

ISSN: 2658–5782

Номер 1

2023

# МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

[mfs.uimech.org](https://mfs.uimech.org)





## Коллапсирующие движения двухатомного газа, плотность которого зависит только от времени<sup>1</sup>

Гумеров И.И.\* , Каташова А.А.\* , Юлмухаметова Ю.В.\*\*

\* Уфимский университет науки и технологий, Уфа,

\*\* Институт механики им Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

В работе рассматривается подмодель движения газа с линейным полем скоростей. А именно, подмодель, задающая движения политропного газа с плотностью, зависящей только от времени. Политропный газ – это газ, для которого внутренняя энергия является функцией, линейной по температуре. Рассматриваемая подмодель задана системой обыкновенных дифференциальных уравнений 22-го порядка на неизвестные функции. Эти функции характеризуют движения частиц газа и определяют вид функций плотности, давления и энтропии. Точное решение разыскивается для специального случая, а именно, для диагональной матрицы линейности. Найдено два новых точных решения. Определены вид вектор–функции скорости, функции плотности и давления. По виду функции скорости записаны мировые линии движения частиц газа. В трехмерном пространстве координат  $x, y, z$  построены траектории движения частиц газа для различных начальных данных. Проведен качественный анализ движения. Построена матрица Якоби. По значению Якобиана определены моменты коллапса частиц газа. Оба решения имеют коллапс: коллапс на прямой и коллапс в точке.

**Ключевые слова:** политропный газ, двухатомный газ, линейное поле скоростей, неоднородная деформация, траектории движения частиц газа, мировые линии движения частиц, Якобиан, коллапс

### 1. Введение

Движения газа, в котором скорости частиц являются линейными функциями декартовых координат точки, изучались во различных научных работах на протяжении многих лет. История таких движений неразрывно связана с изучением динамики жидких и газовых эллипсоидов, начиная с работ Г.Л. Дирихле [1] и Б. Римана [2], датированных 1860 и 1948 годами. Это научное направление в той или иной мере изучено как с математической точки зрения, так и с физической. Но тем не менее не основательно и не окончательно. С математической точки зрения наиболее значимыми являются статьи Л.В. Овсянникова [3] и J.F. Dyson [4]. В своих работах они независимо друг от друга показали,

что система уравнений газовой динамики сводится к системе девяти обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, при этом Л.В. Овсянников раньше J.F. Dyson нашел интеграл такой системы, а именно, интеграл завихренности. Интеграл полного углового момента и полной энергии уже позднее нашел J.F. Dyson и опубликовал в своей работе [4], причем все вычисления были проделаны в лагранжевых координатах. Изучением движений такого типа занимаются и в настоящее время. Одними из последних являются работы как российских, так и зарубежных авторов [5–8].

В настоящей работе рассматривается одна из моделей движения газа с линейным полем скоростей, а именно, модель с плотностью, зависящей только от времени, полученная в работе [9]. Для нее найдены точные решения, описывающие разлет частиц одноатомного газа из точечного источника, схлопывание частиц в точку, а также коллапс на пространственной прямой, при этом функция плотности является величиной, зависящей только от времени.

<sup>1</sup>Работа поддержана средствами государственного бюджета по госзаданию (№ 0246-2019-0052.)

## 2. Постановка задачи

Для дифференциальных уравнений идеальной газовой динамики рассматривается одно из решений в виде линейного поля скоростей

$$\vec{u} = A(t)\vec{x} + \vec{u}_0(t),$$

где  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  — вектор скорости, зависящий от времени  $t$  и трех декартовых координат  $\vec{x} = (x, y, z)$ ;  $A(t)$  — матрица линейности размером  $3 \times 3$ ;  $\vec{u}_0(t) = (u_{01}, u_{02}, u_{03})$  — вектор неоднородности. Если  $\vec{u}_0 = 0$ , то поле скоростей задает движение с однородной деформацией, если  $\vec{u}_0 \neq 0$  — движение с неоднородной деформацией.

