sum_{\tilde{i}=|n-l|}^{n+l} b_{\tilde{i}}^{(nm ls)} i^{\tilde{i}} j_{\tilde{i}}(k_0 r_{vw}) P_{\tilde{i}}^{m-s}(\cos \theta_{vw}) \right) \right). \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь $\omega = 2\pi f$ – угловая частота; f – частота внешнего поля; I_0 – интенсивность падающей волны; $c^{(m,s)}$ – коэффициент, выражение для которого определено в [6]; $b_{\tilde{i}}^{(nm ls)}$ – коэффициенты Клебша–Гордана [12]; $P_n^m(\mu)$ – присоединенные функции Лежандра [11]; $(r'_{vw}, \theta_{vw}, \varphi_{vw})$ – сферические координаты вектора \mathbf{r}'_{vw} в системе координат, связанной с v -й сферой.

Для одиночной звукопроницаемой сферы полное сечение рассеяния σ_s вычисляется с помощью формулы [13]:

$$\sigma_s = 4\pi d^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |B_l h_l(k_0 d)|^2, \quad (3)$$

где d – расстояние от центра сферы до монопольного источника излучения.

3. Результаты вычислительного эксперимента

При численной реализации техники разложения по мультиполям с применением оптимизированного алгоритма [6] для решения системы (1) разработан программный код на языке Fortran 90 (GCC) в среде MSYS2 (MinGW-w64) с подключением библиотеки LAPACK [14]. Специальные сферические функции и присоединенные полиномы Лежандра и их производные вычислялись с помощью адаптированных программных кодов, написанных на языке Fortran 77, для специальных цилиндрических функций и полиномов Лежандра [15].

Для численного анализа эффектов многократного рассеяния проведены вычислительные эксперименты по определению полного сечения рассеяния по формуле (2) на системах сфер, расположенных в двух различных конфигурациях (см. рис. 1), при числе сфер вдоль осей Oy и Oz равном $N_y = N_z = 5$ или 7, расстоянием между центрами сфер вдоль каждой из координатных осей равном $\delta l = 3a$ и расстоянием между монопольным источником излучения и геометрическим центром системы сфер (в рассматриваемых случаях совпадающим с началом декартовой системы координат) равным $d_{M_s} = 10a$. Вычислительный эксперимент проводился для числа усечения рядов равном $n_{tr} = 9$, что дает хорошую точность расчетов при всех рассмотренных параметрах системы. Исследовались три различных случая отношений упругости жидкости внутри ($\chi_{in} = \rho_v c_v^2$) и вне ($\chi_{out} = \rho_0 c_0^2$) сфер и плотностей внутренней и внешней сред:

– $w(a) - \chi_{out}/\chi_{in} \gg 1, \rho_0/\rho_v \gg 1$. В этом случае среды можно взять с физическими параметрами, соответствующими воде для внешней среды ($\rho_0 = 998 \text{ кг/м}^3, c_0 = 1484 \text{ м/с}$) и воздуха для среды внутри сфер ($\rho_v = 1.205 \text{ кг/м}^3, c_v = 343.1 \text{ м/с}$), т.е. проводить вычисления для системы воздушных пузырьков в воде;

– $a(w) - \chi_{out}/\chi_{in} \ll 1, \rho_0/\rho_v \ll 1$, что соответствует случаю системы капель воды в воздухе;

– $w(d) - \chi_{out}/\chi_{in} \approx 1, \rho_0/\rho_v \approx 1$, что соответствует, например, случаю системы капель дихлорэтана ($\rho_v = 1252.6 \text{ кг/м}^3, c_v = 1034 \text{ м/с}$) в воде.

На рис. 2 и 3 показаны результаты расчетов для конфигураций, представленных на рис. 1(a) и 1(b) соответственно, полного сечения рассеяния σ_s для всей системы (толстые линии), полученного по формуле (2), и сумм N одиночных сфер (тонкие линии), вычисленных по формуле (3) при фиксированном $d = d_{M_s}$.

Отметим, что в случае воздушных пузырьков в воде рассматривался диапазон волновых радиусов $k_0 a$ вне области так называемого «гигантского»

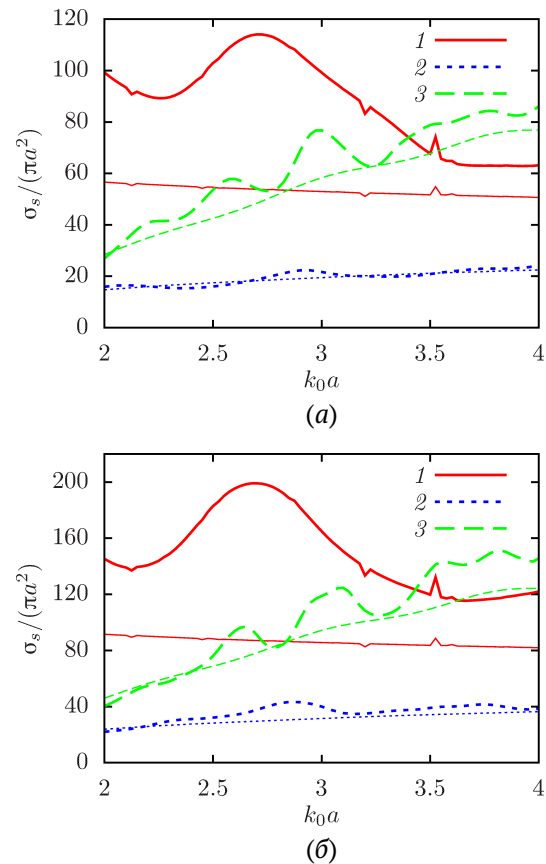


Рис. 2. Зависимость нормированного полного сечения рассеяния $\sigma_s / (\pi a^2)$ от волнового радиуса $k_0 a$ для конфигурации, представленной на рис. 1(a), с числом сфер $N = 5 \times 5$ (a) и $N = 7 \times 7$ (б) для σ_s , вычисленных по явной формуле (2) (толстые линии) и сумм значений (3): 1 – воздушные пузырьки в воде (случай $w(a)$); 2 – капли воды в воздухе (случай $a(w)$); 3 – капли дихлорэтана в воде (случай $w(d)$)

резонанса для одиночных пузырьков, то есть для $k_0 a \gg 0.014$ [13, 16]. Однако, как было показано в работе [16] для систем пузырьков, помимо данного монопольного резонанса существует большое число резонансов на более высоких частотах, которые меньше по величине, чем «гигантский» резонанс. Данные резонансы можно наблюдать и в настоящей работе на рис. 2. Хотя при шаге по $k_0 a$, который в представленных расчетах брался равным $\Delta h = 0.0125$, величины вторичных резонансов имеют небольшие значения, наличие данных резонансов согласуется с результатами работы [16].

Для анализа влияния эффектов многократного рассеяния рассмотрим максимальную относительную погрешность δ_{max} для величины $\sigma_s / (\pi a^2) \equiv \Sigma_1$, вычисленную с помощью формулы (2) с учетом

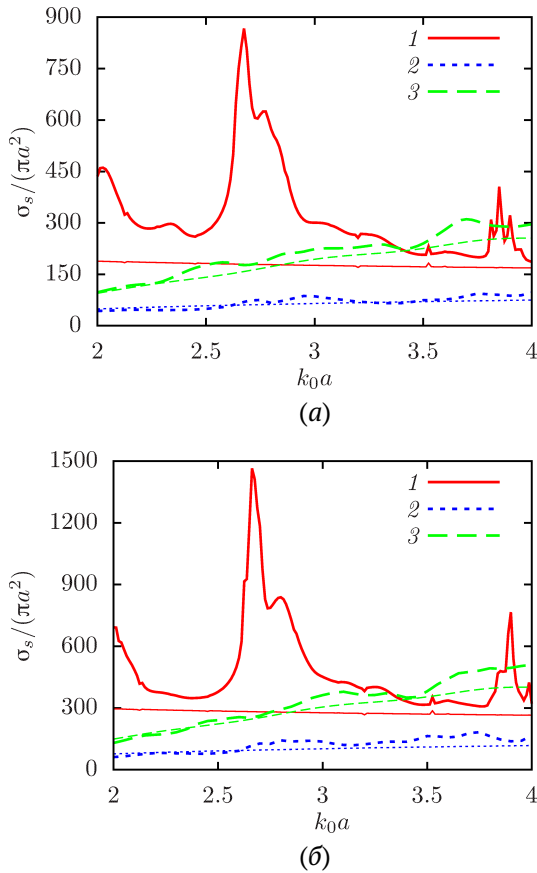


Рис. 3. Зависимость нормированного полного сечения рассеяния $\sigma_s / (\pi a^2)$ от волнового радиуса $k_0 a$ для конфигурации, представленной на рис. 1(б), с числом сфер $N = 3 \times 5 \times 5$ (а) и $N = 3 \times 7 \times 7$ (б) для σ_s , вычисленных по явной формуле (2) (толстые линии) и сумм значений (3): 1 – воздушные пузырьки в воде (случай w(a)); 2 – капли воды в воздухе (случай a(w)); 3 – капли дихлорэтана в воде (случай w(d))

многократного рассеяния, и суммы данных величин Σ_2 , вычисленных по формуле (3) для одиночных сфер, выраженную в процентах:

$$\delta_{\max} = \max \left| \frac{\Sigma_1 - \Sigma_2}{\Sigma_2} \right| \cdot 100\%. \quad (4)$$

Данные представлены в табл. 1.

Анализ результатов, представленных на рис. 2, 3 и в табл. 1, показал следующее:

- с ростом отношений χ_{out}/χ_{in} и ρ_0/ρ_v влияние многократного рассеяния на величину полного сечения рассеяния σ_s значительно увеличивается. Наблюдается не только количественный рост (для случаев капель дихлорэтана в воде и воздушных пузырьков в воде до $k_0 a \leq 3.4$,

Таблица 1. Максимальная относительная погрешность δ_{\max} , рассчитанная по формуле (4), для двух типов конфигураций с разным числом сфер и трех типов соотношений параметров внешней и внутренней сред (см. рис. 2 и 3)

	рис. 1(а)		рис. 1(б)	
	5×5	7×7	$3 \times 5 \times 5$	$3 \times 7 \times 7$
w(a)	112.08	128.68	383.32	419.08
a(w)	16.73	41.7	35.62	59.55
w(d)	33.21	29.38	27.27	27.09

для капель воды в воздухе — при любых рассмотренных $k_0 a$), но и качественный — нелинейный характер кривых увеличивается, появляются точки локальных максимумов и минимумов. При этом для каждой конфигурации увеличение числа сфер приводит к увеличению только количественной характеристики, качественная же картина меняется несущественно;

- максимально эффект многократного рассеяния проявляется в случае $\chi_{out}/\chi_{in} \gg 1$ и $\rho_0/\rho_v \gg 1$ (воздушные пузырьки в воде): максимальная погрешность во всех случаях $\delta_{\max} = 265.58 \pm 57.69\%$. На данный эффект конфигурация системы влияет существенно, а число частиц в конфигурации — нет;
- в «противоположном» к рассмотренному в предыдущем пункте предельном случае, когда $\chi_{out}/\chi_{in} \ll 1$ и $\rho_0/\rho_v \ll 1$ (капли воды в воздухе), влияние многократного рассеяния на расчетную величину в большинстве примерах на порядок ниже. Максимальная погрешность $\delta_{\max} = 38.14 \pm 56.14\%$, причем на эффект многократного рассеяния влияет как конфигурация системы, так и число сфер в конфигурации;
- в случае «трехслойной» конфигурации для воздушных пузырьков в воде имеют место резонансы достаточно большой величины при $k_0 a \approx 2.7$ и 3.9 , в то время как для однослойной конфигурации точка $k_0 a \approx 2.7$ является точкой максимума. Следует предположить, что данные резонансы являются следствием многократного рассеяния в системе, имеющей объемную конфигурацию;
- в случае $\chi_{out}/\chi_{in} \approx 1$ и $\rho_0/\rho_v \approx 1$ (капли дихлорэтана в воде) при $k_0 a > 2.6$ имеет место

влияние на расчетную величину эффекта многократного рассеяния, однако данный эффект не сильно зависит от конфигурации и числа сфер в ней: максимальная погрешность во всех случаях составляет $\delta_{\max} = 30.15 \pm 10.05\%$.

4. Заключение

В рамках исследования акустического рассеяния на множестве звукопроницаемых сфер, произвольным образом расположенных в пространстве, при падении сферической волны от монополюсного источника излучения определяется полное сечение рассеяния системы при различных соотношения физических параметров внешней среды и среды внутри сфер для двух типов конфигурации системы.

Для определения параметров, при которых эффекты многократного рассеяния являются существенными, проведена серия вычислительных экспериментов для расчета основной характеристики рассеяния с учетом многократного рассеяния [6], и сумм данной характеристики для одиночных звукопроницаемых сфер [13]. Показано, что эффектами многократного рассеяния при определении полного сечения рассеяния во всех рассмотренных случаях пренебрегать нельзя, причем

- при $\chi_{out}/\chi_{in} \gg 1$ и $\rho_0/\rho_v \gg 1$ существенным является тип конфигурации системы;
- при $\chi_{out}/\chi_{in} \ll 1$ и $\rho_0/\rho_v \ll 1$ существенны как тип конфигурации, так и число сфер в ней;
- при $\chi_{out}/\chi_{in} \approx 1$ и $\rho_0/\rho_v \approx 1$ тип конфигурации и число сфер в ней являются несущественными факторами.

В случае $\chi_{out}/\chi_{in} \gg 1$ и $\rho_0/\rho_v \gg 1$ при рассмотренных значениях $k_0 a$ имеют место резонансы, которые по величине меньше монополюсного («гигантского») резонанса, что согласуется с данными работы [16]. Однако в случае «трехслойной» конфигурации на рассмотренных частотах появляются резонансы достаточно большой величины. Можно предположить, что они являются следствием многократного рассеяния в объемной конфигурации. Данное утверждение требует дополнительного исследования, которое планируется провести в дальнейшей работе.

