

ISSN: 2658–5782

Номер 2

2023

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org





Численный анализ полного сечения рассеяния на множестве звукопроницаемых сфер¹

Насибуллаева Э.Ш.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

При решении задачи рассеяния акустической волны на множестве сферических препятствий малых размеров одной из важнейших подзадач является определение основной характеристики явления рассеяния — полного сечения рассеяния. Ее решение позволит установить при каких параметрах системы взаимодействие между частицами несущественно и им можно пренебречь (в этом случае задачу можно упростить и свести к случаю множества одиночных частиц), а при каких параметрах данным взаимодействием пренебрегать нельзя. В настоящей работе на основе явной формулы для полного сечения рассеяния на множестве взаимодействующих звукопроницаемых сфер проведен численный параметрический анализ полного сечения рассеяния на системе сфер при воздействии сферической волны от монополярного источника излучения. С целью определения соотношений физических параметров сферы и окружающей среды, при которых эффекты многократного рассеяния являются существенными для заданных типов конфигурации системы, проведена серия вычислительных экспериментов для расчетов основной характеристики рассеяния с учетом многократного рассеяния, а также сумм характеристик для одиночных звукопроницаемых сфер. Показано, что во всех рассмотренных случаях эффектами многократного рассеяния при определении полного сечения рассеяния пренебрегать нельзя. В случае воздушных пузырьков в воде существенным фактором является тип конфигурации системы; для капель воды в воздухе существенными являются как тип конфигурации, так и число сфер в ней; а для капель дихлорэтана в воде тип конфигурации и число сфер в ней являются несущественными факторами.

Ключевые слова: акустическое рассеяние, система звукопроницаемых сфер, полное сечение рассеяния, монополярный источник излучения, вычислительный эксперимент, упругость жидкости

1. Введение

В рамках решения задачи рассеяния акустической волны на множестве сферических препятствий малых размеров одной из важнейших подзадач является определение основной характеристики явления рассеяния — полного сечения рассеяния. Данная величина характеризует площадь перпендикулярной потоку области, попадая в которую падающая волна испытывает рассеяние. При встрече с множеством звукопроницаемых препятствий часть волн, рассеянных каждым из них, рассеивается повторно и многократно на других препятствиях (образуются дополнительные звуковые по-

ля), а часть волн проходит через их границы. Исследование полного сечения рассеяния, учитывающего многократное рассеяние, для систем звукопроницаемых сфер при падении волны от внешнего источника является актуальной задачей, поскольку ее решение позволит установить при каких параметрах системы взаимодействие между частицами несущественно и им можно пренебречь (в этом случае задачу можно упростить и свести к случаю множества одиночных частиц), а при каких параметрах данным взаимодействием пренебрегать нельзя.

Анализ научных работ, в которых определяют основные характеристики явления рассеяния показал, что аналитические формулы и численные исследования ограничены случаями одиночной сферы или системы с двумя сферами. С обзором данных исследований для рассеяния на одиночном препятствии до 1950 г. можно ознакомиться в рабо-

¹Работа поддержана средствами государственного задания № 0246-2019-0052

те [1], а после 1950 г. — в [2], где также представлен обзор работ по рассеянию волн на паре сфер. Существующие работы, направленные на нахождение сечений рассеяния на системах, содержащих более двух сфер, либо сводятся к случаю одиночной сферы [3, 4], либо ограничиваются рассмотрением некоторых упрощенных случаев [5]. В работе [6] выведена явная формула полного сечения рассеяния, учитывающая взаимодействие между звукопроницаемыми сферами в системе. Данная формула применима для любого числа сфер различных радиусов, произвольным образом расположенных в трехмерном пространстве, и при произвольном внешнем воздействии в границах применимости алгоритмов, используемых для общего [7] или осесимметричного [8] случаев.

В настоящей работе на основе явной формулы для полного сечения рассеяния на множестве взаимодействующих звукопроницаемых сфер [6] проведен численный параметрический анализ данной характеристики рассеяния на системе сфер при воздействии сферической волны от монополюсного источника излучения. Основная цель — определение соотношений физических параметров сферы и окружающей среды для заданных типов конфигурации системы, при которых эффекты многократного рассеяния являются существенными.