Рассмотрим политропный газ, то есть уравнение состояния вида

$$p = S\rho^\gamma,$$

где  $S$  — функция энтропии;  $\gamma$  — показатель политропы и теоретически  $\gamma > 1$  [10]. Если плотность  $\rho$  такого газа зависит только от времени по закону

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\int \text{tr}A dt\right),$$

где  $\text{tr}A$  — след матрицы  $A$ ;  $\rho_0$  — произвольная постоянная; давление имеет квадратичный вид

$$p = -\frac{1}{2}\rho \vec{x} \cdot S\vec{x} - \rho \vec{v} \cdot \vec{x} + p_0(t),$$

то неизвестные матрица  $A$  и вектор  $\vec{u}_0$  удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} S' + 2SA &= (1 - \gamma)S \text{tr}A, \quad A' + A^2 = S, \quad S = S^T, \\ \vec{v}' + A^T \vec{v} + S\vec{u}_0 &= (1 - \gamma)\vec{v} \text{tr}A, \quad \vec{u}_0' + A\vec{u}_0 = \vec{v}, \quad (1) \\ p_0' - \rho\vec{u}_0 \cdot \vec{v} &= -\gamma p_0 \text{tr}A, \end{aligned}$$

где  $A^T$  — транспонированная матрица,  $\vec{v}$  — функция, введенная для краткости записи дифференциальных уравнений модели.

Система (1) содержит два дифференциальных матричных уравнения, которые служат для определения элементов матриц  $S$  и  $A$ , два векторных дифференциальных уравнения — для определения векторов  $\vec{u}_0$  и  $\vec{v}$ , последнее скалярное уравнение — для определения функции  $p_0(t)$ , которая входит в выражение для функции давления. Последняя система является системой 22 порядка. Требуется решить систему (1) для того, чтобы можно было определить неизвестные физические параметры, а именно, скорость, давление, плотность и энтропию.

## 3. Нахождение диагональных матриц линейности

Поиск решений системы (1) для общего вида матрицы  $A$  весьма затруднителен. Поэтому рассмотрим частный случай, а именно, зададим диагональную матрицу  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & a_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & a_3(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда, согласно формуле  $A' + A^2 = S$  равенство  $S = S^T$  выполняется автоматически. Заметим, что случай, когда элементы матрицы одинаковые, то есть  $a_1 = a_2 = a_3$ , приведен в диссертации [9]. Рассмотрим случай, когда два элемента матрицы равны, а третий произволен. То есть матрица  $A$  имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix},$$

где  $a \neq a_1 \neq 0$ . Тогда система (1) дифференциальных уравнений для элементов матрицы  $A$  примет следующий вид:

$$(a' + a^2)' + 2a(a' + a^2) = (1 - \gamma)(a' + a^2)(2a + a_1), \quad (2)$$

$$(a_1' + a_1^2)' + 2a_1(a_1' + a_1^2) = (1 - \gamma)(a_1' + a_1^2)(2a + a_1). \quad (3)$$

Решение ищем в виде

$$a = \frac{k}{t},$$

где  $k$  — постоянная, вид которой будет уточнен далее.

После подстановки такого представления решения в уравнение (2) получим соотношение

$$2k(k - 1)^2 = (1 - \gamma)k(k - 1)(2k + ta_1(t)), \quad (4)$$

из которого следует, что постоянная  $k$  может принимать следующие значения:

$$1) k = 0$$

Тогда  $a(t) = 0$  и уравнение (3) для  $a_1(t)$  имеет вид:

$$(a_1' + a_1^2)' + (1 + \gamma)a_1(a_1' + a_1^2) = 0.$$

При  $\gamma \neq 1$  решение имеет параметрический вид:

$$a_1 = \pm \sqrt{C_1 e^{-2b} + C_2 e^{-b(1+\gamma)}}, \quad t = \int a_1^{-1} db,$$

где  $C_1, C_2$  — постоянные интегрирования,  $b$  — параметр.