Список литературы

- [1] Martin P.A. Acoustic scattering by one bubble before 1950: Spitzer, Willis, and Division 6 // J. Acoust. Soc. Am. 2019. Vol. 146. P. 920–926. DOI: 10.1121/1.5120127
- [2] Насибуллаева Э.Ш. Рассеяние звуковых волн на сферах: методы решения и основные характеристики (обзор) // Многофазные системы. 2021. Т. 16, № 3–4. С. 88–104. DOI: 10.21662/mfs2021.3.013
- [3] Бабайлов Э.П., Дубов А.А., Каневский В.А. Рассеяние звука поглощающей сферой // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 5. С. 851–857. http://www.akzh.ru/pdf/1991_5_851-857.pdf
- [4] Hahn T.R. Low frequency sound scattering from spherical assemblages of bubbles using effective medium theory // J. Acoust. Soc. Am. 2007. V. 122, No. 6. Pp. 3252–3267. DOI: 10.1121/1.2793610
- [5] Skaropoulos N.C., Yagridou H.D., Chrisoulidis D.P. Interactive resonant scattering by a cluster of air bubbles in water // J. Acoust. Soc. Am. 2003. V. 113, No. 6. Pp. 3001–3011. DOI: 10.1121/1.1572141
- [6] Насибуллаева Э.Ш. Численный анализ многократного рассеяния акустической волны на множестве звукопроницаемых сфер в трехмерном пространстве // Вычислительная механика сплошных сред. 2022. Т. 15, № 4. С. 383–398. DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.4.29
- [7] Насибуллаева Э.Ш. Моделирование акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер в трехмерном пространстве // Вычислительные технологии. 2022. Т. 27, № 2. С. 19–36. DOI: 10.25743/ICT.2022.27.2.003
- [8] Насибуллаева Э.Ш. Численный анализ акустического рассеяния от звукопроницаемых сфер при внешнем воздействии // Вестник УГАТУ. 2021. Т. 25, № 2(92). С. 93–101. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46340658>
- [9] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1981. 512 с.
- [10] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // J. Acoust. Soc. Am. 2002. Vol. 112, No. 6. P. 2688–2701. DOI: 10.1121/1.1517253
- [11] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Москва: Наука, 1974. 832 с.
- [12] Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
- [13] Насибуллаева Э.Ш. Исследование акустического рассеяния от одиночной звукопроницаемой сферы // Многофазные системы. 2018. Т. 13, № 4. С. 79–91. DOI: 10.21662/mfs2018.4.012
- [14] LAPACK – Linear Algebra PACKage. <https://netlib.sandia.gov/lapack/> (accessed: 08.06.2023).
- [15] Zhang S., Jin J. Computation of special functions. New York: Wiley–Interscience, 1996. 717 p.
- [16] Sage K.A., George J., Überall H. Multipole resonances in sound scattering from gas bubbles in a liquid // J. Acoust. Soc. Am. 1979. V. 65, No. 6. Pp. 1413–1422. DOI: 10.1121/1.2016503



Numerical analysis of the total scattering cross section on a set of sound-permeable spheres

Nasibullaeva E.Sh.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

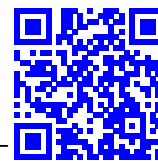
One of the most important subtasks of the problem of acoustic wave scattering on a set of small spherical obstacles is to determine the main characteristic of the scattering phenomenon, namely, the total scattering cross section. Its solution will make it possible to establish at what system parameters the interaction between particles is insignificant and can be neglected (in this case, the problem can be simplified and reduced to the many single particles case), and at what parameters this interaction cannot be neglected. In present work a numerical parametric analysis of the total scattering cross section on a spheres system under the influence of a spherical wave from a monopole radiation source is carried out on the base on an explicit formula for the total scattering cross section on a set of interacting sound-permeable spheres. In order to determine the ratio of the physical parameters of the sphere and the environment, under which the effects of multiple scattering are significant for given types of system configuration, a series of computational experiments was carried out to calculate the main scattering characteristic taking into account multiple scattering, as well as the sums of characteristics for single sound-permeable spheres. It is shown that in all cases considered, the effects of multiple scattering cannot be neglected when determining the total scattering cross section. In the case of air bubbles in water, the type of configuration of the system is an essential factor; for water droplets in the air, both the type of configuration and the number of spheres in it are essential; and for dichloroethane droplets in water, the type of configuration and the number of spheres in it are insignificant factors.

Keywords: acoustic scattering, sound-permeable spheres set, total scattering cross section, monopole radiation source, computational experiment, fluid elasticity

References

- [1] Martin P.A. Acoustic scattering by one bubble before 1950: Spitzer, Willis, and Division 6 // *J. Acoust. Soc. Am.* 2019. Vol. 146. P. 920–926.
DOI: [10.1121/1.5120127](https://doi.org/10.1121/1.5120127)
- [2] Nasibullaeva E.Sh. [Scattering of sound waves on spheres: methods and main characteristics (review)]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2021. V. 16, No. 3–4. Pp. 88–104 (in Russian).
DOI: [10.21662/mfs2021.3.013](https://doi.org/10.21662/mfs2021.3.013)
- [3] Babaylov E.P., Dubov A.A., Kanevskii V.A. [Sound scattering by an absorbing sphere]. *Akusticheskij Zhurnal* [Acoustic Journal]. 1991. V. 37, No. 5. Pp. 851–857 (in Russian).
http://www.akzh.ru/pdf/1991_5_851-857.pdf
- [4] Hahn T.R. Low frequency sound scattering from spherical assemblages of bubbles using effective medium theory // *J. Acoust. Soc. Am.* 2007. V. 122, No. 6. Pp. 3252–3267.
DOI: [10.1121/1.2793610](https://doi.org/10.1121/1.2793610)
- [5] Skaropoulos N.C., Yagridou H.D., Chrissoulidis D.P. Interactive resonant scattering by a cluster of air bubbles in water // *J. Acoust. Soc. Am.* 2003. V. 113, No. 6. Pp. 3001–3011.
DOI: [10.1121/1.1572141](https://doi.org/10.1121/1.1572141)
- [6] Nasibullaeva E.Sh. [Numerical analysis of multiple scattering of an acoustic wave on a set of sound-permeable spheres in 3d space]. *Vychislitel'naya mexanika sploshnyx sred* [Computational Continuum Mechanics]. 2022. V. 15, No. 4. Pp. 383–398 (in Russian).
DOI: [10.7242/1999-6691/2022.15.4.29](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2022.15.4.29)
- [7] Nasibullaeva E.Sh. [Simulation of acoustic scattering from a set of sound-permeable spheres in 3D space]. *Vychislitel'nye texnologii* [Computational technologies]. 2022. V. 27, No. 2. Pp. 19–36 (in Russian).
DOI: [10.25743/ICT.2022.27.2.003](https://doi.org/10.25743/ICT.2022.27.2.003)
- [8] Nasibullaeva E.Sh. [Numerical analysis of acoustic scattering from sound-permeable spheres under external influence]. *Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University)* [Vestnik UGATU]. 2021. V. 25, No. 2(92). Pp. 93–101 (in Russian).
DOI: [10.54708/19926502_2021_2529293](https://doi.org/10.54708/19926502_2021_2529293)
- [9] Vladimirov V.S. *Equations of Mathematical Physics*. New York: Marcel Dekker, Inc. 1971. 426 p.

- [10] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // J. Acoust. Soc. Am. 2002. Vol. 112, No. 6. P. 2688–2701.
DOI: [10.1121/1.1517253](https://doi.org/10.1121/1.1517253)
- [11] Korn G.A., Korn Th.M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. McGraw Hill Book Company, 1968. 943 p.
- [12] Ivanov Ye.A. Diffraction of electromagnetic waves on two bodies. Washington: National Aeronautics and Space Administration, 1970. 597 p.
- [13] Nasibullaeva E.Sh. [The study of acoustic scattering from a single sound-permeable sphere]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2018. V. 13, No. 4. Pp. 79–91 (in Russian).
DOI: [10.21662/mfs2018.4.012](https://doi.org/10.21662/mfs2018.4.012)
- [14] LAPACK – Linear Algebra PACKage.
<https://netlib.sandia.gov/lapack/> (accessed: 08.06.2023).
- [15] Zhang S., Jin J. Computation of special functions. New York: Wiley–Interscience, 1996. 717 p.
- [16] Sage K.A., George J., Überall H. Multipole resonances in sound scattering from gas bubbles in a liquid // J. Acoust. Soc. Am. 1979. V. 65, No. 6. Pp. 1413–1422.
DOI: [10.1121/1.2016503](https://doi.org/10.1121/1.2016503)



Дробно-интегральное обобщение уравнения Рапопорта–Лиса

Лукашук С.Ю.

Уфимский университет науки и технологий, Уфа

Рассматривается одномерная дробно-интегральная модель двухфазной фильтрации в пористой среде со степенной памятью с учетом капиллярных сил. На основе дробно-интегрального обобщения закона Дарси и классических уравнений неразрывности для фаз, в приближении отсутствия гравитационных сил выводится дробно-интегральный аналог уравнения Рапопорта–Лиса. Показано, что в предельном случае постоянного капиллярного давления полученное уравнение переходит в классическое уравнение Бакли–Левретта. Приводится пример постановки начально-краевой задачи для полученного уравнения в случае коллектора конечной протяженности. В отличие от классического уравнения Рапопорта–Лиса его дробно-интегральный аналог в общем случае не обладает решением типа бегущей волны в силу неинвариантности дробного интеграла с конечным нижним пределом относительно преобразования переноса по времени. Однако для модельной задачи вытеснения в неограниченном коллекторе, рассматриваемой как задача распада разрыва, справедливо приближение неограниченной памяти, для которого полученное уравнение обладает таким решением. В данном приближении получены соотношения для основных характеристик скачка насыщенности. В частности показано, что скорость движения скачка может быть найдена из уравнения, включающего дробно-интегральную характеристику функции Левретта. Также асимптотически исследовано поведение скачка вблизи его левой и правой границ при различных уровнях насыщенности на границах. Доказано, что если начальная насыщенность превышает остаточную насыщенность вытесняющей фазы, то на правой границе насыщенность на скачке экспоненциально стремится к начальной. На левой границе асимптотика скачка также является экспоненциальной за исключением одного особого случая, в котором она становится дробно-степенной. Для случая «слабой» неограниченной памяти, когда порядок дробного интегрирования близок к нулю и может рассматриваться как малый параметр, для исследуемого дробно-интегрального уравнения Рапопорта–Лиса аналитически построено его приближенное решение.

Ключевые слова: двухфазная фильтрация, капиллярные силы, интеграл дробного порядка, дробно-интегральный закон Дарси, решение типа бегущей волны, малый параметр, приближенное решение

1. Введение

Развитие методов математического моделирования процессов многофазной фильтрации в неоднородных средах сложной структуры является важным разделом современной гидромеханики. Существуют различные подходы к учету в модели сложной структуры среды [1, 2]. Классический подход приводит к моделям двойной и тройной пористости и проницаемости, учет случайности в распределении неоднородностей порождает сто-

хастические модели, для описания трещиновато-пористых сред применяют фрактальную геометрию. При этом вне зависимости от подхода учет структуры среды неизбежно ведет к усложнению математической модели и увеличению числа ее параметров, требующих идентификации для возможности ее практического использования. В этой связи несомненный интерес представляют модели, обладающие относительно небольшим количеством параметров, но позволяющие адекватно описывать исследуемые процессы с требуемой для практики точностью.

ся в последнее время подходов к построению таких моделей основан на использовании аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка [3]. В основе подхода лежит идея о том, что влияние неоднородности и сложности среды на исследуемый процесс переноса может быть описано в терминах памяти и пространственной нелокальности [4, 5]. В этом случае отпадает необходимость в описании собственно внутренней структуры среды, которая в подавляющем большинстве случаев является неизвестной. В результате неоднородная среда приближается к модельной однородной, но обладающей эффектами памяти или пространственной нелокальности, которые математически могут быть описаны интегральными операторами с разностными ядрами. Аналогичный подход известен в линейной наследственной теории фильтрации [6]. Использование в качестве ядер степенных функций приводит к интегральным и дифференциальным операторам дробного порядка. В рамках феноменологического подхода такие операторы обычно включаются в математические записи феноменологических гипотез (таких, например, как закон Дарси). Важно отметить, что при этом основные балансные уравнения, вытекающие из законов сохранения, остаются неизменными. Полученные в результате такого подхода модели математически представляют собой так называемые дробно-дифференциальные уравнения [7]. По сравнению с классическими, дополнительными параметрами таких моделей являются только дробные порядки интегрирования или дифференцирования, число которых в рамках одной модели обычно невелико (как правило, один-два). При этом, однако, меняется физический смысл некоторых основных коэффициентов модели, так как они приобретают дробную размерность. Это неизбежно приводит к необходимости их дополнительной идентификации.

Особенностью дробно-дифференциальных моделей переноса является аномальность описываемых ими процессов [7, 8]. Такие процессы при стохастическом рассмотрении не подчиняются гауссовой статистике и имеют степенную асимптотику в функциях распределения [9]. Важно отметить, что в этом случае аномальность является следствием специального вида усреднения, приводящего к неполному описанию среды [7]. Например, в трещиновато-пористой среде с развитой структурой трещин при усредненном описании в рамках однородной модели наблюдается ускоренная фильтрация, протекающая по супердиффузионному механизму. И напротив, наличие в среде различных локальных включений и каверн, играющих роль ловушек для фильтрующейся фазы, может приво-

дить к замедлению фильтрационного процесса по субдиффузионному механизму. При этом при измерениях в реальных пластовых системах аномальность процессов будет наблюдаться непосредственно, поскольку в этом случае измеряемые параметры всегда являются усредненными. Например, при измерении дебита скважины нет возможности измерить отдельно доли флюида, приходящие по сети трещин и через основную пористую матрицу.

Одной из первых работ, в которой для учета эффекта памяти в закон Дарси был включен оператор дробного дифференцирования по времени, является статья [10]. В дальнейшем этот подход успешно применялся для моделирования трещиновато-пористых коллекторов [11, 12]. В целом, в настоящее время для задач подземной гидромеханики уже предложено и исследовано достаточно большое количество дробно-дифференциальных математических моделей (см., например, обзор [13]). Вопросам феноменологического подхода к построению нелинейных дробно-дифференциальных моделей фильтрации посвящена работа [14]. Тем не менее многие, в том числе классические задачи многофазной фильтрации в рамках дробно-дифференциального подхода, все еще слабо изучены. Настоящая статья призвана частично восполнить этот пробел применительно к процессу ускоренной двухфазной фильтрации с учетом капиллярных сил в среде со степенной памятью.

2. Дробно-интегральное обобщение уравнения Рапопорта–Лиса

Рассмотрим процесс двухфазной фильтрации в среде с памятью с учетом капиллярных сил. Среда считается однородной и недеформируемой, фильтрующиеся фазы — несжимаемыми. Ограничимся рассмотрением одномерного течения в случае плоской симметрии. Соответствующие уравнения неразрывности для фаз хорошо известны [15] и имеют вид:

$$\begin{aligned}\phi \frac{\partial s_1}{\partial t} + \frac{\partial w_1}{\partial x} &= 0, \\ \phi \frac{\partial s_2}{\partial t} + \frac{\partial w_2}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь ϕ — пористость среды; t — время; w_i и s_i — скорость и насыщенность i -й фазы ($i = 1, 2$), соответственно. Насыщенности связаны соотношением $s_1 + s_2 = 0$, поэтому в дальнейшем обозначим

$$s_1 = s, \quad s_2 = 1 - s.$$

Тогда из (1) следует, что суммарная скорость двухфазного потока $w = w_1 + w_2$ не зависит от пространственной координаты x : $w = w(t)$.