2. Постановка и численный метод решения задачи

Рассматриваются N звукопроницаемых сфер одинакового радиуса a с центрами, имеющими декартовы координаты \mathbf{r}'_v ($v = 1, \dots, N$), которые расположены в бесконечном трехмерном пространстве в двух различных конфигурациях:

- плоская («однослойная») равномерная (центры сфер расположены в узлах правильной сетки с $\delta l_y = \delta l_z \equiv \delta l$) конфигурация в плоскости Oyz , состоящая из $N = N_y \times N_z$ сфер (рис. 1(а));
- объемная («трехслойная») равномерная конфигурация с расстояниями между узлами сетки $\delta l_x = \delta l_y = \delta l_z \equiv \delta l$, состоящая из $N = 3 \times N_y \times N_z$ сфер, где центральный слой расположен также, как в конфигурации на рис. 1(а), а крайние слои — симметрично относительно него (рис. 1(б)).

Внешняя среда и среда внутри сфер являются однородными и характеризуются плотностями ρ_0 и ρ_v , а также скоростями звука c_0 и c_v . Предполагается, что центры сфер неподвижны и радиальное движение сферической поверхности отсутствует. На

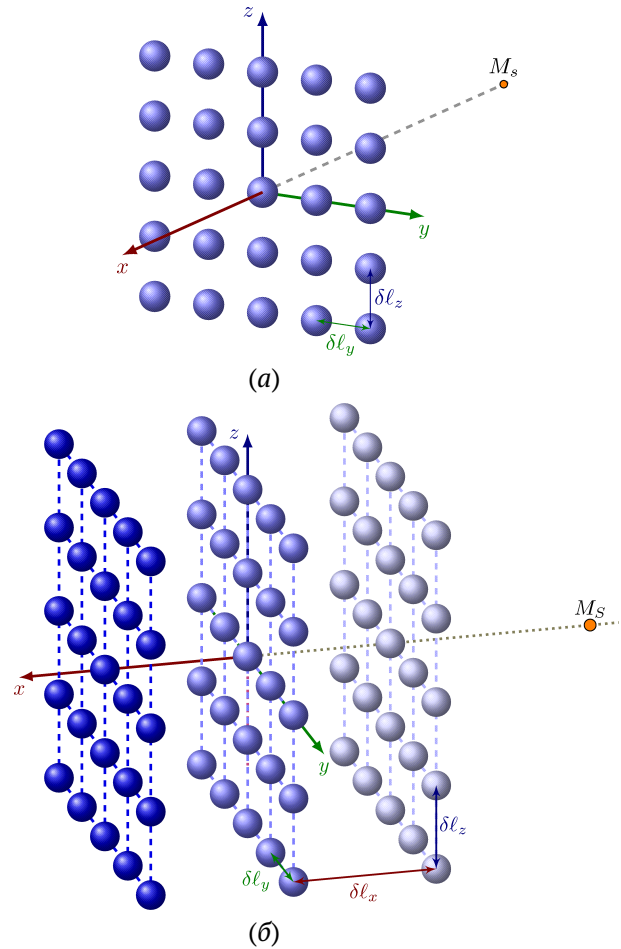


Рис. 1. Плоская равномерная конфигурация в плоскости Oyz , состоящая из $N = N_y \times N_z$ сфер (а); «трехслойная» равномерная конфигурация, состоящая из $N = 3 \times N_y \times N_z$ сфер (б); M_s — монополюсный источник излучения, δl_x ; δl_y , δl_z — расстояния между центрами соседних сфер вдоль соответствующих осей координат

систему сфер падает сферическая волна от монополюсного источника излучения, расположенного в точке $M_s = (-d_{M_s}, 0, 0)$.

Задача рассеяния звука на системе звукопроницаемых сфер сводится к решению уравнений Гельмгольца для комплексных потенциалов $\psi(\mathbf{r})$ для произвольной точки \mathbf{r} вне сфер и $\psi_{\text{int}}^{(v)}$ внутри v -й сферы с граничными условиями, выражающими равенства потенциала и нормальных составляющих скорости частиц на поверхности S_v v -ой сферы, сквозь которую проходит волна [7]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi + k_0^2 \psi &= 0, & \nabla^2 \psi_{\text{int}}^{(v)} + k_v^2 \psi_{\text{int}}^{(v)} &= 0, \\ \left(\psi(\mathbf{r}) - \psi_{\text{int}}^{(v)} \right) \Big|_{S_v} &= 0, & \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{\rho_v} \frac{\partial \psi_{\text{int}}^{(v)}}{\partial r} \right) \Big|_{S_v} &= 0 \end{aligned}$$

($v = 1, \dots, N$), где k_0 и k_v – волновые числа для сред вне и внутри сфер.

В соответствии с классическим решением потенциал внешнего поля $\psi(\mathbf{r})$ представляется в виде суммы потенциалов падающего поля $\psi_{\text{in}}(\mathbf{r})$ и поля рассеяния $\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r})$:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) + \psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}),$$

где $\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r})$ удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда, соответствующего затухающим на бесконечности волнам [9].