Тогда матрица линейности  $A$  такова:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm\sqrt{C_1 e^{-2b} + C_2 e^{-b(1+\gamma)}} \end{pmatrix}.$$

При  $\gamma = 1$  решение имеет вид:

$$a_1 = \pm e^{-b} \sqrt{C_1 t + C_2}.$$

Матрица линейности  $A$  такова:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm e^{-b} \sqrt{C_1 t + C_2} \end{pmatrix}.$$

2)  $k \neq 0$

В этом случае при  $k = 1$  равенство (4) выполняется и  $a(t) = t^{-1}$ . Уравнение (3) для  $a_1(t)$  таково:

$$(a_1' + a_1^2)' + (a_1' + a_1^2)(2a_1 - (1 - \gamma)(2t^{-1} + a_1)) = 0.$$

При  $\gamma = 1$  оно имеет решение такого же вида, как и в п. 1, а при  $\gamma \neq 1$  функция  $a_1(t)$  удовлетворяет уравнению

$$a_1' + a_1^2 = |t|^{2(1-\gamma)} e^{-(1+\gamma)b}, \quad t = \int a_1^{-1} db.$$

3)  $k \neq 0, k \neq 1$

Тогда  $a(t) = kt^{-1}$  и из (4) определяется вид функции  $a_1(t)$ :

$$a_1(t) = \frac{n}{t}, \quad n = \frac{2(k\gamma - 1)}{1 - \gamma}.$$

После подстановки  $a(t)$  и  $a_1(t)$  в (3) получим соотношение

$$2n(n - 1)^2 = (1 - \gamma)n(n - 1)(2k + n), \quad (5)$$

из которого следует, что постоянная  $n$  может принимать следующие значения:

3.1.  $n = 0$

Тогда  $k = \gamma^{-1}$  и  $a = (\gamma t)^{-1}, a_1(t) = 0$ . В этом случае матрица линейности такова:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

3.2.  $n \neq 0$

Тогда (5) выполняется при  $n = 1$  и функции  $a(t)$  и  $a_1(t)$  примут вид:

$$a_1 = \frac{1}{t}, \quad a = \frac{3 - \gamma}{2\gamma t}.$$

В этом случае матрица линейности имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3 - \gamma}{2\gamma t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 - \gamma}{2\gamma t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

3.3.  $n \neq 0, n \neq 1$

Из (5) следует, что

$$k = n = \frac{2}{3\gamma - 1},$$

а значит

$$a = a_1 = \frac{2}{(3\gamma - 1)t}.$$

В данном случае матрица линейности  $A$  имеет вид  $A = aE$ , где  $E$  — единичная матрица. Точное решение с такой матрицей получено в [9].

Перейдем к нахождению координат вектора неоднородности  $\vec{u}_0(t)$ .

#### 4. Нахождения вектора неоднородности

Рассмотрим векторные равенства из системы (1). Каждое из равенств есть дифференциальное уравнение первого порядка. Запишем их в виде одного векторного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\vec{u}_0'' + 2A\vec{u}_0' + 2(A' + A^2)\vec{u}_0 = (1 - \gamma)(\vec{u}_0' + A\vec{u}_0)\text{tr}A.$$

##### 4.1. Коллапс на прямой

Дифференциальное уравнение для вектора неоднородности распишем по координатам для матрицы линейности вида (6):

$$\begin{aligned} u_{01}'' + \frac{2}{t}u_{01}' &= 0, \\ u_{02}'' + \frac{2}{t}u_{02}' &= 0, \\ u_{03}'' + \frac{2}{t}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)u_{03}' &= 0. \end{aligned}$$

Решением системы является вектор  $\vec{u}_0$ , который имеет вид:

$$\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \frac{\beta_1}{t} \\ \alpha_2 + \frac{\beta_2}{t} \\ \alpha_3 + 2\beta_3 |t|^{\frac{2-\gamma}{\gamma}} \end{pmatrix},$$

где  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — произвольные постоянные.

Согласно представлению вектора скорости в виде линейного поля, имеем

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{x}{\gamma t} + \alpha_1 + \frac{\beta_1}{t}, \\ u_2 &= \frac{y}{\gamma t} + \alpha_2 + \frac{\beta_2}{t}, \\ u_3 &= \alpha_3 + 2\beta_3|t|^{\frac{2-\gamma}{\gamma}}. \end{aligned}$$

Применяя галилеевы переносы  $\bar{x}' \rightarrow x + at$ ,  $\bar{u}' \rightarrow u + a$ , где  $a$  — постоянная, к компонентам вектора скорости, можем считать, что  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . После этого, применяя растяжение  $t' \rightarrow ct$ ,  $x' \rightarrow cx$ , где  $c$  — постоянная, можно считать, что  $\beta_1 = 1$ . Тогда вектор скорости имеет вид:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\gamma t} + \frac{1}{t} \\ \frac{y}{\gamma t} + \frac{\beta_2}{t} \\ 2\beta_3|t|^{\frac{2-\gamma}{\gamma}} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Определим вид остальных гидродинамических функций, а именно,  $\rho$ ,  $p$ ,  $\mathcal{S}$ .