Пусть для фаз выполнены дробно-интегральные обобщения закона Дарси (гравитационными силами пренебрегаем):

$$w_i = -\frac{kk_{ri}}{\mu_i T_\alpha} {}_{t_0}I_t^\alpha \left(\frac{\partial p_i}{\partial x} \right), \quad 0 < \alpha < 1, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

где k — проницаемость пористой среды; k_{ri} — относительная фазовая проницаемость i -й фазы; μ_i — динамическая вязкость i -й фазы; p_i — давление i -й фазы; T_α — временной релаксационный параметр, имеющий дробную размерность s^α ;

$$({}_{t_0}I_t^\alpha y)(t, x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{y(\tau, x)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} d\tau$$

— интеграл дробного порядка α [3]; $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция.

Феноменологические соотношения (2) являются специальным частным случаем известной наследственной фильтрационной модели [6], учитывающей неравновесные эффекты, и определяют ускоренный (супердиффузионный) режим фильтрации [14]. В предельном случае $\alpha = 0$ оператор дробного интегрирования ${}_{t_0}I_t^\alpha$ превращается в единичный и уравнения (2) переходят в классические законы Дарси для фаз.

В дальнейшем будем предполагать, что проницаемость среды и относительные фазовые проницаемости в (2) не зависят от характеристик памяти среды. Как и в классическом случае, также будем полагать, что относительные фазовые проницаемости являются функциями насыщенности: $k_{ri} = k_{ri}(s)$ ($i = 1, 2$). Таким образом, влияние памяти в рассматриваемой модели будет определяться двумя постоянными параметрами: порядком α и коэффициентом T_α . Будем рассматривать простейший случай $k = \text{const}$, $\mu_i = \text{const}$ ($i = 1, 2$), который позволит относительно просто выявить основные качественные отличия рассматриваемой дробно-интегральной модели от классической.

Для сокращения записи введем дробные аналогии подвижностей фаз:

$$\lambda_{\alpha i}(s) = \frac{kk_{ri}(s)}{\mu_i T_\alpha}, \quad i = 1, 2.$$

Рассмотрим процесс фильтрации с учетом капиллярных сил. Тогда давления фаз связаны между собой через капиллярное давление p_c :

$$p_2 - p_1 = p_c. \quad (3)$$

Капиллярное давление является функцией насыщенности и по аналогии с классической пористой средой может быть записано в виде [15]

$$p_c(s) = \bar{p}_c J(s),$$

где $J(s)$ — функция Леверетта; \bar{p}_c — характерное капиллярное давление, соответствующее насыщенности $s = \hat{s}$ такой, что $J(\hat{s}) = 1$. Для обычной пористой среды \bar{p}_c зависит от проницаемости k и пористости ϕ , в случае среды с памятью \bar{p}_c может дополнительно зависеть от α и T_α .

С учетом (2) и (3), в силу линейности операторов дифференцирования и дробного интегрирования, соотношение для суммарной скорости двухфазного потока w может быть записано в виде

$$-w(t) = [\lambda_{\alpha 1}(s) + \lambda_{\alpha 2}(s)] {}_{t_0}I_t^\alpha \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} \right) + \bar{p}_c \lambda_{\alpha 2}(s) {}_{t_0}I_t^\alpha \left(J'(s) \frac{\partial s}{\partial x} \right).$$

Выражая отсюда слагаемое с p_1 и подставляя его в обобщенный закон Дарси для скорости первой фазы, находим

$$w_1 = f(s) \left[w(t) + \bar{p}_c \lambda_{\alpha 2}(s) {}_{t_0}I_t^\alpha \left(J'(s) \frac{\partial s}{\partial x} \right) \right], \quad (4)$$

где

$$f(s) = \frac{\lambda_{\alpha 1}(s)}{\lambda_{\alpha 1}(s) + \lambda_{\alpha 2}(s)} = \frac{k_{r1}(s)}{k_{r1}(s) + \frac{\mu_1}{\mu_2} k_{r2}(s)}$$

— функция Бакли–Леверетта. Заметим, что поскольку относительные фазовые проницаемости предполагаются независимыми от α , функция $f(s)$ также не зависит от α .

Подстановка (4) в первое уравнение системы (1) приводит к дробно-интегральному обобщению уравнения Рапопорта–Лиса:

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} + w(t) f'(s) \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[g_\alpha(s) {}_{t_0}I_t^\alpha \left(J'(s) \frac{\partial s}{\partial x} \right) \right] = 0, \quad (5)$$

где

$$g_\alpha(s) = \bar{p}_c f(s) \lambda_{\alpha 2}(s).$$

В предельном случае $\alpha = 0$ это уравнение переходит в классическое уравнение Рапопорта–Лиса. Заметим также, что в случае $p_c = \text{const}$ нелокальное слагаемое в (5) обращается в нуль и в результате получается уравнение Бакли–Леверетта [15]. Таким образом, в рассматриваемой модели память среды будет проявляться только при переменном капиллярном давлении.

Для нахождения однозначного решения уравнения (5) необходимо поставить соответствующую начально-краевую задачу. Поскольку это уравнение содержит только оператор дробного интегрирования, но не дробного дифференцирования, могут быть использованы обычные начальные и граничные условия. Например, если в ограниченной

области $0 \leq x \leq L$ рассматривается задача вытеснения, в которой первая фаза является вытесняющей, то начальные и граничные условия для уравнения (5) могут быть записаны в виде:

$$s(t_0, x) = s_0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (6)$$

$$s(t, 0) = s_1, \quad \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad t > t_0, \quad (7)$$

где s_0 — некоторая начальная насыщенность, а s_1 — насыщенность на границе закачки вытесняющей фазы. Если закачивается «чистая» первая фаза, то можно положить $s_1 = 1$, в этом случае $f(s_1) = 1$.

В силу переменности коэффициентов уравнения (5) в общем случае решение задачи (5)–(7) возможно только численно. Однако ряд качественных характеристик процесса вытеснения в среде с памятью может быть получен аналитически из рассмотрения специальной модельной задачи.

3. Влияние памяти среды на структуру скачка насыщенности

Хорошо известно [15], что в случае постоянной скорости $w(t) = w_0 = \text{const}$ классическое уравнение Рапопорта–Лиса допускает решение типа бегущей волны. Это обусловлено его инвариантностью относительно преобразований переноса как по пространственной, так и по временной переменным. Именно это решение имеет основное значение в задаче одномерного вытеснения несмешивающихся жидкостей с учетом капиллярных сил.

Оператор дробного интегрирования $t_0 I_t^\alpha$ не инвариантен относительно преобразования переноса по t при конечном пределе интегрирования t_0 [16]. Поэтому, в отличие от классического случая, уравнение (5) при $t_0 > -\infty$ решения типа бегущей волны не допускает.

Тем не менее, ситуация меняется при $t_0 \rightarrow -\infty$. Этот случай соответствует так называемой полной памяти среды [7]. Тогда оператор $-\infty I_t^\alpha$ уже инвариантен относительно преобразования переноса по t и в этом случае уравнение (5) будет обладать решением типа бегущей волны вида

$$s(t, x) = \varphi(\xi), \quad \xi = x - ct, \quad (8)$$

где c — скорость движения волны.

Рассмотрим модельную задачу вытеснения в неограниченном коллекторе как задачу распада разрыва. В этом случае $x \in (-\infty, \infty)$, а начальные и граничные условия имеют следующий вид:

$$s(t_0, x) = \begin{cases} s_1, & x < 0, \\ s_0, & x > 0; \end{cases} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\partial s(t, x)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial s(t, x)}{\partial x} = 0, \quad t \geq t_0. \quad (10)$$

Поскольку $s = \text{const}$ является решением уравнения (5), то, не ограничивая общности, можно полагать, что условия (9) и (10) выполнены и при всех временах $t < t_0$. Тогда в уравнении (5) можно положить $t_0 = -\infty$ и рассматривать процесс вытеснения в среде с полной памятью. В этом случае при $t > t_0$ будет справедливо решение типа бегущей волны (8), в котором в качестве c будет выступать скорость движения скачка насыщенности.

Рассмотрим, как в этом случае преобразуется дробный интеграл, входящий в уравнение (5). Имеем

$$\begin{aligned} & -\infty I_t^\alpha \left(J'(s) \frac{\partial s}{\partial x} \right) = \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \frac{\partial J(s(\tau, x))}{\partial x} d\tau = \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \frac{\partial J(\varphi(x-c\tau))}{\partial x} d\tau = \\ & = \frac{c^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\xi}^{\infty} \frac{1}{(\eta-\xi)^{1-\alpha}} \frac{dJ(\varphi(\eta))}{d\eta} d\eta = \\ & = c^{-\alpha} {}_{\xi} I_{\infty}^\alpha \left(J'(\varphi) \frac{d\varphi}{d\xi} \right). \end{aligned}$$

В результате дробно-интегральное уравнение Рапопорта–Лиса (5) редуцируется к обыкновенному дробно-дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} & -c\varphi \frac{d\varphi}{d\xi} + w_0 \frac{df_\alpha(\varphi)}{d\xi} - \\ & -c^{-\alpha} \frac{d}{d\xi} \left[g_\alpha(\varphi) {}_{\xi} I_{\infty}^\alpha \left(J'(\varphi) \frac{d\varphi}{d\xi} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что, как и в классическом случае, полученное уравнение один раз легко интегрируется:

$$c\varphi\varphi - w_0 f(\varphi) + c^{-\alpha} g_\alpha(\varphi) {}_{\xi} I_{\infty}^\alpha \left(J'(\varphi) \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = C, \quad (11)$$

где C — постоянная интегрирования, которая может быть найдена из граничных условий.

Поскольку при $p_c = 0$ уравнение (5) переходит в классическое уравнение Бакли–Леверетта, остаются справедливы все ключевые соотношения, полученные в классической теории двухфазной фильтрации при отсутствии капиллярных эффектов [15]. Тогда, как и в случае классического уравнения Рапопорта–Лиса, решение уравнения (11) при $\xi \rightarrow \pm\infty$ должно сопрягаться с решением уравнения Бакли–Леверетта. В результате получаем, что решение уравнения (5) должно удовлетворять следующим предельным соотношениям:

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \varphi(\xi) = s_c, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \varphi(\xi) = s_0, \quad (12)$$

где s_0 — начальная насыщенность из (9), а s_c — так называемая насыщенность на скачке. В задаче Бакли–Левретта выделяется случай стационарного скачка, когда насыщенности по обе стороны от него остаются постоянными [15]. В этом случае s_c определяется как решение уравнения

$$f'(s_c) = \frac{f(s_c) - f(s_0)}{s_c - s_0}. \quad (13)$$

Очевидно, что физический смысл будут иметь только те решения уравнения (11), на которых входящий в это уравнение дробный интеграл принимает конечные значения при $\xi \rightarrow \pm\infty$. Учитывая, что интегральное уравнение

$$({}_\xi I_\infty^\alpha y)(\xi) = a, \quad a \text{ const},$$

имеет только тривиальное решение $y = 0$, при котором $a = 0$, получаем

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} {}_\xi I_\infty^\alpha \left(J'(\varphi) \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = 0.$$

Тогда переходя в уравнении (11) к пределу при $\xi \rightarrow \infty$, с учетом второго условия из (12) находим значение постоянной C :

$$C = c\phi s_0 - w_0 f(s_0).$$

В результате (11) сводится к дробно-дифференциальному уравнению

$${}_\xi I_\infty^\alpha \left(J'(\varphi) \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = F_\alpha(\varphi), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (14)$$

где

$$F_\alpha(\varphi) = \frac{w_0(f(\varphi) - f(s_0)) - c\phi(\varphi - s_0)}{c^{-\alpha} g_\alpha(\varphi)}.$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять первому из условий в (12).

Определим теперь характер распределения насыщенности вблизи условных границ скачка. Рассмотрим уравнение (14) при значениях φ близких к s_0 , то есть при достаточных больших значениях координаты ξ . Пусть $s_0 > s_*$, где s_* — остаточная насыщенность первой фазы. Тогда $f(s_0) > 0$ и, следовательно, $g_\alpha(s_0) > 0$. В этом случае с использованием разложения

$$f(\varphi) \approx f(s_0) + f'(s_0)(\varphi - s_0), \quad \varphi \rightarrow s_0,$$

уравнение (14) линеаризуется и приводится к виду

$${}_\xi I_\infty^\alpha \left(\frac{d\varphi}{d\xi} \right) = A(\varphi - s_0), \quad \xi \rightarrow \infty,$$

где постоянная

$$A_0 = \frac{w_0 f'(s_0) - c\phi}{c^{-\alpha} g_\alpha(s_0) f'(s_0)}.$$

Заменой переменных $\psi = \varphi - s_0$ это уравнение приводится к однородному:

$${}_\xi I_\infty^\alpha \left(\frac{d\psi}{d\xi} \right) = A_0 \psi.$$

Учитывая известное [3] соотношение

$${}_\xi I_\infty^\alpha e^{-\lambda\xi} = \lambda^{-\alpha} e^{-\lambda\xi}, \quad \lambda > 0,$$

находим его решение в виде

$$\psi(\xi) = C_0 e^{-\lambda_0 \xi}, \quad \lambda_0 = (-A_0)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

где C_0 — постоянная интегрирования. Решение имеет смысл при $A_0 < 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае на правой границе скачок насыщенности экспоненциально убывает и стремится к $s = s_0$.

Пусть теперь $s_0 = s_*$. Найдем асимптотику функции $F_\alpha(\varphi)$ при $\varphi \rightarrow s_*$. Имеем $f(s_*) = 0$, поэтому $g_\alpha(s_*) = 0$. На практике относительные фазовые проницаемости часто аппроксимируются степенными зависимостями. Пусть $k_{r1}(s) \sim (s - s_*)^n$, $n > 1$. Тогда $f(s) \sim (s - s_*)^n$ и $g_\alpha(s) \sim (s - s_*)^n$, поэтому $F_\alpha(\varphi) \sim (\varphi - s_*)^{1-n}$. Таким образом, в точке $\varphi = s_*$ правая часть уравнения (14) становится сингулярной. Это означает, что дробный интеграл в левой части должен расходиться, что противоречит физике процесса. Отсюда следует, что, как и в классическом случае $\alpha = 0$, значение $s = s_*$ достигается не асимптотически, а при конечном значении координаты ξ , то есть имеется выраженный фронт вытеснения [15].