Далее проводятся разложение всех потенциалов и повторное разложение потенциала поля рассеяния по мультиполям. Техника разложения по мультиполям [10], разработанная изначально для случая звуконепроницаемых сфер (волна не проходит через поверхность) с произвольным акустическим импедансом, была обобщена на случай звукопроницаемых сфер в работе [7]. В данной работе также проведена оптимизация общего алгоритма для сфер, произвольным образом расположенных в трехмерном пространстве. Отметим, что выбор методики разложения по мультиполям обусловлен тем, что она позволяет достичь высокой точности получаемых результатов при минимальных затратах процессорного времени.

В общем случае задача сводится к решению системы линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $A_l^{(v)s}$ разложения потенциала поля рассеяния

$$\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}) = \sum_{v=1}^N \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l A_l^{(v)s} S_l^s(\mathbf{r}_v)$$

по мультиполям $S_l^s(\mathbf{r}_v)$ порядка l и степени s ($\mathbf{r}_v = \mathbf{r} - \mathbf{r}'_v$). Данная система имеет следующий матричный вид:

$$\mathbf{L}\mathbf{A} = \mathbf{D}, \quad (1)$$

где элементы матриц скомпонованы определенным образом и определяются по формулам [6]:

$$\mathbf{A} = \{A_u\} = \{A_l^{(v)s}\},$$

$$\mathbf{D} = \{D_t\} = \{-B_n C_{\text{in},n}^m(\mathbf{r}'_w)\},$$

$$\mathbf{L} = \{L_{ut}\}, \quad L_{ut} = \begin{cases} B_l (S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{vw}) & (v \neq w), \\ \delta_{\tilde{u}\tilde{t}} & (v = w), \end{cases}$$

$$u = (v-1)(n_{\text{tr}}+1)^2 + (l+1)^2 - (l-s),$$

$$t = (w-1)(n_{\text{tr}}+1)^2 + (n+1)^2 - (n-m),$$

$$\tilde{u} = (l+1)^2 - (l-s), \quad \tilde{t} = (n+1)^2 - (n-m),$$

$$l, n = 0, 1, \dots, n_{\text{tr}}; \quad s = -l, \dots, l; \quad m = -n, \dots, n;$$

$$v, w = 1, \dots, N.$$

Здесь введено обозначение

$$B_l = \frac{j_l(k_0 a) j_l'(k_w a) - \kappa_w j_l'(k_0 a) j_l(k_w a)}{h_l(k_0 a) j_l'(k_w a) - \kappa_w h_l'(k_0 a) j_l(k_w a)},$$

$j_n(z)$ и $j_n'(z)$ – сферические функции Бесселя 1-го типа и их производные [11]; $h_n(z)$ и $h_n'(z)$ – сферические функции Ханкеля 1-го типа и их производные [11]; $\kappa_w = (k_0 \rho_w) / (k_w \rho_0)$ – введенный параметр; $C_{\text{in},n}^m(\mathbf{r}'_w)$ – коэффициенты разложения падающего поля ψ_{in} около $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_w$; $(S|R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{vw})$ – коэффициенты перехода при повторном разложении по мультиполям; \mathbf{r}'_{vw} – вектор, направленный от центра v -й сферы к центру w -й сферы; $\delta_{\tilde{u}\tilde{t}}$ – символ Кронекера; n_{tr} – число членов ряда после его усечения. Отметим, что при численной реализации решения система уравнений (1) должна быть конечной, поэтому необходимо проводить усечение рядов при разложении по l и n . Вопрос выбора числа n_{tr} для данного типа задач подробно рассмотрен, например, в работах [6, 7].

Явная формула для определения полного сечения рассеяния системы сфер в общем случае имеет следующий вид [6]:

$$\begin{aligned} \sigma_s = & \frac{\omega \rho_0}{2k_0 I_0} \left(\sum_{v=1}^N \sum_{n=0}^{n_{\text{tr}}} \sum_{m=-n}^n |A_n^{(v)m}|^2 + \right. \\ & + \text{Re} \left(\sum_{\substack{v,w=1 \\ v \neq w}}^N \sum_{n=0}^{n_{\text{tr}}} \sum_{m=-n}^n \sum_{l=0}^{n_{\text{tr}}} \sum_{s=-l}^l i^{n+l} \times \right. \\ & \times \sqrt{(2n+1)(2l+1) \frac{(n-|m|)!(l-|s|)!}{(n+|m|)!(l+|s|)!}} \times \\ & \times (-1)^{n+m} A_n^{(v)m} \left(A_l^{(w)s} \right)^* c^{(m,s)} e^{i(m-s)\varphi_{vw}} \times \\ & \left. \left. \times \sum_{\tilde{i}=|n-l|}^{n+l} b_{\tilde{i}}^{(nm ls)} i^{\tilde{i}} j_{\tilde{i}}(k_0 r_{vw}) P_{\tilde{i}}^{m-s}(\cos \theta_{vw}) \right) \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\omega = 2\pi f$ – угловая частота; f – частота внешнего поля; I_0 – интенсивность падающей волны; $c^{(m,s)}$ – коэффициент, выражение для которого определено в [6]; $b_{\tilde{i}}^{(nm ls)}$ – коэффициенты Клебша–Гордана [12]; $P_n^m(\mu)$ – присоединенные функции Лежандра [11]; $(r'_{vw}, \theta_{vw}, \varphi_{vw})$ – сферические координаты вектора \mathbf{r}'_{vw} в системе координат, связанной с v -й сферой.