Плотность имеет вид:

$$\rho = \rho_0|t|^{-\frac{2}{\gamma}}.$$

Чтобы определить вид функции давления, необходимо решить дифференциальное уравнение для функции  $p_0(t)$  из системы (1):

$$p'_0 + \frac{2p_0}{t} = \bar{\rho}_0 \left( \frac{(1-\gamma)(1+\beta_2^2)}{\gamma|t|^{\frac{3\gamma-2}{\gamma}}} + 4\beta_3^2 \frac{2-\gamma}{\gamma} |t|^{\frac{2-3\gamma}{\gamma}} \right),$$

где  $\bar{\rho}_0 = \rho_0 \operatorname{sign} t$ . Решение имеет вид:

$$p_0 = \frac{C p_0}{t^2} + \frac{\rho_0}{2} (\gamma-1)(1+\beta_2^2) |t|^{-\frac{2}{\gamma}-2} + 2\rho_0(2-\gamma)\beta_3^2 |t|^{\frac{2}{\gamma}-2}.$$

Функция давления имеет вид квадратичной формы:

$$p = A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + Dz + p_0(t),$$

где

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\rho_0}{2} \frac{1-\gamma}{\gamma^2} |t|^{\frac{-2(1+\gamma)}{\gamma}}, \quad B = -\rho_0 \frac{1-\gamma}{\gamma} |t|^{\frac{-2(1+\gamma)}{\gamma}}, \\ C &= -\rho_0 \frac{1-\gamma}{\gamma} \beta_2 |t|^{\frac{-2(1+\gamma)}{\gamma}}, \\ D &= -2\bar{\rho}_0 \beta_3 \frac{2-\gamma}{\gamma} |t|^{-2}. \end{aligned}$$

Из уравнения состояния политропного газа находим энтропию

$$\mathcal{S} = (A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + Dz + p_0(t)) \frac{\rho_0^{-\gamma}}{t^2}.$$

Перейдем к описанию движения частиц газа. Мировые линии движения частиц газа задаются системой дифференциальных уравнений с начальными данными [10] ( $t_0 \neq 0$ ):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{x}{\gamma t} + \frac{1}{t}, \quad x(t_0) = x_0, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{y}{\gamma t} + \frac{\beta_2}{t}, \quad y(t_0) = y_0, \\ \frac{dz}{dt} &= 2\beta_3|t|^{\frac{2-\gamma}{\gamma}}, \quad z(t_0) = z_0, \end{aligned}$$

решение которой имеет вид:

$$\begin{aligned} x(t) &= (x_0 + \gamma) \left| \frac{t}{t_0} \right|^{1/\gamma} - \gamma, \\ y(t) &= (y_0 + \gamma\beta_2) \left| \frac{t}{t_0} \right|^{1/\gamma} - \gamma\beta_2, \\ z &= z_0 + \beta_3\gamma|t_0|^{2/\gamma} \left( \left| \frac{t}{t_0} \right|^{2/\gamma} - 1 \right), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $x_0, y_0, z_0$  — лагранжевые переменные. Якобиан перехода от эйлеровых к лагранжевым переменным имеет вид:

$$J = \begin{vmatrix} \left| \frac{t}{t_0} \right|^{1/\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & \left| \frac{t}{t_0} \right|^{1/\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left| \frac{t}{t_0} \right|^{2/\gamma}.$$