Теперь рассмотрим асимптотику на левой границе. Переходя в (14) к пределу при $\xi \rightarrow -\infty$ и учитывая первое соотношение из (12), получаем

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} {}_\xi I_\infty^\alpha \left(J'(\varphi) \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = S,$$

где

$$S = \frac{w_0[f(s_c) - f(s_0)] - c\phi(s_c - s_0)}{c^{-\alpha} g_\alpha(s_c)}.$$

Отметим, что в классическом случае $S = 0$ в силу условия $\varphi'(-\infty) = 0$. В среде с памятью всегда $S \neq 0$, поскольку функция Левретта является однозначной [15], и подынтегральное выражение в приведенном выше дробном интеграле не меняет знак при $\xi \in (-\infty, \infty)$. Для стационарного скачка с учетом выражения (13) получаем

$$S = S_s(s_c - s_0), \quad S_s = \frac{w_0 f'(s_c) - c\phi}{c^{-\alpha} g_\alpha(s_c)}. \quad (15)$$

Это уравнение служит для нахождения скорости s , однако выписать его решение в явном виде не представляется возможным.

Далее заметим, что

$$\begin{aligned} {}_{\xi}I_{\infty}^{\alpha}y &\equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\xi}^{\infty} \frac{y(\eta)d\eta}{(\eta - \xi)^{1-\alpha}} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(\eta)d\eta}{|\eta - \xi|^{1-\alpha}} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{y(\eta)d\eta}{(\xi - \eta)^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание условие $\varphi'(-\infty) = 0$, получаем, что второй интеграл в этом случае обращается в нуль, поэтому

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J'(\varphi)}{|\eta - \xi|^{1-\alpha}} d\eta = S.$$

Тогда, с учетом обозначения для левостороннего дробного интеграла

$$-_{\infty}I_{\xi}^{\alpha}y = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{y(\eta)d\eta}{(\xi - \eta)^{1-\alpha}},$$

для достаточно больших отрицательных значений ξ находим

$${}_{\xi}I_{\infty}^{\alpha} \left(J'(\varphi) \frac{d\varphi}{d\xi} \right) \approx S - -_{\infty}I_{\xi}^{\alpha} \left(J'(\varphi) \frac{d\varphi}{d\xi} \right).$$

Подставляя данное представление в уравнение (14) и учитывая конечность значения $J'(s_c)$ получаем, что асимптотическое поведение скачка насыщенности при $\xi \rightarrow -\infty$ описывается линейным уравнением

$$-_{\infty}I_{\xi}^{\alpha} \left(\frac{d\varphi}{d\xi} \right) = A_c(s_c - \varphi) + B_c(s_c - \varphi)^2, \quad (16)$$

где

$$A_c = \frac{S_s g_{\alpha}(s_c) - S g'_{\alpha}(s_c)}{g_{\alpha}(s_c) J'(s_c)}, \quad B_c = \frac{S_s g'_{\alpha}(s_c)}{g_{\alpha}(s_c) J'(s_c)}.$$

Для обычной пористой среды ($\alpha = 0$) имеем $S = 0$, а в случае стационарного скачка и $S_s = 0$. Тогда $A_c = 0$ и правая часть асимптотического уравнения (16) является квадратичной. В теории двухфазной фильтрации этот случай хорошо известен [15]. В случае среды с памятью $S \neq 0$ и для стационарного скачка выполнено (15), при этом $S_s \neq 0$. Тогда $A_c = 0$ только при условии

$$g_{\alpha}(s_c) = g'_{\alpha}(s_c)(s_c - s_0).$$

В результате существует единственная пара (s_c, s_0) , определяющая стационарный скачок и являющаяся решением системы уравнений (13), (16).

Для нестационарного скачка условие (13) уже не выполнено. Тогда при заданном s_c значение s_0 будет определяться уравнением

$$S_s g_{\alpha}(s_c) = S g'_{\alpha}(s_c).$$

Таким образом, в среде с памятью квадратичная правая часть в уравнении (16) возможна только при определенных значениях начальной насыщенности s_0 , однозначно связанных с насыщенностью на скачке s_c . Во всех остальных случаях $A_c \neq 0$ и правая часть асимптотического уравнения (16) будет в главном приближении линейной.

Найдем теперь левую асимптотику скачка в линейном случае. Подстановкой $\psi = s_c - \varphi$ уравнение (16) приводится к виду

$$-_{\infty}I_{\xi}^{\alpha} \left(\frac{d\psi}{d\xi} \right) = -A_c \psi,$$

решением которого является функция

$$\psi(\xi) = C_c e^{\lambda_c \xi}, \quad \lambda_c = (-A_c)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Здесь C_c — постоянная интегрирования, определяемая по условной границе скачка. Решение имеет смысл при $A_c < 0$. В этом случае при $\xi \rightarrow -\infty$ скачок насыщенности асимптотически экспоненциально стремится к $s = s_c$.

Теперь рассмотрим уравнение (16) при условии $A_c = 0$. Выполняя, как и ранее, подстановку $\psi = s_c - \varphi$, приводим это уравнение к виду

$$-_{\infty}I_{\xi}^{\alpha} \left(\frac{d\psi}{d\xi} \right) = -B_c \psi^2.$$

Используя известную [3] формулу дробного интегрирования степенной функции

$$\begin{aligned} -_{\infty}I_{\xi}^{\alpha} (b - a\xi)^{\gamma-1} &= \frac{1}{a^{\alpha}} \frac{\Gamma(1 - \alpha - \gamma)}{\Gamma(1 - \gamma)} (b - a\xi)^{\alpha+\gamma-1}, \\ a > 0, \quad a\xi < b, \quad \alpha + \gamma < 1, \end{aligned}$$

приходим к следующему степенному решению рассматриваемого уравнения:

$$\psi(\xi) = -\frac{1}{B_c} \frac{\Gamma(2 - 2\alpha)}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{1}{(C_c - \xi)^{1-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Здесь, как и ранее, C_c — постоянная интегрирования, задающая условную границу асимптотической области скачка. Таким образом, в этом случае на левой границе скачок имеет степенную асимптотику — так называемый «тяжелый хвост».

4. Приближенное решение дробно-интегрального уравнения Рапопорта–Лиса

В предельном случае $\alpha = 0$ уравнение (14) является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка и легко интегрируется. Это решение хорошо известно (см., например, [15]). При $0 < \alpha < 1$ задача построения решения дробно-дифференциального уравнения (14) становится нетривиальной. Методов нахождения точного решения этого уравнения для случая произвольной функции $F_\alpha(\varphi)$ не существует. Поэтому в настоящей работе построим его приближенное аналитическое решение при некоторых дополнительных ограничениях.

Прежде всего заметим, что функция Леверетта $J(\varphi)$ является однозначной [15]. Тогда уравнение $J(\varphi) = u$ может быть однозначно разрешено относительно φ : $\varphi = J^{-1}(u)$. В результате (14) может быть переписано в виде

$${}_{\xi}I_{\infty}^{\alpha} \left(\frac{du}{d\xi} \right) = \tilde{F}_{\alpha}(u), \quad 0 < \alpha < 1,$$

где $\tilde{F}_{\alpha}(u) = F_{\alpha}(J^{-1}(u))$. В данном случае $u = u(\xi)$ — новая зависимая переменная.

Далее рассмотрим случай, когда параметр α в уравнении (14) близок к нулю, то есть может рассматриваться как малый параметр. Обозначим $\alpha = \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Тогда используя известную [3] формулу разложения дробного интеграла по порядку дробного интегрирования

$$\begin{aligned} ({}_{\xi}I_{\infty}^{\varepsilon}y)(\xi) &= y(\xi) + \\ &+ \varepsilon \left[\gamma y(\xi) + \frac{d}{d\xi} \int_{\xi}^{\infty} \ln(\eta - \xi) y(\eta) d\eta \right] + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

где $\gamma \approx 0,57721566$ — постоянная Эйлера, уравнение (14) с точностью $o(\varepsilon)$ можно приблизить следующим нелинейным интегро-дифференциальным уравнением с малым параметром

$$(1 + \varepsilon\gamma) \frac{du}{d\xi} + \varepsilon \frac{d^2}{d\xi^2} \int_{\xi}^{\infty} \ln(\eta - \xi) u(\eta) d\eta = \tilde{F}_{\alpha}(u). \quad (17)$$

Будем искать решение уравнения (17) в виде $u(\xi) = u_0(\xi) + \varepsilon u_1(\xi) + o(\varepsilon)$. После подстановки этого решения в уравнение (17) и расщепления его по ε , приходим к системе:

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{d\xi} &= \tilde{F}_{\alpha}(u_0), \\ \frac{du_1}{d\xi} - \tilde{F}'_{\alpha}(u_0)u_1 &= -\gamma \tilde{F}_{\alpha}(u_0) - \frac{dL}{d\xi}, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$L(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \ln(\eta - \xi) \tilde{F}_{\alpha}(u_0(\eta)) d\eta.$$

Первое уравнение в (18) легко интегрируется в квадратурах:

$$\int \frac{du_0}{\tilde{F}_{\alpha}(u_0)} = \xi + C_0, \quad (19)$$

где C_0 — произвольная постоянная.

Второе уравнение системы (18) является линейным неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка и решается в явном виде:

$$\begin{aligned} u_1(\xi) &= (C_1 - \gamma\xi) \tilde{F}_{\alpha}(u_0) - L(\xi) - \\ &- \int \frac{\tilde{F}'_{\alpha}(u_0)}{\tilde{F}_{\alpha}(u_0)} L(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, в неявном виде приближенное решение уравнения (14) имеет вид:

$$\varphi(\xi) \approx J^{-1}(u_0(\xi) + \varepsilon u_1(\xi))$$

или

$$\varphi(\xi) \approx J^{-1}(u_0(\xi)) + \varepsilon u_1(\xi) (J^{-1})'(u_0(\xi)),$$

в котором функции u_0 и u_1 определяются соотношениями (19) и (20). Тем самым, для насыщенности построено приближенное решение типа бегущей волны $s(t, x) = \varphi(x - ct)$.

5. Заключение

Полученные в работе результаты исследования процесса двухфазной фильтрации в среде со степенной памятью носят преимущественно качественный характер. Более детальное исследование может быть выполнено методами компьютерного моделирования. При этом интерес будет представлять сравнение численного решения с построенным в работе приближенным аналитическим решением типа бегущей волны с точки зрения границ применимости последнего. Также остается открытым вопрос о характере поведения решения полученного дробно-интегрального уравнения Рапопорта–Лиса в случае конечности коллектора и степени его отличия от решения типа бегущей волны. Приведенные задачи определяют направления ближайших исследований по данной тематике.

Список литературы

- [1] Мирзаджанзаде А.Х., Хасанов М.М., Бахтизин Р.Н. Моделирование процессов нефтегазодобычи. Нелинейность, неравновесность, неопределенность. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 368 с.

- [2] Sahimi M. Flow and transport in porous media and fractured rock: from classical methods to modern approaches. Weinheim: Wiley-VCH, 2011. 733 p.
- [3] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
- [4] Tarasov V.E. Fractional dynamics. Application of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. Heidelberg: Springer, 2010. 504 p.
- [5] Головизнин В.М., Кондратенко П.С., Матвеев Л.В. и др. Аномальная диффузия радионуклидов в сильнонеоднородных геологических формациях. М.: Наука, 2010. 342 с.
- [6] Молокович Ю.М., Осипов П.П. Основы теории релаксационной фильтрации. Казань: Изд-во Казанского университета. 1987. 114 с.
- [7] Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Изд-во «Артишок», 2008. 512 с.
- [8] Metzler R., Klafter J. The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach // Physics Reports. 2000. V. 339, No. 1. Pp. 1–77.
DOI: [10.1016/S0370-1573\(00\)00070-3](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00070-3)
- [9] Bouchaud J.-P., Georges A. Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanics, models and physical applications // Physics Reports. 1990. V. 195, No. 4. Pp. 127–293.
DOI: [10.1016/0370-1573\(90\)90099-N](https://doi.org/10.1016/0370-1573(90)90099-N)
- [10] Caputo M. Diffusion of fluids in porous media with memory // Geothermics. 1999. V. 28, No. 1. Pp. 113–130.
DOI: [10.1016/S0375-6505\(98\)00047-9](https://doi.org/10.1016/S0375-6505(98)00047-9)
- [11] Raghavan R., Chen C. Fractured-Well Performance Under Anomalous Diffusion // SPE Res. Eval. and Eng. 2013. V. 16, No. 3. Pp. 237–245.
DOI: [10.2118/165584-PA](https://doi.org/10.2118/165584-PA)
- [12] Wei Y., He D., Wang J., Qi Y. A coupled model for fractured shale reservoirs with characteristics of continuum media and fractal geometry // SPE Asia Pacific Unconventional Resources Conference and Exhibition, Brisbane, Australia, 9-11 November 2015. 2015. 31 p. SPE-176843-MS.
DOI: [10.2118/176843-MS](https://doi.org/10.2118/176843-MS)
- [13] Obembe A.D., Al-Yousef H.Y., Hossain M.E., Abu-Khamsin S.A. Fractional derivatives and their applications in reservoir engineering problems: A review // J. Petrol. Sci. Eng. 2017. V. 157. Pp. 312–327.
DOI: [10.1016/j.petrol.2017.07.035](https://doi.org/10.1016/j.petrol.2017.07.035)
- [14] Газизов Р.К., Лукашук С.Ю. Дробно-дифференциальный подход к моделированию процессов фильтрации в сложных неоднородных пористых средах // Вестник УГАТУ. 2017. Т. 21, № 4 (78). С. 104–112.
<http://journal.ugatu.su/index.php/Vestnik/article/view/140>
- [15] Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.
- [16] Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Yu. Symmetries and group invariant solutions of fractional ordinary differential equations // In Anatoly Kochubei, Yuri Luchko (Eds.), Fractional Differential Equations. Boston: De Gruyter, 2019. Pp. 65–90.
DOI: [10.1515/9783110571660-004](https://doi.org/10.1515/9783110571660-004)



Fractional-order integral generalization of the Rapoport–Leas equation

Lukashchuk S.Yu.