Для одиночной звукопроницаемой сферы полное сечение рассеяния σ_s вычисляется с помощью формулы [13]:

$$\sigma_s = 4\pi d^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |B_l h_l(k_0 d)|^2, \quad (3)$$

где d – расстояние от центра сферы до монопольного источника излучения.

3. Результаты вычислительного эксперимента

При численной реализации техники разложения по мультиполям с применением оптимизированного алгоритма [6] для решения системы (1) разработан программный код на языке Fortran 90 (GCC) в среде MSYS2 (MinGW-w64) с подключением библиотеки LAPACK [14]. Специальные сферические функции и присоединенные полиномы Лежандра и их производные вычислялись с помощью адаптированных программных кодов, написанных на языке Fortran 77, для специальных цилиндрических функций и полиномов Лежандра [15].

Для численного анализа эффектов многократного рассеяния проведены вычислительные эксперименты по определению полного сечения рассеяния по формуле (2) на системах сфер, расположенных в двух различных конфигурациях (см. рис. 1), при числе сфер вдоль осей Oy и Oz равном $N_y = N_z = 5$ или 7, расстоянием между центрами сфер вдоль каждой из координатных осей равном $\delta l = 3a$ и расстоянием между монопольным источником излучения и геометрическим центром системы сфер (в рассматриваемых случаях совпадающим с началом декартовой системы координат) равным $d_{M_s} = 10a$. Вычислительный эксперимент проводился для числа усечения рядов равном $n_{tr} = 9$, что дает хорошую точность расчетов при всех рассмотренных параметрах системы. Исследовались три различных случая отношений упругости жидкости внутри ($\chi_{in} = \rho_v c_v^2$) и вне ($\chi_{out} = \rho_0 c_0^2$) сфер и плотностей внутренней и внешней сред:

– $w(a) - \chi_{out}/\chi_{in} \gg 1, \rho_0/\rho_v \gg 1$. В этом случае среды можно взять с физическими параметрами, соответствующими воде для внешней среды ($\rho_0 = 998 \text{ кг/м}^3, c_0 = 1484 \text{ м/с}$) и воздуха для среды внутри сфер ($\rho_v = 1.205 \text{ кг/м}^3, c_v = 343.1 \text{ м/с}$), т.е. проводить вычисления для системы воздушных пузырьков в воде;

– $a(w) - \chi_{out}/\chi_{in} \ll 1, \rho_0/\rho_v \ll 1$, что соответствует случаю системы капель воды в воздухе;

– $w(d) - \chi_{out}/\chi_{in} \approx 1, \rho_0/\rho_v \approx 1$, что соответствует, например, случаю системы капель дихлорэтана ($\rho_v = 1252.6 \text{ кг/м}^3, c_v = 1034 \text{ м/с}$) в воде.

На рис. 2 и 3 показаны результаты расчетов для конфигураций, представленных на рис. 1(a) и 1(b) соответственно, полного сечения рассеяния σ_s для всей системы (толстые линии), полученного по формуле (2), и сумм N одиночных сфер (тонкие линии), вычисленных по формуле (3) при фиксированном $d = d_{M_s}$.