При  $t = 0$  и  $\gamma > 0$  Якобиан равен нулю, при этом ранг матрицы Якоби равен 1. Это означает, что при  $t \rightarrow 0$  в движении частиц наблюдается особенность, которая выражается в том, что все частицы слетаются на прямую. Рассмотрим коллапс частиц на прямой. В некоторый начальный момент времени  $t = t_0 < 0$  частицы газа заполняют все пространство. С течением времени каждая из частиц движется по своей траектории со своей скоростью (8). При  $t = 0$  все частицы встречаются на одной прямой  $x = -\gamma$ ,  $y = -\gamma\beta_2$ ,  $z = z_0 - \beta_3\gamma|t_0|^{2/\gamma}$ , где  $z_0$  выступает в качестве переменной величины и отвечает за номер частицы. Приближаясь к прямой коллапса, частицы газа имеют бесконечные скорости по первой и второй координате, и конечную, стремящуюся к нулю, скорость по третьей координате. В момент коллапса плотность и давление бесконечны. Если одну из мировых линий

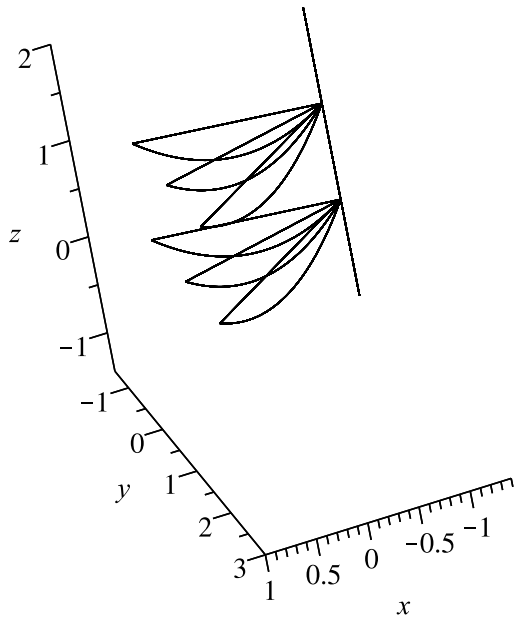


Рис. 1. Траектории движения частиц (9) двухатомного газа с  $\gamma = 7/5$

принять за движение поршня, то получим прибор для фокусировки частиц газа на прямой. При  $t > 0$  частицы вылетают из точек прямой с координатами  $(-\gamma, -\gamma\beta_2, z_0)$  и летят по тем же траекториям, что и при  $t < 0$ . Получаем линейный источник.

Движение является безвихревым, так как  $rot \vec{u} = 0$ .

При  $\gamma < 0$  Якобиан обращается в нуль при  $t \rightarrow \infty$ . С физической точки зрения первый случай более правдоподобен. Для определенности построим траекторию движения частиц при  $\gamma = 7/5$  (рис. 1). Этот показатель адиабаты соответствует двухатомным газам и воздуху.

#### 4.2. Точечный источник

Дифференциальное уравнение для вектора неоднородности распишем по координатам для матрицы линейности вида (7):

$$\begin{aligned} u''_{01} + \frac{2}{t}u'_{01} &= 0, \\ u''_{02} + \frac{2}{t}u'_{02} &= 0, \\ u''_{03} + \frac{5\gamma - 3}{\gamma t}u'_{03} - \frac{3 - 3\gamma}{\gamma t^2}u_3 &= 0. \end{aligned}$$

Решением системы является вектор  $\vec{u}_0$ :

$$\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} c_1 + \frac{c_2}{t^2} \\ c_3 + \frac{c_4}{t^2} \\ c_5|t|^\alpha \end{pmatrix},$$

где  $\alpha = \frac{-5\gamma + 3 + \sqrt{13\gamma^2 - 18\gamma + 9}}{2\gamma}$ ,  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  — произвольные постоянные. Многочлен  $13\gamma^2 - 18\gamma + 9 > 0$  при любом  $\gamma$ , так как он не имеет действительных корней.

Согласно представлению вектора скорости в виде линейного поля имеем:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{3 - \gamma}{2\gamma t}x + c_1 + \frac{c_2}{t^2}, \\ u_2 &= \frac{3 - \gamma}{2\gamma t}y + c_3 + \frac{c_4}{t^2}, \\ u_3 &= \frac{z}{t} + c_5|t|^\alpha. \end{aligned}$$