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

A one-dimensional time-fractional integral model for a two-phase flow through a porous medium with power-law memory in the presence of capillary forces is considered. Based on the time-fractional integral generalization of Darcy's law and the classical mass balance equations for phases, neglecting gravity forces, a time-fractional integral generalization of the Rapoport–Leas equation is derived. It is shown that in the limiting case of constant capillary pressure, the obtained equation coincides with the classical Buckley–Leverett equation. An example of initial boundary value problem for the derived fractional integral equation is given for the case of a finite reservoir. Unlike the classical Rapoport–Leas equation, its time-fractional integral analogue does not have a traveling wave solution in general case. It is due to the fact that the fractional integral with a finite lower limit is not invariant with respect to translations in time. However, for the model problem of two-phase displacement in an unbounded reservoir, considered as a discontinuity breakup problem, the full memory approximation is valid. In this case the obtained equation has a traveling wave solution. In this approximation, relations for the main characteristics of the saturation jump on the shock are obtained. In particular, it is shown that the speed of the shock can be found from an equation that includes the time-fractional integral characteristic of the Leverett function. The behavior of the shock near its left and right boundaries is also asymptotically studied for different saturation levels at the boundaries. It has been proven that if the initial saturation exceeds the residual saturation of the displacing phase, then on the right boundary the saturation at the jump exponentially tends to the initial one. On the left boundary, the asymptotic behavior of the jump is also exponential, with the exception of one special case in which it becomes a fractional power law. For the equation in question, an approximate solution has been analytically constructed for the case of «weak» full memory, when the order of fractional integration is close to zero and can be considered as a small parameter.

Keywords: two-phase flow in porous media, capillary forces, fractional integral, fractional-order integral Darcy's law, transient wave solution, small parameter, approximate solution

References

- [1] Mirzadzhanzade A.Kh., Khasanov M.M., Bakhtizin R.N. [Modeling of oil and gas production processes. Nonlinearity, nonequilibrium, indeterminacy] *Modelirovanie processov neftegazodobychi. Nelinei'nost', neravnovesnost', neopredelennost'*. M.-Izhevsk: Institut of computer science, 2004. 368 p. (in Russian)
- [2] Sahimi M. Flow and transport in porous media and fractured rock: from classical methods to modern approaches. Weinheim: Wiley-VCH, 2011. 733 p.
- [3] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives. Theory and applications. New York: Gordon & Breach Sci. Publishers, 1993. xxxvi+976 p.
- [4] Tarasov V.E. Fractional dynamics. Application of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. Heidelberg: Springer, 2010. 504 p.
- [5] Goloviznin V.M., Kondratenko P.S., Matveev L.V. et al. [Anomalous diffusion of radionuclides in highly disordered geological formations] *Anomal'naya diffuziya v sil'noneodnorodnykh geologicheskikh formatsiyah*. M.: Nauka, 2010. 342 p. (in Russian)
- [6] Molokovich Yu.M., Osipov P.P. [Basis of the theory of relaxation filtration] *Osnovy teorii relaksacionnoi' filtratsii*. Kazan: Izd-vo Kazanskogo universiteta, 1987. 114 p. (in Russian)
- [7] Uchaikin V.V. [Method of fractional derivatives] *Metod grobnykh proizvodnykh*. Ul'yanovsk: Izd-vo «Artishok», 2008. 512 p. (in Russian)
- [8] Metzler R., Klafter J. The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach // *Physics Reports*. 2000. V. 339, No. 1. Pp. 1–77.
DOI: [10.1016/S0370-1573\(00\)00070-3](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00070-3)
- [9] Bouchaud J.-P., Georges A. Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanics, models and physical applications // *Physics Reports*. 1990. V. 195, No. 4. Pp. 127–293.
DOI: [10.1016/0370-1573\(90\)90099-N](https://doi.org/10.1016/0370-1573(90)90099-N)

- [10] Caputo M. Diffusion of fluids in porous media with memory // Geothermics. 1999. V. 28, No. 1. Pp. 113–130.
DOI: [10.1016/S0375-6505\(98\)00047-9](https://doi.org/10.1016/S0375-6505(98)00047-9)
- [11] Raghavan R., Chen C. Fractured-Well Performance Under Anomalous Diffusion // SPE Res. Eval. and Eng. 2013. V. 16, No. 3. Pp. 237–245.
DOI: [10.2118/165584-PA](https://doi.org/10.2118/165584-PA)
- [12] Wei Y., He D., Wang J., Qi Y. A coupled model for fractured shale reservoirs with characteristics of continuum media and fractal geometry // SPE Asia Pacific Unconventional Resources Conference and Exhibition, Brisbane, Australia, 9-11 November 2015. 2015. 31 p. SPE-176843-MS.
DOI: [10.2118/176843-MS](https://doi.org/10.2118/176843-MS)
- [13] Obembe A.D., Al-Yousef H.Y., Hossain M.E., Abu-Khamsin S.A. Fractional derivatives and their applications in reservoir engineering problems: A review // J. Petrol. Sci. Eng. 2017. V. 157. Pp. 312–327.
DOI: [10.1016/j.petrol.2017.07.035](https://doi.org/10.1016/j.petrol.2017.07.035)
- [14] Gazizov R.K., Lukashchuk S.Yu. [Fractional differentiation approach to modeling of fluid filtration processes in complex heterogeneous porous media] *Drobno-differentsial'nyi podhod k modelirovaniyu processov filtratsii v slozhnykh neodnorodnykh poristykh sredah* // Vestnik UGATU. 2017. V. 21, No. 4 (78), Pp. 104–112. (in Russian)
<http://journal.ugatu.su/index.php/Vestnik/article/view/140>
- [15] Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. [Flow of liquids and gases in natural reservoirs] *Dvizhenie zhidkosti i gazov v prirodnykh plastah*. M.: Nedra, 1984. 211 p. (in Russian)
- [16] Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Yu. Symmetries and group invariant solutions of fractional ordinary differential equations // In Anatoly Kochubei, Yuri Luchko (Eds.), *Fractional Differential Equations*. Boston: De Gruyter, 2019. Pp. 65–90.
DOI: [10.1515/9783110571660-004](https://doi.org/10.1515/9783110571660-004)



Исследование собственных функций возмущения радиальной составляющей скорости потока¹

Низамова А.Д.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

Рассмотрено течение термовязкой модельной жидкости в кольцевом канале с заданным температурным полем. Задача об устойчивости течения термовязкой жидкости решается на основе обобщенного уравнения спектральным методом разложения по полиномам Чебышева первого рода. Исследуется влияние учета экспоненциальной зависимости вязкости жидкости от температуры и геометрии канала на спектральные характеристики уравнения гидродинамической устойчивости течения несжимаемой жидкости в кольцевом канале. Численно получены спектры собственных значений. Спектральные характеристики определяют структуру собственных функций и критические параметры течения термовязкой жидкости. При этом собственные функции демонстрируют поведение возмущений поперечной скорости, их возможный рост или затухание с течением времени. Построены графики собственных функций обобщенного уравнения устойчивости течения в кольцевом канале. Показано, что структура спектров в значительной степени зависит как от свойств жидкости, определяемых показателем функциональной зависимости вязкости, так и от геометрии канала. Устойчивость течения термовязкой жидкости зависит от наличия собственного значения с положительной мнимой частью среди всего множества найденных собственных значений при фиксированных параметрах числа Рейнольдса и волнового числа. Установлено, что при малых значениях параметра термовязкости спектр сопоставим спектру для изотермического течения жидкости в плоском канале, однако при его увеличении число собственных значений и их плотность возрастают, то есть существует большее количество точек, при которых задача имеет ненулевые амплитуды возмущений поперечной скорости. Стоит отметить, что разнообразию спектров собственных значений соответствует разнообразие собственных функций, имеющих нетривиальный характер распределения амплитуды осцилляций по сечению в каждом случае. Гладкие кривые получаются для узкого канала, как и для случая плоского канала. Однако при увеличении отношения радиусов канала наблюдается появление «скачков». Также заметим, что собственные функции не обладают признаком симметрии, это следует из того, что профиль скорости в невозмущенном состоянии также не обладает симметрией. Максимальные значения собственных функций смещены вправо от центра канала, что соответствует тому, что возмущения возникают и интенсивно растут вблизи горячей стенки.

Ключевые слова: термовязкая жидкость, гидродинамическая устойчивость, собственные функции, кольцевой канал

1. Введение

В исследованиях устойчивости течений жидкостей в плоских каналах в настоящее время накоплен достаточный задел, однако при изучении этой задачи часто пренебрегают воздействием температурного фактора на смену режима течений. На-

пример, в работах [1–5] численно получено критическое число Рейнольдса равное 5772, при котором течение становится неустойчивым. Однако, в работе [6] выполнен учет температурной зависимости вязкости жидкости. Проведено численное исследование течения водного раствора пропиленгликоля 45 %, имеющего широкое применение в системах отопления промышленных помещений, в плоском канале, и установлено, что критическое число Рейнольдса снижается до 1563 и зависит от функционального вида зависимости вязкости жидкости

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-21-00915).

от температуры. Так как течения жидкостей возникают в различных отраслях промышленности при эксплуатации технических устройств, то в этих случаях важной проблемой является выявление особенностей течений при различных режимах, относительно энергетической эффективности важен ламинарный режим, однако при учете эффективности теплопереноса — турбулентный.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу об устойчивости течения термовязкой жидкости в кольцевом канале с заданным профилем температуры.

Задача гидродинамической устойчивости течения термовязкой жидкости в плоскопараллельном канале с неоднородным температурным полем сводится к обобщенному уравнению Орра–Зоммерфельда [6–8].

Аналогично плоскому случаю рассмотрим течение несжимаемой термовязкой жидкости в кольцевом канале под действием перепада давления с фиксированными внешним и внутренним радиусами канала и нагреваемым внутренним стержнем.

Аналогичными к задаче о гидродинамической устойчивости термовязкой жидкости в плоском канале преобразованиями получим обобщенное уравнение об устойчивости течения жидкости в кольцевом канале:

$$\begin{aligned} \mu_0 \left[\varphi^{IV} + \frac{2}{r} \varphi''' - \frac{3}{r^2} \left(\varphi'' - \frac{1}{r} \varphi' \right) - 2k^2 \left(\varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' \right) \right] - \\ - ik \operatorname{Re} \left[(u_0 - c) \left(\varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' - \left(k^2 + \frac{1}{r^2} \right) \varphi \right) \right] + \\ + \left\{ k^4 + 2 \frac{k^2}{r^2} - \frac{3}{r^4} + ik \operatorname{Re} \left[u_0'' - \frac{u_0'}{r} \right] \right\} \varphi + \\ + \mu_0' \left(2\varphi''' + \frac{3}{r} \varphi'' - \frac{3}{r^2} \varphi' + \frac{1}{r} \left(\frac{3}{r^2} - k^2 \right) \varphi \right) = 0 \end{aligned}$$

с граничными условиями:

$$\varphi(r_1) = \varphi(r_2) = 0, \quad \varphi'(r_1) = \varphi'(r_2) = 0,$$

где r_2 и r_1 — внешний и внутренний радиусы канала; $\mu = \exp(-\alpha T)$ — вязкость жидкости; $\varphi(y)$ — амплитуда возмущения радиальной компоненты скорости; $u_0 = u_0(y)$ — профиль скорости в невозмущенном состоянии; i — мнимая единица; $c = w/k$ — фазовая скорость волны вдоль оси канала (собственное значение); w — частота; k — проекция волнового вектора на ось канала (волновое число); Re — число Рейнольдса. Все параметры представлены в безразмерном виде; $s = \frac{r_2}{r_1} - 1$.

Следует отметить, что вывод представленного выше уравнения осуществлялся при задании

возмущений только на давление и компоненты вектора скорости.

Для решения задачи об устойчивости течения жидкости необходимо найти все собственные значения c , которым соответствуют нетривиальные собственные функции $\varphi(y)$. Тогда критерием неустойчивости, очевидно, будет условие $c_i > 0$: если существует хотя бы одно собственное значение c положительной мнимой частью, то течение является неустойчивым при заданных числе Рейнольдса и волновом числе. Если же все собственные значения имеют неположительную мнимую часть, то течение устойчивое при заданных параметрах.

Условие $c_i = 0$ дает нейтральную кривую, на которой возмущения не растут и не затухают. Минимальное значение числа Рейнольдса на нейтральной кривой называется критическим числом Рейнольдса Re_{cr} .

Согласно теории [5] рассматривается устойчивость течений жидкостей относительно возмущений поперечной скорости, так как они являются самыми «опасными» для турбулизации течения.

3. Результаты численного исследования

Численное исследование выполнялось с помощью спектрального метода разложения по полиномам Чебышева первого рода [6].

Построены собственные функции для собственных значений, которые располагаются на левой ветви, объединяющей моды Эйри (А), включающей единственную неустойчивую моду с положительной мнимой частью собственного значения, и на правой ветви, объединяющей моды Пекериса (Р).

Разнообразие спектров собственных значений [9, 10] соответствует разнообразие собственных функций, имеющих нетривиальный характер распределения амплитуды осцилляций по сечению в каждом случае (рис. 1 и 2). Гладкие кривые получаются для узкого канала, как и для случая плоского канала. Однако при увеличении отношения радиусов канала наблюдается появление «скачков». Стоит отметить, что собственные функции не обладают признаком симметрии, это следует из того, что профиль скорости в невозмущенном состоянии также не обладает симметрией. Максимальные значения собственных функций смещены вправо от центра канала, что соответствует тому, что возмущения возникают и интенсивно растут вблизи горячей стенки.