Отметим, что в случае воздушных пузырьков в воде рассматривался диапазон волновых радиусов $k_0 a$ вне области так называемого «гигантского»

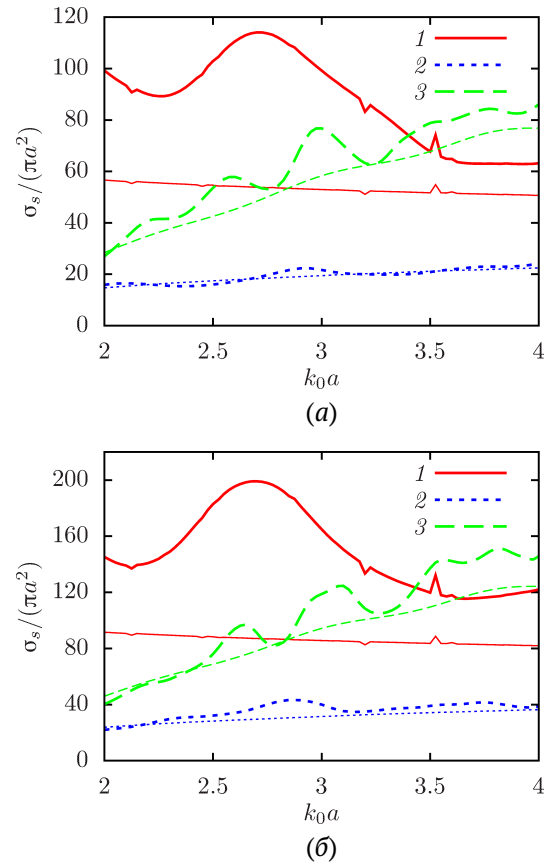


Рис. 2. Зависимость нормированного полного сечения рассеяния $\sigma_s / (\pi a^2)$ от волнового радиуса $k_0 a$ для конфигурации, представленной на рис. 1(a), с числом сфер $N = 5 \times 5$ (a) и $N = 7 \times 7$ (б) для σ_s , вычисленных по явной формуле (2) (толстые линии) и сумм значений (3): 1 – воздушные пузырьки в воде (случай $w(a)$); 2 – капли воды в воздухе (случай $a(w)$); 3 – капли дихлорэтана в воде (случай $w(d)$)

резонанса для одиночных пузырьков, то есть для $k_0 a \gg 0.014$ [13, 16]. Однако, как было показано в работе [16] для систем пузырьков, помимо данного монопольного резонанса существует большое число резонансов на более высоких частотах, которые меньше по величине, чем «гигантский» резонанс. Данные резонансы можно наблюдать и в настоящей работе на рис. 2. Хотя при шаге по $k_0 a$, который в представленных расчетах брался равным $\Delta h = 0.0125$, величины вторичных резонансов имеют небольшие значения, наличие данных резонансов согласуется с результатами работы [16].

Для анализа влияния эффектов многократного рассеяния рассмотрим максимальную относительную погрешность δ_{max} для величины $\sigma_s / (\pi a^2) \equiv \Sigma_1$, вычисленную с помощью формулы (2) с учетом

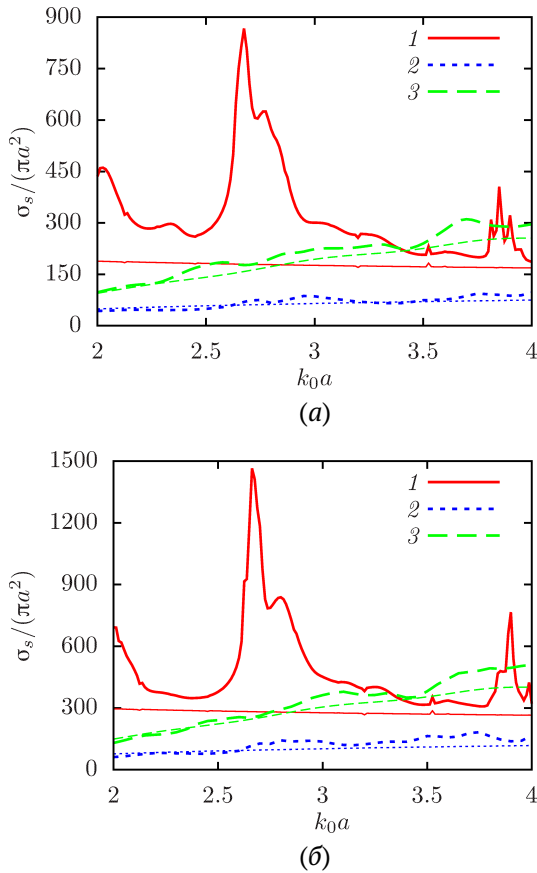


Рис. 3. Зависимость нормированного полного сечения рассеяния $\sigma_s / (\pi a^2)$ от волнового радиуса $k_0 a$ для конфигурации, представленной на рис. 1(б), с числом сфер $N = 3 \times 5 \times 5$ (а) и $N = 3 \times 7 \times 7$ (б) для σ_s , вычисленных по явной формуле (2) (толстые линии) и сумм значений (3): 1 – воздушные пузырьки в воде (случай w(a)); 2 – капли воды в воздухе (случай a(w)); 3 – капли дихлорэтана в воде (случай w(d))

многократного рассеяния, и суммы данных величин Σ_2 , вычисленных по формуле (3) для одиночных сфер, выраженную в процентах:

$$\delta_{\max} = \max \left| \frac{\Sigma_1 - \Sigma_2}{\Sigma_2} \right| \cdot 100\%. \quad (4)$$

Данные представлены в табл. 1.