После применения преобразований эквивалентности, которые допускает модель, некоторые константы уточняются. Так  $c_1 = c_3 = 0, c_5 = 1$ . Тогда вектор скорости имеет вид:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{3 - \gamma}{2\gamma t}x + \frac{c_2}{t^2} \\ \frac{3 - \gamma}{2\gamma t}y + \frac{c_4}{t^2} \\ \frac{z}{t} + |t|^\alpha \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Определим вид остальных гидродинамических функций, а именно,  $p, \rho, S$ :

$$\rho = \rho_0|t|^{-\frac{3}{\gamma}}.$$

Чтобы определить вид функции давления, необходимо решить дифференциальное уравнение для функции  $p_0(t)$  из системы (1):

$$\begin{aligned} p'_0 + \frac{3p_0}{t} &= \\ &= \rho_0|t|^{-\frac{3}{\gamma}} \left( \frac{(3 - 5\gamma)(c_4^2 + c_2^2)}{2\gamma t^5} + (\alpha + 1)\text{sign } t|t|^{2\alpha - 1} \right). \end{aligned}$$

Решение имеет вид:

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{\bar{p}_0}{|t|^3} + \\ &+ \rho_0 \left( \frac{c_4^2 + c_2^2}{2} \frac{5\gamma - 3}{3 + \gamma} |t|^{-\frac{3+4\gamma}{\gamma}} + (\alpha + 1) \frac{\gamma|t|^{2\alpha - 3/\gamma}}{2\alpha\gamma + 3\gamma - 3} \right). \end{aligned}$$

Функция давления имеет вид квадратичной:

$$p = A_1(x^2 + y^2) + B_1x + C_1y + D_1z + p_0(t),$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{3(\gamma^2 - 4\gamma + 3)}{8\gamma^2 t^2} \rho_0 |t|^{-\frac{3}{\gamma}}, \\ B_1 &= -\rho_0 |t|^{-\frac{3}{\gamma}} \frac{c_2(3 - 5\gamma)}{2\gamma t^3}, \\ C_1 &= -\rho_0 |t|^{-\frac{3}{\gamma}} \frac{c_4(3 - 5\gamma)}{2\gamma t^3}, \\ D_1 &= -\rho_0 |t|^{-\frac{3}{\gamma} + \alpha - 1} (\alpha + 1) \text{sign } t. \end{aligned}$$

Из уравнения состояния политропного газа находим энтропию:

$$S = (A_1(x^2 + y^2) + B_1 x + C_1 y + D_1 z + p_0(t)) \frac{\rho_0^{-\gamma}}{t^2}.$$

Перейдем к описанию движения частиц газа. Движение является безвихревым, так как  $\text{rot } \vec{u} = 0$ . Мировые линии движения частиц газа задаются системой дифференциальных уравнений с начальными данными [10]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{3 - \gamma}{2\gamma t} x + \frac{c_2}{t^2}, \quad x(t_0) = x_0, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{3 - \gamma}{2\gamma t} y + \frac{c_4}{t^2}, \quad y(t_0) = y_0, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{z}{t} + |t|^\alpha, \quad z(t_0) = z_0, \end{aligned}$$

решение которой имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \left| \frac{t}{t_0} \right|^{\frac{3-\gamma}{2\gamma}} + \frac{2\gamma c_2}{(3+\gamma)t} \left( \left| \frac{t}{t_0} \right|^{\frac{3-\gamma}{2\gamma}} - 1 \right), \\ y &= y_0 \left| \frac{t}{t_0} \right|^{\frac{3-\gamma}{2\gamma}} + \frac{2\gamma c_4}{(3+\gamma)t} \left( \left| \frac{t}{t_0} \right|^{\frac{3-\gamma}{2\gamma}} - 1 \right), \\ z &= z_0 \left| \frac{t}{t_0} \right| + |t| \frac{|t_0|^\alpha}{\alpha} \left( \left| \frac{t}{t_0} \right|^\alpha - 1 \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Якобиан перехода от эйлеровых к лагранжевым переменным равен

$$J = \begin{vmatrix} \left| \frac{t}{t_0} \right|^{\frac{3-\gamma}{2\gamma}} & 0 & 0 \\ 0 & \left| \frac{t}{t_0} \right|^{\frac{3-\gamma}{2\gamma}} & 0 \\ 0 & 0 & \left| \frac{t}{t_0} \right| \end{vmatrix} = \left| \frac{t}{t_0} \right|^{3/\gamma}.$$