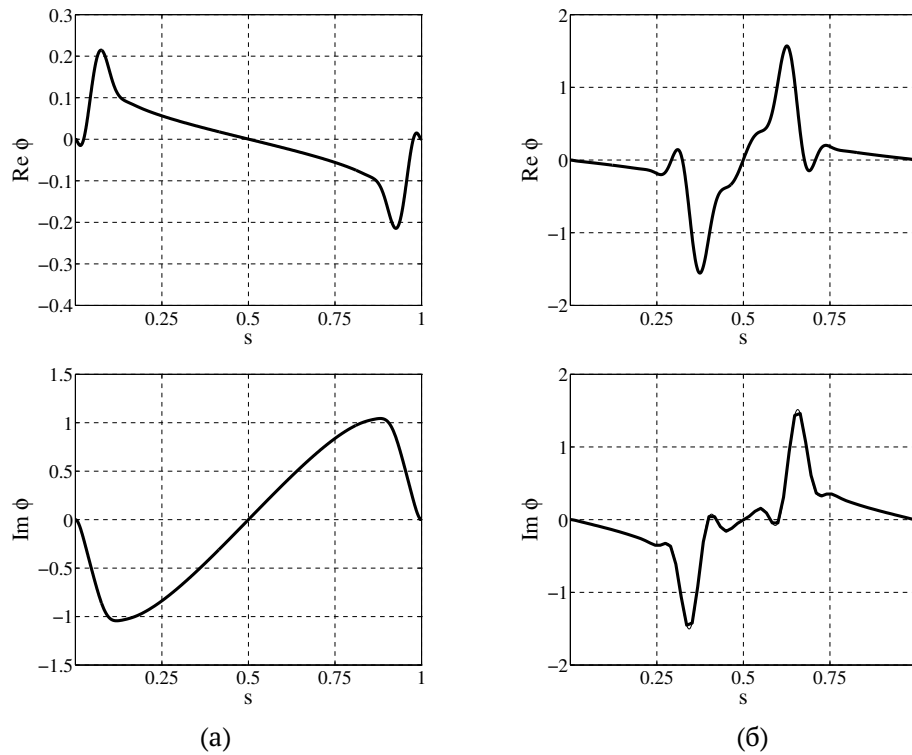


Рис. 1. Собственные функции для $\text{Re} = 10^4$, $k = 1$, $\alpha = 0.001$, $s = 0.001$ и ветвей А (а) и Р (б)

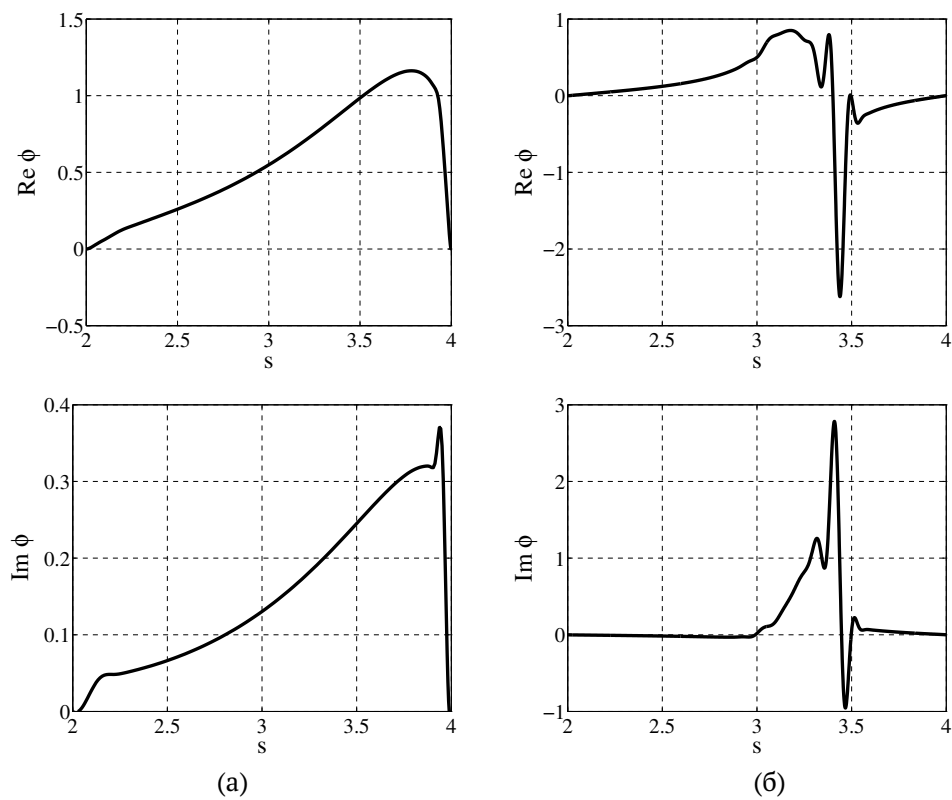


Рис. 2. Собственные функции для $\text{Re} = 10^4$, $k = 1$, $\alpha = 2$, $s = 2$ и ветвей А (а) и Р (б)

4. Заключение

Установлено, что учет зависимости вязкости от температуры значительно влияет на выводы относительно гидродинамической устойчивости, что, безусловно, важно при анализе режимов течения в каналах теплообменников. При одних и тех же значениях чисел Рейнольдса и волновых чисел, описывающих устойчивые режимы течения, увеличение параметра термовязкости и изменение геометрических параметров канала может привести к возникновению как устойчивых, так и неустойчивых режимов. Следует отметить, что при этом происходит и качественное изменение структуры собственных функций.

Список литературы

- [1] Petukhov B.S. Heat transfer and friction in turbulent pipe flow with variable physical properties // *Advances in Heat Transfer*. 1970. V. 6. Pp. 503–564.
DOI: [10.1016/S0065-2717\(08\)70153-9](https://doi.org/10.1016/S0065-2717(08)70153-9)
- [2] Orszag S.A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld equation // *J. of Fluid Mech.* 1971. V. 50. Pp. 689–703.
DOI: [10.1017/S0022112071002842](https://doi.org/10.1017/S0022112071002842)
- [3] Шкаликов А.А. Спектральные портреты оператора Орра–Зоммерфельда при больших числах Рейнольдса // Труды международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям – спутника Международного конгресса математиков ICM-2002 (Москва, МАИ, 11–17 августа 2002). Часть 3. СМФН. 2003. Т. 3. С. 89–112.
<http://mi.mathnet.ru/cmfd17>
- [4] Скороходов С.Л. Численный анализ спектра задачи Орра–Зоммерфельда // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2007. Т. 47, № 10. С. 1672–1691.
<http://mi.mathnet.ru/zvmmf229>
- [5] Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука. 1977. 421 с.
- [6] Nizamova A.D., Murtazina R.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Features of Laminar-Turbulent Transition for the Coolant Flow in a Plane Heat-Exchanger Channel // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021. Vol. 42, No. 9. Pp. 2211–2215.
DOI: [10.1134/S1995080221090249](https://doi.org/10.1134/S1995080221090249)
- [7] Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчиев С.Ф. Влияние зависимости вязкости от температуры на спектральные характеристики уравнения устойчивости течения термовязких жидкостей // *Многофазные системы*. 2019. Т. 14, № 1. С. 52–58.
DOI: [10.21662/mfs2019.1.007](https://doi.org/10.21662/mfs2019.1.007)
- [8] Киреев В.Н., Низамова А.Д., Урманчиев С.Ф. Некоторые особенности гидродинамической неустойчивости течения термовязкой жидкости в плоском канале // *Прикладная математика и механика*. 2019. Т. 83, № 3. С. 454–459.
DOI: [10.1134/S003282351903007X](https://doi.org/10.1134/S003282351903007X)
- [9] Низамова А.Д., Киреев В.Н., Урманчиев С.Ф. Исследование спектральных характеристик течения термовязкой жидкости в кольцевом канале // *Многофазные системы*. 2022. Т. 17, № 3–4. С. 187–191.
DOI: [10.21662/mfs2022.3.017](https://doi.org/10.21662/mfs2022.3.017)
- [10] Nizamova A.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Influence of Temperature Dependence of Viscosity on the Stability // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023. V. 44, No. 5. Pp. 1778–1784.
DOI: [10.1134/S1995080223050463](https://doi.org/10.1134/S1995080223050463)



Investigation of eigenfunctions of perturbation of the radial component of flow velocity

Nizamova A.D.

Mavlyutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Ufa, Russia

The flow of a thermoviscous model fluid in an annular channel with a given temperature field is considered. The problem of the stability of the flow of a thermoviscous fluid is solved on the basis of a generalized equation by the spectral method of expansion in Chebyshev polynomials of the first kind. The influence of taking into account the exponential dependence of fluid viscosity on temperature and channel geometry on the spectral characteristics of the equation of hydrodynamic stability of incompressible fluid flow in an annular channel is investigated. The eigenvalue spectra were obtained numerically. The spectral characteristics determine the structure of the eigenfunctions and the critical parameters of the flow of a thermoviscous fluid. In this case, the eigenfunctions demonstrate the behavior of transverse velocity disturbances, their possible growth or decay over time. Graphs of the eigenfunctions of the generalized flow stability equation in an annular channel have been constructed. It is shown that the structure of the spectra largely depends on both the properties of the liquid, determined by the functional dependence of viscosity, and on the geometry of the channel. The stability of the flow of a thermoviscous fluid depends on the presence of an eigenvalue with a positive imaginary part among the entire set of found eigenvalues for fixed parameters of the Reynolds number and wave number. It has been established that at small values of the thermoviscosity parameter the spectrum is comparable to the spectrum for isothermal fluid flow in a flat channel, however, as it increases, the number of eigenvalues and their density increase, that is, there are a greater number of points at which the problem has non-zero amplitudes of transverse velocity disturbances. It is worth noting that the diversity of eigenvalue spectra corresponds to the diversity of eigenfunctions, which have a nontrivial distribution of the oscillation amplitude over the cross section in each case. Smooth curves are obtained for a narrow channel, as for the case of a flat channel. However, as the ratio of the channel radii increases, “jumps” appear. Also, note that the eigenfunctions do not have the property of symmetry; this follows from the fact that the velocity profile in the unperturbed state also does not have symmetry. The maximum values of the eigenfunctions are shifted to the right from the center of the channel, which corresponds to the fact that disturbances arise and grow intensively near the hot wall.

Keywords: thermoviscous liquid, hydrodynamics instability, eigenfunctions, annular channel

References

- [1] Petukhov B.S. Heat transfer and friction in turbulent pipe flow with variable physical properties // *Advances in Heat Transfer*. 1970. V. 6. Pp. 503–564.
DOI: [10.1016/S0065-2717\(08\)70153-9](https://doi.org/10.1016/S0065-2717(08)70153-9)
- [2] Orszag S.A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld equation // *J. of Fluid Mech.* 1971. V. 50. Pp. 689–703.
DOI: [10.1017/S0022112071002842](https://doi.org/10.1017/S0022112071002842)
- [3] Shkalikov A.A. Spectral portraits of the Orr–Sommerfeld operator for large Reynolds numbers // *Journal of Mathematical Sciences*. 2004. Vol. 124(6). Pp. 5417–5441.
DOI: [10.1023/B:JOTH.0000047362.09147.c7](https://doi.org/10.1023/B:JOTH.0000047362.09147.c7)
- [4] Skorohodov S.L. Numerical analysis of the spectrum of the Orr–Sommerfeld problem // *Computational mathematics and mathematical physics*. 2007. Vol. 47. Issue 10. Pp. 1603–1621.
- [5] Gol'dshtik M.A., Shtern V.N. [Hydrodynamic stability and turbulence] Novosibirsk: Nauka. 1977. 421 p. (in Russian).
- [6] Nizamova A.D., Murtazina R.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Features of Laminar-Turbulent Transition for the Coolant Flow in a Plane Heat-Exchanger Channel // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021. Vol. 42, No. 9. Pp. 2211–2215.
DOI: [10.1134/S1995080221090249](https://doi.org/10.1134/S1995080221090249)
- [7] Nizamova A.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Influence of viscosity temperature dependence on the spectral characteristics of the thermoviscous liquids flow stability equation // *Multiphase systems*. 2019. Vol. 14, No. 1. Pp. 52–58.
DOI: [10.21662/mfs2019.1.007](https://doi.org/10.21662/mfs2019.1.007)
- [8] Kireev V.N., Nizamova A.D., Urmancheev S.F. [Some features of the hydrodynamic instability of the flow of a thermally viscous fluid in a flat channel] *Prikladnaya mexanika i matematika*. 2019. Vol. 83, No. 3. Pp. 454–459 (in Russian).
DOI: [10.1134/S003282351903007X](https://doi.org/10.1134/S003282351903007X)

- [9] Nizamova A.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Research of the spectral characteristics of the thermoviscous fluid flow in an annular channel // *Multiphase systems*. 2022. Vol.17, No. 3–4. Pp. 187–191
[DOI: 10.21662/mfs2022.3.017](https://doi.org/10.21662/mfs2022.3.017)
- [10] Nizamova A.D., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Influence of Temperature Dependence of Viscosity on the Stability // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023. V. 44, No. 5. Pp. 1778–1784.
[DOI: 10.1134/S1995080223050463](https://doi.org/10.1134/S1995080223050463)



Исследование влияния температурной зависимости вязкости на течение жидкости в кольцевых каналах¹

Мухутдинова А.А.

Уфимский университет науки и технологий, Уфа

Для всех жидкостей характерно изменение вязкости в зависимости от температуры. В большинстве случаев данной зависимостью принято пренебрегать, однако при исследовании течения жидкостей в условиях интенсивного теплообмена температурная зависимость вязкости может оказать значительное влияние на процессы переноса массы и тепла. Следует отметить, что для некоторых жидкостей, таких как полимерные растворы или биологические жидкости, температурная зависимость вязкости может быть крайне сложной и нелинейной. В таких случаях игнорирование данной зависимости может привести к получению неточных результатов и ошибкам. Кольцевые каналы находят широкое применение в различных технических системах, включая теплообменники и гидравлические устройства. Понимание факторов, влияющих на процесс течения жидкости и расход в таких каналах, является ключевым аспектом оптимизации их проектирования и эксплуатации. Одним из основных факторов, оказывающих влияние на процесс течения и расход жидкости в кольцевых каналах, является температурная зависимость вязкости жидкости. В настоящей работе исследовано влияние термовязкого параметра монотонной и немонотонной температурных зависимостей вязкости и геометрического параметра кольцевого канала на процесс течения и расход жидкости. Математическая модель включает в себя уравнение неразрывности, уравнения Навье–Стокса и уравнение для температуры. Для численного решения этих уравнений применялись метод контрольного объема и алгоритм SIMPLE, который был модифицирован для учета переменного коэффициента вязкости. Показано, что при течении жидкости в кольцевом канале с монотонной зависимостью вязкости от температуры установившееся значение расхода близко к расходу при максимальной вязкости. Однако в случае жидкости с немонотонной зависимостью вязкости от температуры расход существенно зависит от параметра термовязкости.

Ключевые слова: кольцевой канал, термовязкая жидкость, расход жидкости

1. Введение

Вязкость жидкости — это ключевой параметр, влияющий на эффективность технологических процессов, таких как перекачивание нефти, производство полимеров и металлургические операции. Поэтому изучение температурной зависимости вязкости при течении жидкости в кольцевых каналах является актуальной задачей для научных и инженерных областей. Обычно с ростом температуры вязкость жидкостей уменьшается и опи-

сывается экспоненциально убывающей функцией. Однако некоторые вещества имеют аномальную температурную зависимость вязкости, связанную с процессами полимеризации и деполимеризации, например, жидкой серы, растворов полимеров, расплавов металлов и особенно вязкой нефти.

Изучение течения жидкостей в кольцевых каналах, вязкость которых зависит от температуры, имеет важнейшее значение для различных инженерных приложений, таких как теплообменники, трубопроводы и реакторы [1–3]. Это сложное явление зависит от множества факторов, включая геометрию канала, скорость течения, температуру и вязкость жидкости.

¹Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда в рамках проекта № 22-21-00915.