Анализ результатов, представленных на рис. 2, 3 и в табл. 1, показал следующее:

- с ростом отношений χ_{out}/χ_{in} и ρ_0/ρ_v влияние многократного рассеяния на величину полного сечения рассеяния σ_s значительно увеличивается. Наблюдается не только количественный рост (для случаев капель дихлорэтана в воде и воздушных пузырьков в воде до $k_0 a \leq 3.4$,

Таблица 1. Максимальная относительная погрешность δ_{\max} , рассчитанная по формуле (4), для двух типов конфигураций с разным числом сфер и трех типов соотношений параметров внешней и внутренней сред (см. рис. 2 и 3)

	рис. 1(а)		рис. 1(б)	
	5 × 5	7 × 7	3 × 5 × 5	3 × 7 × 7
w(a)	112.08	128.68	383.32	419.08
a(w)	16.73	41.7	35.62	59.55
w(d)	33.21	29.38	27.27	27.09

для капель воды в воздухе — при любых рассмотренных $k_0 a$), но и качественный — нелинейный характер кривых увеличивается, появляются точки локальных максимумов и минимумов. При этом для каждой конфигурации увеличение числа сфер приводит к увеличению только количественной характеристики, качественная же картина меняется несущественно;

- максимально эффект многократного рассеяния проявляется в случае $\chi_{out}/\chi_{in} \gg 1$ и $\rho_0/\rho_v \gg 1$ (воздушные пузырьки в воде): максимальная погрешность во всех случаях $\delta_{\max} = 265.58 \pm 57.69\%$. На данный эффект конфигурация системы влияет существенно, а число частиц в конфигурации — нет;
- в «противоположном» к рассмотренному в предыдущем пункте предельном случае, когда $\chi_{out}/\chi_{in} \ll 1$ и $\rho_0/\rho_v \ll 1$ (капли воды в воздухе), влияние многократного рассеяния на расчетную величину в большинстве примеров на порядок ниже. Максимальная погрешность $\delta_{\max} = 38.14 \pm 56.14\%$, причем на эффект многократного рассеяния влияет как конфигурация системы, так и число сфер в конфигурации;
- в случае «трехслойной» конфигурации для воздушных пузырьков в воде имеют место резонансы достаточно большой величины при $k_0 a \approx 2.7$ и 3.9 , в то время как для однослойной конфигурации точка $k_0 a \approx 2.7$ является точкой максимума. Следует предположить, что данные резонансы являются следствием многократного рассеяния в системе, имеющей объемную конфигурацию;
- в случае $\chi_{out}/\chi_{in} \approx 1$ и $\rho_0/\rho_v \approx 1$ (капли дихлорэтана в воде) при $k_0 a > 2.6$ имеет место

влияние на расчетную величину эффекта многократного рассеяния, однако данный эффект не сильно зависит от конфигурации и числа сфер в ней: максимальная погрешность во всех случаях составляет $\delta_{\max} = 30.15 \pm 10.05\%$.

4. Заключение

В рамках исследования акустического рассеяния на множестве звукопроницаемых сфер, произвольным образом расположенных в пространстве, при падении сферической волны от монополюсного источника излучения определяется полное сечение рассеяния системы при различных соотношения физических параметров внешней среды и среды внутри сфер для двух типов конфигурации системы.

Для определения параметров, при которых эффекты многократного рассеяния являются существенными, проведена серия вычислительных экспериментов для расчета основной характеристики рассеяния с учетом многократного рассеяния [6], и сумм данной характеристики для одиночных звукопроницаемых сфер [13]. Показано, что эффектами многократного рассеяния при определении полного сечения рассеяния во всех рассмотренных случаях пренебрегать нельзя, причем

- при $\chi_{out}/\chi_{in} \gg 1$ и $\rho_0/\rho_v \gg 1$ существенным является тип конфигурации системы;
- при $\chi_{out}/\chi_{in} \ll 1$ и $\rho_0/\rho_v \ll 1$ существенны как тип конфигурации, так и число сфер в ней;
- при $\chi_{out}/\chi_{in} \approx 1$ и $\rho_0/\rho_v \approx 1$ тип конфигурации и число сфер в ней являются несущественными факторами.