При  $t = 0$  Якобиан равен нулю. При этом ранг матрицы Якоби равен 0. Значит коллапс частиц происходит в точке. При  $t = t_0 < 0$  частицы находятся в точках с координатами  $(x_0, y_0, z_0)$  и с течением времени каждая частица движется по своей траектории с некоторой скоростью (10). При  $t = 0$  все частицы встречаются в бесконечно удаленной

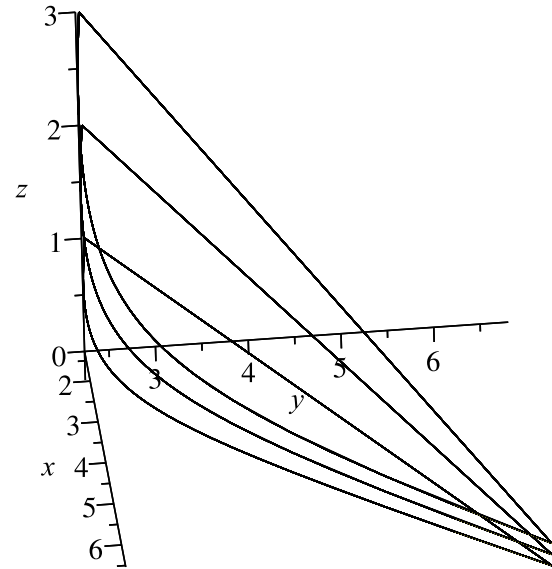


Рис. 2. Траектории движения частиц (11) двухатомного газа с  $\gamma = 7/5$  и  $c_2 < 0$

точке на плоскости  $z = 0$ . Частицы слетаются в бесконечно удаленную точку ( $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty$ ) первой четверти плоскости  $xOy$  при  $c_2 < 0$  и в бесконечно удаленную точку ( $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow -\infty$ ) третьей четверти плоскости  $xOy$  (рис. 2). При этом скорости частиц бесконечны по первым двум координатам и равны нулю по третьей. В момент коллапса плотность и давление бесконечные.

## 5. Заключение

В работе получены два новых точных решения уравнений газовой динамики с линейным полем скоростей и плотностью, зависящей от времени. Найдены уравнения мировых линий движения частиц газа. Для одноатомного газа построены траектории, которые соответствуют полученным решениям.

## Список литературы

- [1] Dirichlet G.L. Untersuchung über ein Problem der Hydrodynamik // J. Reine Angew. Math. 1860. Vol. 58. P. 181.
- [2] Риман Б. Сочинения. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. С. 339–366.
- [3] Овсянников Л.В. Новое решение уравнений гидродинамики // Докл. АН СССР 1956. Т. 111, № 1. С. 47–49.
- [4] Dyson J.F. Dynamics of a spinning gas cloud // J. Math. Mech. 1968. Vol. 18, No. 1. Pp. 91–101. DOI: 10.1512/iumj.1969.18.18009
- [5] Giron J.F., Ramsey S.D., Baty R.S. Nemchinov-Dyson Solutions of the Two-Dimensional Axisymmetric Inviscid Compressible

- Flow Equations // Phys. Fluids. 2020. Vol. 32. 127116.  
DOI: [10.1063/5.0032170](https://doi.org/10.1063/5.0032170)
- [6] Guo Y., Hadžić M., Jang J. Continued Gravitational Collapse for Newtonian Stars // Arch. Rational Mech. Anal. 2021. Vol. 239. Pp. 431--552.  
DOI: [10.1007/s00205-020-01580-w](https://doi.org/10.1007/s00205-020-01580-w)
- [7] Nikonorova R., Siraeva D., Yulmukhametova Y. New Exact Solutions with a Linear Velocity Field for the Gas Dynamics Equations for Two Types of State Equations // Mathematics. 2022. Vol. 10, Issue 1. 123.  
DOI: [10.3390/math10010123](https://doi.org/10.3390/math10010123)
- [8] Юлмухаметова Ю.В. Решение уравнений идеального газа, описывающих галилеевы инвариантные движения с винтовыми линиями уровня, с коллапсом на геликоиде // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 23, № 4. С. 797–808.  
DOI: [10.14498/vsgtu1703](https://doi.org/10.14498/vsgtu1703)
- [9] Юлмухаметова Ю.В. Подмодели газовой динамики с линейным полем скоростей : диссертация ... кандидата физико-математических наук : 01.01.02 / Юлмухаметова Юлия Валерьевна; [Место защиты: Уфим. науч. центр РАН]. Уфа, 2011. 118 с.
- [10] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. 336 с.