2. Постановка задачи

Рассматривается ламинарное течение несжимаемой жидкости с переменной вязкостью (т.е. жидкость, вязкость которой зависит от температуры) в кольцевом канале, образованном двумя соосными круговыми цилиндрами разных радиусов. Течение происходит под действием фиксированного перепада давления ΔP . Длину канала обозначим через L , а его ширину — h ($h = R - r_0$, где R — внешний радиус; r_0 — внутренний радиус кольцевого канала). Температура стенок канала — T_0 , втекающей жидкости — T_w . На рис. 1 показаны геометрия кольцевого канала и выбранная осесимметричная цилиндрическая система координат.

Математическая модель, которая включает в себя уравнение неразрывности, уравнения Навье–Стокса [4] и уравнение для температуры, представлена в цилиндрических координатах с учетом осевой симметрии и записана в безразмерной форме следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} &= 0, \\ \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \\ &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu(T) \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu(T) \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \frac{\mu(T)}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\mu(T)}{r^2} u_r \right), \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} &= \\ &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu(T) \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu(T) \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{\mu(T)}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} &= \frac{1}{\text{Pe}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right). \end{aligned}$$

где u_r и u_z — радиальная и осевая компоненты скорости; P — давление в канале; μ — коэффициент динамической вязкости жидкости; T — температура; Re — число Рейнольдса; Pe — число Пекле.

Во входном ($z = 0$) и выходном ($z = L/R$) сечениях кольцевого канала задаются фиксированные значения давления, а на стенках ($r = r_0/R$, $r = 1$) — условия прилипания для скорости, так что граничные условия для давления и компонент вектора скорости имеют вид:

$$p(0) = 1, p(1) = 0,$$

$$u_r(r_0/R, z) = u_r(R, z) = u_z(r_0/R, z) = u_z(R, z).$$

Температура на входе в канал задается постоянной ($T(r, 0) = 1$), на выходе — $\partial T / \partial z = 0$, а

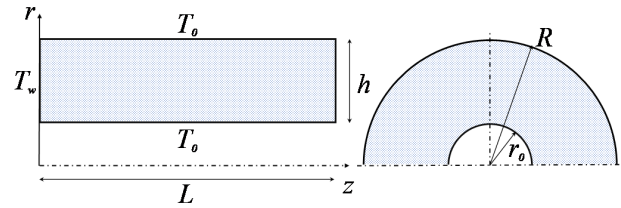


Рис. 1. Геометрия канала

на стенках канала задаются граничные условия первого рода:

$$T(r_0/R, z) = T(1, z) = 0.$$

В начальный момент времени жидкость в канале покоится и имеет постоянную температуру:

$$u_r(r, z) = u_z(r, z) = 0,$$

$$p(r, z) = 0, T(r, z) = 0.$$

Функция $\mu = \mu(T)$, включенная в уравнение, описывает зависимость вязкости жидкости от температуры. В настоящей работе рассматриваются два типа такой зависимости:

– монотонная зависимость вязкости от температуры (рис. 2)

$$\mu(T) = \exp(-\alpha T),$$

которая характерна для большинства жидкостей, таких как вода, масло, пропиленгликоль и другие;

– немонотонная (аномальная) зависимость вязкости от температуры (рис. 3)

$$\mu(T) = \exp(-\beta (T - 0.5)^2),$$

где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ — параметры, описывающие характер изменения вязкости. К аномально вязким жидкостям относятся сера, жидкий фосфор, растворы и расплавы полимеров и т.д.

3. Результаты и их обсуждение

Уравнения математической модели решались численно с использованием метода контрольного объема и алгоритма SIMPLE [5], модифицированных для учета переменного коэффициента вязкости. Оригинальный компьютерный код реализован на языке программирования C++ в кроссплатформенной среде разработки Qt Creator.

Рассматриваются каналы с разным соотношением h/r_0 , внешний радиус канал R при этом остается постоянным. Будем считать канал сильно удлиненным ($L \gg h$). Расчеты проводились при следующих значениях безразмерных параметров.

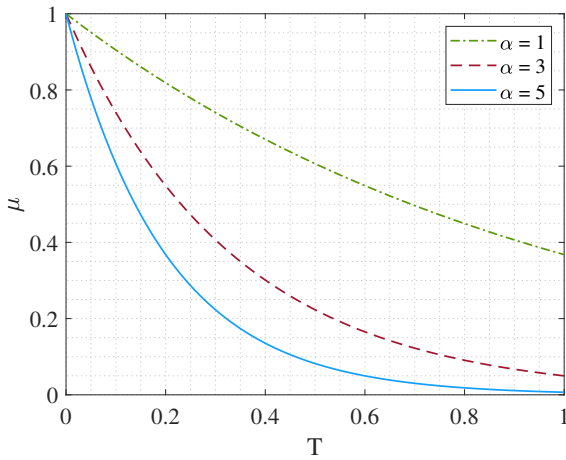


Рис. 2. Монотонная зависимость вязкости от температуры

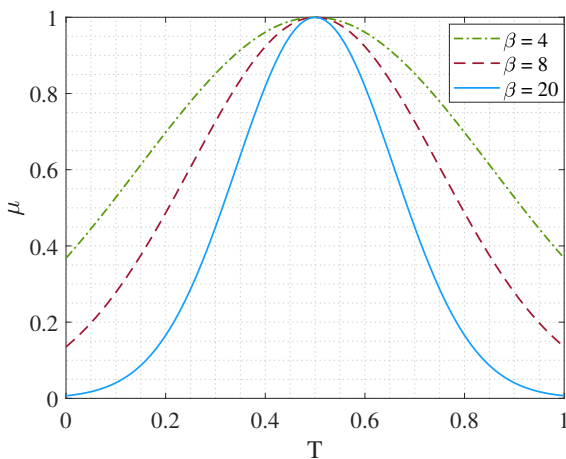


Рис. 3. Немонотонная зависимость вязкости от температуры

Рассматриваются кольцевые каналы с отношением высоты канала к внутреннему радиусу h/r_0 от 0.2 до 4, число $Re = 104$ и число $Pe = 940.5$, температура втекающей жидкости $T_0 = 1$, температура стенок канала $T_w = 0$. Размер R внешнего цилиндра кольцевого канала выбран в качестве характерной величины. Следовательно, поиск решения системы уравнений осуществляется внутри прямоугольной области, показанной на рис. 1. Для более удобного представления результатов введены новые переменные r и z , принимающие значения от 0 до 1. Они связаны с исходными пространственными переменными следующими соотношениями: $r = (Rr - r_0)/(R - r_0)$, $z = Rz/L$.

Рассмотрим случай течения термовязкой жидкости в кольцевом канале. На рис. 4 представлено установившееся распределение монотонной зави-

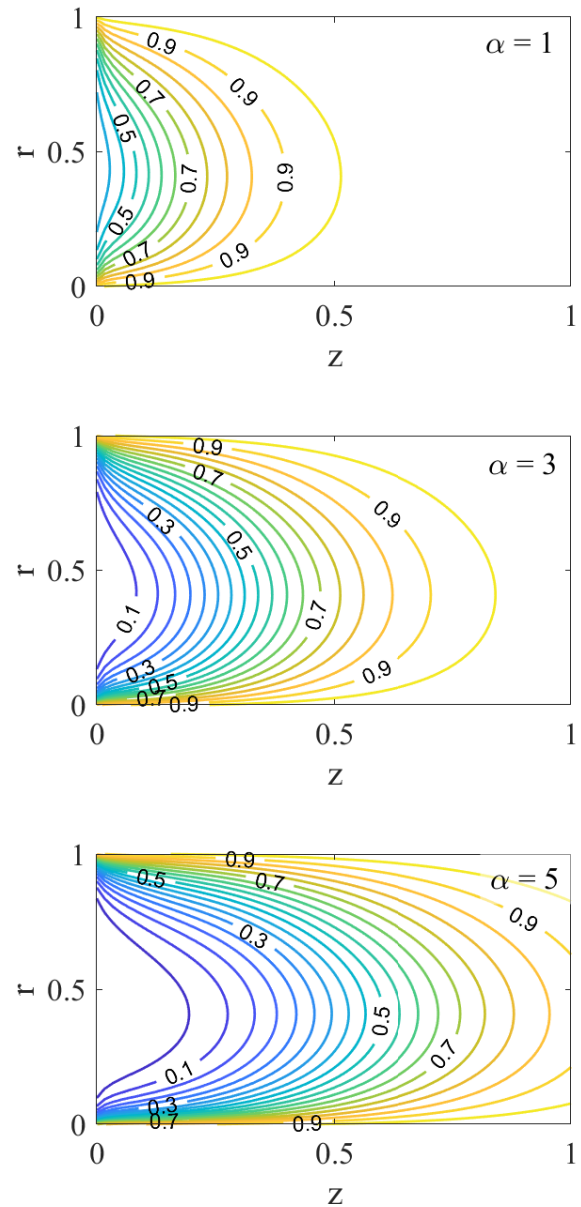


Рис. 4. Распределение вязкости в кольцевом канале при $\alpha = 1$, $\alpha = 3$, $\alpha = 5$

симости вязкости для трех различных значений параметра термовязкости α при установленном геометрическом соотношении $h/r_0 = 4$. Из рисунка видно, что увеличение значения параметра α существенно влияет на распределение вязкости внутри канала. Этот эффект становится особенно выраженным при $\alpha = 5$, что указывает на значительную чувствительность течения к изменению данного параметра.

Далее рассмотрим влияние термовязкого параметра на течение жидкости с немонотонной за-

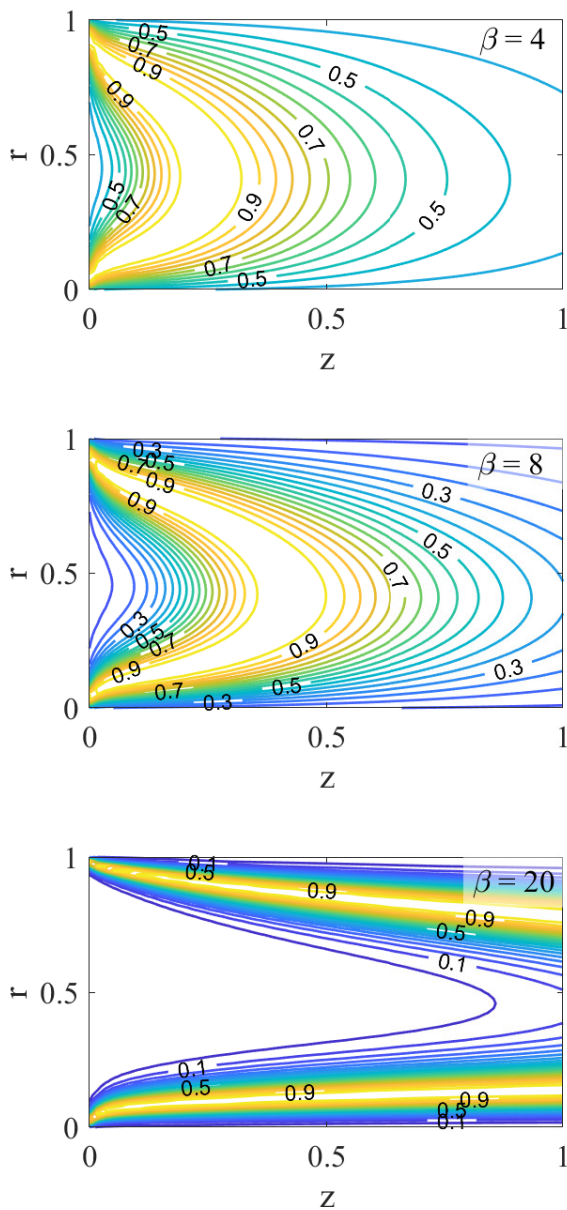


Рис. 5. Распределение вязкости в кольцевом канале при $\beta = 4, \beta = 8, \beta = 20$

висимостью вязкости от температуры. На рис. 5 представлено установившееся распределение вязкости для трех различных значений параметра β в кольцевом канале при фиксированном соотношении $h/r_0 = 4$. В результате такой зависимости образуется высоковязкая зона, которую мы можем назвать «вязким барьером» [6]. Из рисунка видно, что варьирование параметра β приводит к образованию вязкого барьера разной формы и его различному расположению внутри канала. Напри-

мер, при значениях $\beta = 4$ и 8 вязкий барьер полностью располагается в расчетной области канала. Однако, при $\beta = 20$ наблюдается эффект «разрыва» вязкого барьера, при котором он локализуется в пристеночной области канала, а в области с минимальной вязкостью скорость достигает максимального значения.

Слабо выраженная асимметрия в форме распределения вязкости (как в случае с монотонной, так и с немонотонной зависимостью) связана с разницей между внутренним и внешним радиусами кольцевого канала. Эта разница в радиусах может оказать значительное влияние на размер и форму распределения вязкости, что подтверждается результатами исследований [7]. Разное распределение вязкости в рассмотренных случаях свидетельствует о различном распределении температуры и компонент скоростей внутри кольцевого канала [8], которые в свою очередь влияют на расход жидкости.

Зависимость безразмерного расхода жидкости от параметров α и h/r_0 в случае монотонной зависимости вязкости представлена на рис. 6. Также на графике приведены результаты расчетов при постоянных значениях вязкости μ_{\min} и μ_{\max} . Из рисунка видно, что значения расхода жидкости, полученные при минимальном значении вязкости μ_{\min} и обозначенные кривой черного цвета, лежат значительно выше, это обусловлено тем, что в данном случае распределение температуры не влияет на вязкость жидкости, и расход зависит только от геометрических параметров, как и при μ_{\max} .

Также заметно, что значения расхода жидкости в интервале отношения h/r_0 от 0.2 до 1 зависят исключительно от геометрических параметров и не зависят от температурной зависимости вязко-

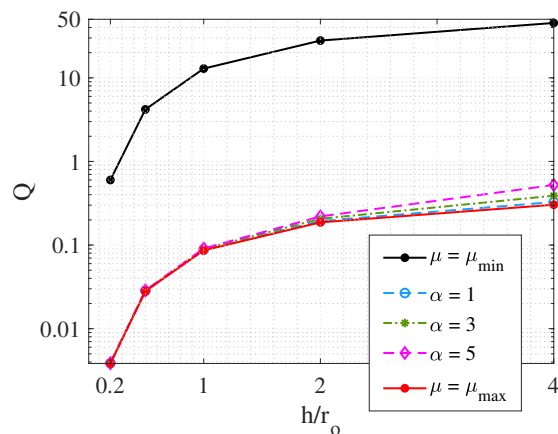


Рис. 6. Зависимость расхода жидкости от геометрии канала и параметра термовязкости α

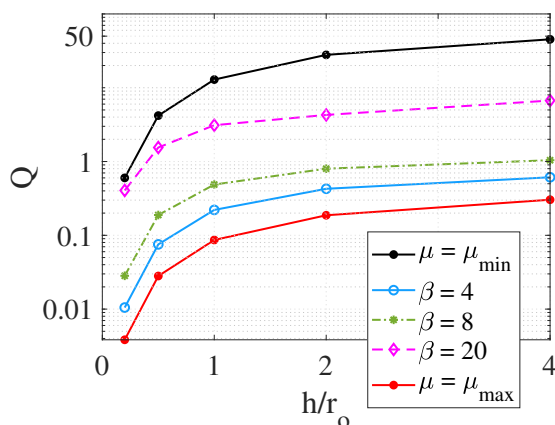


Рис. 7. Зависимость расхода жидкости от геометрии канала и параметра термовязкости β

сти жидкости. Это объясняется тем, что жидкость начинает охлаждаться в начале канала, и весь канал заполняется жидкостью с постоянной максимальной вязкостью. В диапазоне отношения h/r_0 от 1 до 4 начинает проявляться влияние термовязкого параметра на расход жидкости в кольцевом канале, и при увеличении параметра α расход жидкости увеличивается.