В случае $\chi_{out}/\chi_{in} \gg 1$ и $\rho_0/\rho_v \gg 1$ при рассмотренных значениях $k_0 a$ имеют место резонансы, которые по величине меньше монополюсного («гигантского») резонанса, что согласуется с данными работы [16]. Однако в случае «трехслойной» конфигурации на рассмотренных частотах появляются резонансы достаточно большой величины. Можно предположить, что они являются следствием многократного рассеяния в объемной конфигурации. Данное утверждение требует дополнительного исследования, которое планируется провести в дальнейшей работе.

Список литературы

- [1] Martin P.A. Acoustic scattering by one bubble before 1950: Spitzer, Willis, and Division 6 // J. Acoust. Soc. Am. 2019. Vol. 146. P. 920–926. DOI: 10.1121/1.5120127
- [2] Насибуллаева Э.Ш. Рассеяние звуковых волн на сферах: методы решения и основные характеристики (обзор) // Многофазные системы. 2021. Т. 16, № 3–4. С. 88–104. DOI: 10.21662/mfs2021.3.013
- [3] Бабайлов Э.П., Дубов А.А., Каневский В.А. Рассеяние звука поглощающей сферой // Акуст. журн. 1991. Т. 37. № 5. С. 851–857. http://www.akzh.ru/pdf/1991_5_851-857.pdf
- [4] Hahn T.R. Low frequency sound scattering from spherical assemblages of bubbles using effective medium theory // J. Acoust. Soc. Am. 2007. V. 122, No. 6. Pp. 3252–3267. DOI: 10.1121/1.2793610
- [5] Skaropoulos N.C., Yagridou H.D., Chrisoulidis D.P. Interactive resonant scattering by a cluster of air bubbles in water // J. Acoust. Soc. Am. 2003. V. 113, No. 6. Pp. 3001–3011. DOI: 10.1121/1.1572141
- [6] Насибуллаева Э.Ш. Численный анализ многократного рассеяния акустической волны на множестве звукопроницаемых сфер в трехмерном пространстве // Вычислительная механика сплошных сред. 2022. Т. 15, № 4. С. 383–398. DOI: 10.7242/1999-6691/2022.15.4.29
- [7] Насибуллаева Э.Ш. Моделирование акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер в трехмерном пространстве // Вычислительные технологии. 2022. Т. 27, № 2. С. 19–36. DOI: 10.25743/ICT.2022.27.2.003
- [8] Насибуллаева Э.Ш. Численный анализ акустического рассеяния от звукопроницаемых сфер при внешнем воздействии // Вестник УГАТУ. 2021. Т. 25, № 2(92). С. 93–101. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46340658>
- [9] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1981. 512 с.
- [10] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // J. Acoust. Soc. Am. 2002. Vol. 112, No. 6. P. 2688–2701. DOI: 10.1121/1.1517253
- [11] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Москва: Наука, 1974. 832 с.
- [12] Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
- [13] Насибуллаева Э.Ш. Исследование акустического рассеяния от одиночной звукопроницаемой сферы // Многофазные системы. 2018. Т. 13, № 4. С. 79–91. DOI: 10.21662/mfs2018.4.012
- [14] LAPACK – Linear Algebra PACKage. <https://netlib.sandia.gov/lapack/> (accessed: 08.06.2023).
- [15] Zhang S., Jin J. Computation of special functions. New York: Wiley–Interscience, 1996. 717 p.
- [16] Sage K.A., George J., Überall H. Multipole resonances in sound scattering from gas bubbles in a liquid // J. Acoust. Soc. Am. 1979. V. 65, No. 6. Pp. 1413–1422. DOI: 10.1121/1.2016503



Numerical analysis of the total scattering cross section on a set of sound-permeable spheres

Nasibullaeva E.Sh.

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

One of the most important subtasks of the problem of acoustic wave scattering on a set of small spherical obstacles is to determine the main characteristic of the scattering phenomenon, namely, the total scattering cross section. Its solution will make it possible to establish at what system parameters the interaction between particles is insignificant and can be neglected (in this case, the problem can be simplified and reduced to the many single particles case), and at what parameters this interaction cannot be neglected. In present work a numerical parametric analysis of the total scattering cross section on a spheres system under the influence of a spherical wave from a monopole radiation source is carried out on the base on an explicit formula for the total scattering cross section on a set of interacting sound-permeable spheres. In order to determine the ratio of the physical parameters of the sphere and the environment, under which the effects of multiple scattering are significant for given types of system configuration, a series of computational experiments was carried out to calculate the main scattering characteristic taking into account multiple scattering, as well as the sums of characteristics for single sound-permeable spheres. It is shown that in all cases considered, the effects of multiple scattering cannot be neglected when determining the total scattering cross section. In the case of air bubbles in water, the type of configuration of the system is an essential factor; for water droplets in the air, both the type of configuration and the number of spheres in it are essential; and for dichloroethane droplets in water, the type of configuration and the number of spheres in it are insignificant factors.