## Collapsing motions of a diatomic gas whose density depends only on time

Gumerov I.I. \*, Katashova A.A. \*, Yulmukhametova Y.V.\*\*,\*\*

\* Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia,  
\*\* Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

One submodel of gas motion with a linear velocity field is considered in the paper. Namely, a submodel that defines the movements of a polytropic gas with a density that depends only on time. A polytropic gas is a gas for which the internal energy is a function linear in temperature. The submodel under consideration is given by a system of ordinary differential equations of the 22nd order for unknown functions. These functions characterize the movements of gas particles and determine the type of density, pressure and entropy functions. The exact solution is sought for a special case, namely for a diagonal linearity matrix. Two new exact solutions have been found. The type of vector functions of velocity, density and pressure are determined. By the form of the velocity function, the world lines of motion of gas particles are recorded. In the three-dimensional space of coordinates  $x, y, z$ , the trajectories of gas particles for various initial data are constructed. A qualitative analysis of the movement was carried out. The Jacobi matrix is constructed. The moments of collapse of gas particles are determined by the value of the Jacobian. Both solutions have collapse: collapse on a straight line and collapse at a point.

**Keywords:** polytropic gas, diatomic gas, linear velocity field, inhomogeneous deformation, trajectories of gas particles, world lines of particle motion, Jacobian

### References

- [1] Dirichlet G.L. Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik // *J. Reine Angew. Math.* 1860. Vol. 58. P. 181.
- [2] Rimanič B. [Essays] *Sochinenia*. M.-L.: GITTL, 1948. Pp. 339–366 (In Russian).
- [3] Ovsannikov L.V. [New solution of hydrodynamic equations] *Novoe reshenie uravnenia gidrodinamiki* // *DAN USSR*. 1956. Vol. 111, No 1. Pp. 47–49 (In Russian).
- [4] Dyson J.F. Dynamics of a spinning gas cloud // *J. Math. Mech.* 1968. Vol. 18, No. 1. Pp. 91–101.  
DOI: 10.1512/iumj.1969.18.18009
- [5] Giron J.F., Ramsey S.D., Baty R.S. Nemchinov-Dyson Solutions of the Two-Dimensional Axisymmetric Inviscid Compressible Flow Equations // *Phys. Fluids*. 2020. Vol. 32. 127116.  
DOI: 10.1063/5.0032170
- [6] Guo Y., Hadžić M., Jang J. Continued Gravitational Collapse for Newtonian Stars // *Arch. Rational Mech. Anal.* 2021. Vol. 239. Pp. 431–552.  
DOI: 10.1007/s00205-020-01580-w
- [7] Nikonorova R., Siraeva D., Yulmukhametova Y. New Exact Solutions with a Linear Velocity Field for the Gas Dynamics Equations for Two Types of State Equations // *Mathematics*. 2022. Vol. 10, Issue 1. 123.  
DOI: 10.3390/math10010123
- [8] Yulmukhametova Yu.V. Solution of ideal gas equations describing Galilean invariant motions with helical level lines, with collapse on a helicoid // *Vest. Sam. state tehn. univ. Ser. phys.-mat. science*. 2019. Vol. 23, No 4. Pp. 797–808 (in Russian).  
DOI: 10.14498/vsgtu1703
- [9] Yulmukhametova Yu.V. [Submodels of gas dynamics with a linear velocity field] *Podmodeli gazovoi dinamiki s lineinim polem skorostey*: dissertation ... Candidate of Physical and Mathematical Sciences : 01.01.02 / Yulmukhametova Yulia Valeryevna; [Place of defense: Ufa Scientific Center of the Russian Academy of Sciences]. Ufa, 2011. 118 p.
- [10] Ovsyannikov L.V. [Lectures on the fundamentals of gas dynamics] *Lektsii po osnovam gazovoy dinamiki*. M.-Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy. 2003. 336 p. (in Russian).