На рис. 7 представлена зависимость расхода, выраженного в безразмерных единицах, от геометрии кольцевого канала и параметра β при течении аномально термовязкой жидкости. График показывает, что с увеличением параметра β расход жидкости также увеличивается. Это связано с тем, что при увеличении параметра термовязкости уменьшается минимальное значение вязкости (как показано на рис. 3), что влияет на форму и расположение вязкого барьера и, соответственно, на расход жидкости. Из графика видно, что значения расхода в канале при $h/r_0 = 0.2$ и $\beta = 20$ практически совпадают, так как вязкий барьер формируется и покидает расчетную область, не влияя на последующее течение. В остальных случаях вязкий барьер частично или полностью остается в расчетной области и оказывает влияние на характеристики течения, такие как температура, скорость, давление и расход.

4. Заключение

В работе было исследовано течение термовязкой жидкости в кольцевом канале и показано, что гидродинамические особенности течения связаны с видом зависимости вязкости от температуры и определяются размером и формой высоковязкой области, образующейся в канале. При фиксированном перепаде давления расход жидкости нелинейно возрастает с увеличением относительной ширины кольцевого канала.

Более того, получено, что при течении жидкости с монотонной зависимостью вязкости от температуры установившееся значение расхода близко к расходу с максимальной вязкостью, в то время как расход жидкости с немонотонной зависимостью вязкости от температуры существенно зависит от параметра термовязкости. Эти результаты подчеркивают важность учета как геометрических, так и реологических параметров при анализе течения жидкости в кольцевых каналах.

Список литературы

- [1] Cao Y., Li R. A liquid plug moving in an annular pipe-Flow analysis // *Physics of Fluids*. 2018. V. 30, No. 9. P. 093605. DOI: [10.1063/1.5050258](https://doi.org/10.1063/1.5050258)
- [2] Bagheri E., Wang B.C. Effects of radius ratio on turbulent concentric annular pipe flow and structures // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2020. V. 86. P. 108725. DOI: [10.1016/j.ijheatfluidflow.2020.108725](https://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2020.108725)
- [3] Lu G., Wang J. Experimental investigation on heat transfer characteristics of water flow in a narrow annulus // *Applied Thermal Engineering*. 2008. V. 28, No. 1. P. 8–13. DOI: [10.1016/j.applthermaleng.2007.03.019](https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2007.03.019)
- [4] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть 2. М.: Физматлит, 1963. 728 с.
- [5] Patankar S.V. Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere Publ. Corp., New York. 1980. Т. 58. P. 288.
- [6] Урманчев С.Ф., Киреев В.Н. Установившееся течение жидкости с температурной аномалией вязкости // *Доклады Академии наук*. 2004. Т. 396, № 2. С. 204–207. EDN: OPSUST
- [7] Мухутдинова А.А., Киреев В.Н., Урманчев С.Ф. Влияние переменных теплофизических свойств на течение вязкой жидкости в кольцевом канале // *Вестник Башкирского университета*. 2022. Т. 27, № 4. С. 847–851. DOI: [10.33184/bulletin-bsu-2022.4.6](https://doi.org/10.33184/bulletin-bsu-2022.4.6)
- [8] Mukhutdinova A.A., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Influence of variable thermophysical properties on the flow of fluids in an annular channel under intensive heat exchange // *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*. 2023. Т. 16, № 1.1. С. 269–274. DOI: [10.18721/JPM.161.145](https://doi.org/10.18721/JPM.161.145)



Study of the influence of temperature dependent viscosity on fluid flow in annular channels

Mukhutdinova A.A.

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

For all liquids, a change in viscosity depending on temperature is characteristic. In most cases, this dependency is commonly overlooked; however, when studying the flow of liquids under conditions of intense heat exchange, the temperature-dependent viscosity can have a significant impact on mass and heat transfer processes. It should be noted that for some liquids, such as polymer solutions or biological fluids, the temperature dependence of viscosity can be extremely complex and nonlinear. In such cases, ignoring this dependence can lead to inaccurate results and errors. Annular channels find wide applications in various technical systems, including heat exchangers and hydraulic devices. Understanding the factors influencing the fluid flow and discharge in such channels is a key aspect of optimizing their design and operation. One of the main factors influencing the flow process and fluid discharge in annular channels is the temperature-dependent viscosity of the fluid. This work investigates the influence of the thermo-viscous parameter with monotonic and non-monotonic temperature-dependent viscosity, as well as the geometric parameter of the annular channel on the fluid flow process and discharge. The mathematical model includes the continuity equation, Navier-Stokes equations, and the temperature equation. The method of control volume and the SIMPLE algorithm, modified to account for the variable viscosity coefficient, were applied for the numerical solution of these equations. It is shown that in the case of liquid flow in an annular channel with a monotonic dependence of viscosity on temperature, the steady-state discharge closely approaches the discharge at maximum viscosity. However, in the case of a liquid with non-monotonic viscosity dependence on temperature, the discharge significantly depends on the thermo-viscous parameter.

Keywords: annular channel, thermoviscous fluid, fluid flow

References

- [1] Cao Y., Li R. A liquid plug moving in an annular pipe-Flow analysis // *Physics of Fluids*. 2018. V. 30, No. 9. P. 093605. DOI: 10.1063/1.5050258
- [2] Bagheri E., Wang B.C. Effects of radius ratio on turbulent concentric annular pipe flow and structures // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2020. V. 86. P. 108725. DOI: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2020.108725
- [3] Lu G., Wang J. Experimental investigation on heat transfer characteristics of water flow in a narrow annulus // *Applied Thermal Engineering*. 2008. V. 28, No. 1. P. 8–13. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2007.03.019
- [4] Kochin N.E., Kibel I.A., Roze N.V. *Theoretical Hydrodynamics*. Part 2. Moscow: Phizmatlit, 1963. P. 728.
- [5] Patankar S.V. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere Publ. Corp., New York. 1980. T. 58. P. 288.
- [6] Urmancheev S.F., Kireev V.N. Steady flow of a fluid with an anomalous temperature dependence of viscosity // *Doklady Physics. Nauka/Interperiodica*. 2004. V. 49. P. 328–331. DOI: 10.1134/1.1763627
- [7] Mukhutdinova A.A., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Influence of variable thermophysical properties on the flow of viscous liquid in a circular channel // *Bulletin of Bashkir University*. 2022. V. 27, No. 4. P. 847–851. DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2022.4.6
- [8] Mukhutdinova A.A., Kireev V.N., Urmancheev S.F. Influence of variable thermophysical properties on the flow of fluids in an annular channel under intensive heat exchange // *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*. 2023. T. 16, № 1.1. C. 269–274. DOI: 10.18721/JPM.161.145



Конкурс научных докладов молодых ученых и аспирантов Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, 2023 год (аннотации докладов)

Никонова Р.Ф.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

1. Моделирование течения жидкости с температурной зависимостью вязкости в кольцевых каналах

Мухутдинова Айгуль Айратовна, и.о. инженера-исследователя ИМех УФИЦ РАН
Руководитель — г.н.с., д.ф.-м.н. С.Ф. Урманчеев
1 место

В работе описывается важность изучения течения термовязких жидкостей в кольцевых каналах. Представлена математическая модель, которая позволяет определить влияние температурной зависимости вязкости на характер течения жидкости в условиях теплообмена с окружающей средой. Результаты численного исследования показали, что интенсивность теплообмена влияет на структуру высоковязких зон, определяющих характер течения жидкости и ее расход.

2. Моделирование термодинамической модели магматических процессов

Ямлихина Ирина Наилевна, аспирант ИМех УФИЦ РАН
Руководитель — с.н.с., к.ф.-м.н. К.В. Мусеев
2 место

В работе рассматривается течение термовязкой жидкости в цилиндрическом канале для различных типов функций вязкости при совместном решении задачи сопряженного теплообмена канала с окружающим материалом. Рассмотрена модель цилиндрического канала с протекающей внутри термовязкой жидкостью с заданными скоростью и вязкостью. Методология процесса заключается в применении системы модельных уравнений, описывающей динамику процессов течения термовязкой жидкости и основанной на законах сохранения энергии фаз, уравнении неразрывности, уравнении сохранения количества движения в форме Навье–Стокса с учетом сопряженного теплообмена и уравнении теплообмена для твердого тела. Численная реализация модельных представлений реализована с применением цифрового пакета Comsol Multiphysics. Получены профили скорости и температуры в поперечном сечении канала. Показано влияние функции вязкости на профиль течения, а также на количественные характеристики пото-

ка и теплообмена. Проведен анализ зависимости характера профилей скорости и температуры от вязкости жидкости и типа зависимости вязкости от температуры. Результатом проделанной работы являются найденные особенности и закономерности, возникающие в процессе сопряженного теплообмена термовязкой жидкости в цилиндрическом канале при сравнении линейной и экспоненциальной зависимостей вязкости от температуры. Проведен анализ полученных зависимостей вязкости и температуры в профиле потока, значения максимальной скорости потока. Показано, что вязкое трение вызывает локальное повышение температуры вблизи стенок трубы с последующим увеличением скорости жидкости из-за уменьшения вязкости. Полученные результаты являются базовыми для дальнейшего развития данной темы и будут использованы для решения новых задач в области моделирования потока термовязкой жидкости и сопряженного теплообмена.

3. Математическое моделирование дисперсных потоков в вихревой трубе

Баширова Карина Ильдаровна, аспирант ИМех УФИЦ РАН

*Руководитель — с.н.с., к.ф.-м.н. К.И. Михайленко
3 место*

В работе рассмотрен процесс сепарации сферических частиц, последовательно покидающих канал вихревой трубы. Исследована зависимость времени, начиная с которого частицы покидают канал, от их плотности. Оценена возможность использования стохастической поправки для моделирования турбулентности уточнения поведения частиц и различных моделей взаимодействия частиц.

4. Отражение и преломление косо́й волны на границе раздела «вода – песок, насыщенный водой или газогидратом»

Каримова Гульназ Римовна, аспирант ИМех УФИЦ РАН

*Руководитель — д.ф.-м.н. Э.В. Галиакбарова
3 место*

Рассмотрена задача об отражении и преломлении акустической волны при косом падении на границу раздела «вода – песок, насыщенный водой или газогидратом». Математическая модель включает в себя уравнения для потенциалов скорости падающей и отраженной волн, а также прошедших в песок продольной и поперечной волн. Записаны компоненты вектора смещения частиц среды,

волновые числа волн, дополненные граничными условиями. Аналитически получены коэффициенты отражения падающей волны от границы раздела, а также коэффициенты прохождения продольной и поперечной волн в песок. Проведен анализ влияния углов падения звуковой волны на модули коэффициентов отражения и прохождения при разной насыщенности песка водой или газогидратом. Построена динамика сигнала вблизи границы раздела с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье.

5. Гидравлическая задача потокораспределения на графах

Привалов Лаврентий Юрьевич, аспирант ИМех УФИЦ РАН

*Руководитель — с.н.с., к.ф.-м.н. К.И. Михайленко
3 место*

Предложен алгоритм моделирования неустановившегося течения в разветвленной гидравлической системе, предназначенный для решения нестационарной модификации интеграла Бернулли, использующий в своей основе графы. Реализована программа для проверки алгоритма. Проанализированы устойчивость и сходимость системы. Предложены дальнейшие пути развития и решения вопросов сходимости и вырождения при определенных условиях.

6. Динамика волн давления в жидкости, содержащей несколько пузырьковых зон

Юсупова Рушана Усмановна, аспирант ИМех УФИЦ РАН

Руководитель — с.н.с., к.ф.-м.н. М.Н. Галимзянов

Рассматривается динамика нелинейных двумерных волн давления в жидкости, содержащей несколько пузырьковых зон конечных размеров. Представлены результаты воздействия волновых импульсов на твердую стенку, частично покрытую пузырьковой завесой.

7. Течение термовязкой жидкости в канале с каверной

Бадретдинова Рузиля Рустамовна, аспирант ИМех УФИЦ РАН

Руководитель — г.н.с., д.ф.-м.н. С.Ф. Урманчеев

В настоящей работе рассматривается течение жидкости в канале с каверной при наличии зависимости вязкости от температуры, что представляет значительный практический интерес, так как каналы являются основным элементом в теплообменных устройствах.

Содержание

Механика жидкости и газа

Хабиров С.В.

Задачи группового анализа. Законы сохранения 45–49

Насибуллаева Э.Ш.

Численный анализ полного сечения рассеяния на множестве звукопроницаемых сфер 50–57

Лукащук С.Ю.

Дробно-интегральное обобщение уравнения Рапопорта–Лиса 58–67

Краткие сообщения

Низамова А.Д.

Исследование собственных функций возмущения
радиальной составляющей скорости потока 68–73

Мухутдинова А.А.

Исследование влияния температурной зависимости вязкости
на течение жидкости в кольцевых каналах 74–79

Заметки ИМех

Никонорова Р.Ф.

Конкурс научных докладов молодых ученых и аспирантов
Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН,
2023 год (аннотации докладов) 80–81

Contents

Liquid & Gas Mechanics

Khabirov S.V.

Group analysis tasks. Conservation laws 45–49

Nasibullaeva E.Sh.

Numerical analysis of the total scattering cross section on a set of sound-permeable spheres 50–57

Lukashchuk S.Yu.

Fractional-order integral generalization of the Rapoport–Leas equation 58–67

Brief Communications

Nizamova A.D.

Investigation of eigenfunctions of perturbation of the radial component of flow velocity 68–73

Mukhutdinova A.A.

Study of the influence of temperature dependent viscosity on fluid flow in annular channels 74–79