Keywords: acoustic scattering, sound-permeable spheres set, total scattering cross section, monopole radiation source, computational experiment, fluid elasticity

References

- [1] Martin P.A. Acoustic scattering by one bubble before 1950: Spitzer, Willis, and Division 6 // *J. Acoust. Soc. Am.* 2019. Vol. 146. P. 920–926.
DOI: [10.1121/1.5120127](https://doi.org/10.1121/1.5120127)
- [2] Nasibullaeva E.Sh. [Scattering of sound waves on spheres: methods and main characteristics (review)]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2021. V. 16, No. 3–4. Pp. 88–104 (in Russian).
DOI: [10.21662/mfs2021.3.013](https://doi.org/10.21662/mfs2021.3.013)
- [3] Babaylov E.P., Dubov A.A., Kanevskii V.A. [Sound scattering by an absorbing sphere]. *Akusticheskij Zhurnal* [Acoustic Journal]. 1991. V. 37, No. 5. Pp. 851–857 (in Russian).
http://www.akzh.ru/pdf/1991_5_851-857.pdf
- [4] Hahn T.R. Low frequency sound scattering from spherical assemblages of bubbles using effective medium theory // *J. Acoust. Soc. Am.* 2007. V. 122, No. 6. Pp. 3252–3267.
DOI: [10.1121/1.2793610](https://doi.org/10.1121/1.2793610)
- [5] Skaropoulos N.C., Yagridou H.D., Chrissoulidis D.P. Interactive resonant scattering by a cluster of air bubbles in water // *J. Acoust. Soc. Am.* 2003. V. 113, No. 6. Pp. 3001–3011.
DOI: [10.1121/1.1572141](https://doi.org/10.1121/1.1572141)
- [6] Nasibullaeva E.Sh. [Numerical analysis of multiple scattering of an acoustic wave on a set of sound-permeable spheres in 3d space]. *Vychislitel'naya mexanika sploshnyx sred* [Computational Continuum Mechanics]. 2022. V. 15, No. 4. Pp. 383–398 (in Russian).
DOI: [10.7242/1999-6691/2022.15.4.29](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2022.15.4.29)
- [7] Nasibullaeva E.Sh. [Simulation of acoustic scattering from a set of sound-permeable spheres in 3D space]. *Vychislitel'nye texnologii* [Computational technologies]. 2022. V. 27, No. 2. Pp. 19–36 (in Russian).
DOI: [10.25743/ICT.2022.27.2.003](https://doi.org/10.25743/ICT.2022.27.2.003)
- [8] Nasibullaeva E.Sh. [Numerical analysis of acoustic scattering from sound-permeable spheres under external influence]. *Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University)* [Vestnik UGATU]. 2021. V. 25, No. 2(92). Pp. 93–101 (in Russian).
DOI: [10.54708/19926502_2021_2529293](https://doi.org/10.54708/19926502_2021_2529293)
- [9] Vladimirov V.S. *Equations of Mathematical Physics*. New York: Marcel Dekker, Inc. 1971. 426 p.

- [10] Gumerov N.A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion // J. Acoust. Soc. Am. 2002. Vol. 112, No. 6. P. 2688–2701.
DOI: [10.1121/1.1517253](https://doi.org/10.1121/1.1517253)
- [11] Korn G.A., Korn Th.M. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. McGraw Hill Book Company, 1968. 943 p.
- [12] Ivanov Ye.A. Diffraction of electromagnetic waves on two bodies. Washington: National Aeronautics and Space Administration, 1970. 597 p.
- [13] Nasibullaeva E.Sh. [The study of acoustic scattering from a single sound-permeable sphere]. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems]. 2018. V. 13, No. 4. Pp. 79–91 (in Russian).
DOI: [10.21662/mfs2018.4.012](https://doi.org/10.21662/mfs2018.4.012)
- [14] LAPACK – Linear Algebra PACKage.
<https://netlib.sandia.gov/lapack/> (accessed: 08.06.2023).
- [15] Zhang S., Jin J. Computation of special functions. New York: Wiley–Interscience, 1996. 717 p.
- [16] Sage K.A., George J., Überall H. Multipole resonances in sound scattering from gas bubbles in a liquid // J. Acoust. Soc. Am. 1979. V. 65, No. 6. Pp. 1413–1422.
DOI: [10.1121/1.2016503](https://doi.org/10.1121/1.2016503)