

ISSN: 2658–5782

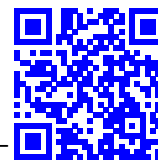
Номер 2

2023

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org





Дробно-интегральное обобщение уравнения Рапопорта–Лиса

Лукашук С.Ю.

Уфимский университет науки и технологий, Уфа

Рассматривается одномерная дробно-интегральная модель двухфазной фильтрации в пористой среде со степенной памятью с учетом капиллярных сил. На основе дробно-интегрального обобщения закона Дарси и классических уравнений неразрывности для фаз, в приближении отсутствия гравитационных сил выводится дробно-интегральный аналог уравнения Рапопорта–Лиса. Показано, что в предельном случае постоянного капиллярного давления полученное уравнение переходит в классическое уравнение Бакли–Левретта. Приводится пример постановки начально-краевой задачи для полученного уравнения в случае коллектора конечной протяженности. В отличие от классического уравнения Рапопорта–Лиса его дробно-интегральный аналог в общем случае не обладает решением типа бегущей волны в силу неинвариантности дробного интеграла с конечным нижним пределом относительно преобразования переноса по времени. Однако для модельной задачи вытеснения в неограниченном коллекторе, рассматриваемой как задача распада разрыва, справедливо приближение неограниченной памяти, для которого полученное уравнение обладает таким решением. В данном приближении получены соотношения для основных характеристик скачка насыщенности. В частности показано, что скорость движения скачка может быть найдена из уравнения, включающего дробно-интегральную характеристику функции Левретта. Также асимптотически исследовано поведение скачка вблизи его левой и правой границ при различных уровнях насыщенности на границах. Доказано, что если начальная насыщенность превышает остаточную насыщенность вытесняющей фазы, то на правой границе насыщенность на скачке экспоненциально стремится к начальной. На левой границе асимптотика скачка также является экспоненциальной за исключением одного особого случая, в котором она становится дробно-степенной. Для случая «слабой» неограниченной памяти, когда порядок дробного интегрирования близок к нулю и может рассматриваться как малый параметр, для исследуемого дробно-интегрального уравнения Рапопорта–Лиса аналитически построено его приближенное решение.

Ключевые слова: двухфазная фильтрация, капиллярные силы, интеграл дробного порядка, дробно-интегральный закон Дарси, решение типа бегущей волны, малый параметр, приближенное решение

1. Введение

Развитие методов математического моделирования процессов многофазной фильтрации в неоднородных средах сложной структуры является важным разделом современной гидромеханики. Существуют различные подходы к учету в модели сложной структуры среды [1, 2]. Классический подход приводит к моделям двойной и тройной пористости и проницаемости, учет случайности в распределении неоднородностей порождает сто-

хастические модели, для описания трещиновато-пористых сред применяют фрактальную геометрию. При этом вне зависимости от подхода учет структуры среды неизбежно ведет к усложнению математической модели и увеличению числа ее параметров, требующих идентификации для возможности ее практического использования. В этой связи несомненный интерес представляют модели, обладающие относительно небольшим количеством параметров, но позволяющие адекватно описывать исследуемые процессы с требуемой для практики точностью.

ся в последнее время подходов к построению таких моделей основан на использовании аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка [3]. В основе подхода лежит идея о том, что влияние неоднородности и сложности среды на исследуемый процесс переноса может быть описано в терминах памяти и пространственной нелокальности [4, 5]. В этом случае отпадает необходимость в описании собственно внутренней структуры среды, которая в подавляющем большинстве случаев является неизвестной. В результате неоднородная среда приближается к модельной однородной, но обладающей эффектами памяти или пространственной нелокальности, которые математически могут быть описаны интегральными операторами с разностными ядрами. Аналогичный подход известен в линейной наследственной теории фильтрации [6]. Использование в качестве ядер степенных функций приводит к интегральным и дифференциальным операторам дробного порядка. В рамках феноменологического подхода такие операторы обычно включаются в математические записи феноменологических гипотез (таких, например, как закон Дарси). Важно отметить, что при этом основные балансные уравнения, вытекающие из законов сохранения, остаются неизменными. Полученные в результате такого подхода модели математически представляют собой так называемые дробно-дифференциальные уравнения [7]. По сравнению с классическими, дополнительными параметрами таких моделей являются только дробные порядки интегрирования или дифференцирования, число которых в рамках одной модели обычно невелико (как правило, один-два). При этом, однако, меняется физический смысл некоторых основных коэффициентов модели, так как они приобретают дробную размерность. Это неизбежно приводит к необходимости их дополнительной идентификации.

Особенностью дробно-дифференциальных моделей переноса является аномальность описываемых ими процессов [7, 8]. Такие процессы при стохастическом рассмотрении не подчиняются гауссовой статистике и имеют степенную асимптотику в функциях распределения [9]. Важно отметить, что в этом случае аномальность является следствием специального вида усреднения, приводящего к неполному описанию среды [7]. Например, в трещиновато-пористой среде с развитой структурой трещин при усредненном описании в рамках однородной модели наблюдается ускоренная фильтрация, протекающая по супердиффузионному механизму. И напротив, наличие в среде различных локальных включений и каверн, играющих роль ловушек для фильтрующейся фазы, может приво-

дить к замедлению фильтрационного процесса по субдиффузионному механизму. При этом при измерениях в реальных пластовых системах аномальность процессов будет наблюдаться непосредственно, поскольку в этом случае измеряемые параметры всегда являются усредненными. Например, при измерении дебита скважины нет возможности измерить отдельно доли флюида, приходящие по сети трещин и через основную пористую матрицу.

Одной из первых работ, в которой для учета эффекта памяти в закон Дарси был включен оператор дробного дифференцирования по времени, является статья [10]. В дальнейшем этот подход успешно применялся для моделирования трещиновато-пористых коллекторов [11, 12]. В целом, в настоящее время для задач подземной гидромеханики уже предложено и исследовано достаточно большое количество дробно-дифференциальных математических моделей (см., например, обзор [13]). Вопросам феноменологического подхода к построению нелинейных дробно-дифференциальных моделей фильтрации посвящена работа [14]. Тем не менее многие, в том числе классические задачи многофазной фильтрации в рамках дробно-дифференциального подхода, все еще слабо изучены. Настоящая статья призвана частично восполнить этот пробел применительно к процессу ускоренной двухфазной фильтрации с учетом капиллярных сил в среде со степенной памятью.

2. Дробно-интегральное обобщение уравнения Рапопорта–Лиса

Рассмотрим процесс двухфазной фильтрации в среде с памятью с учетом капиллярных сил. Среда считается однородной и недеформируемой, фильтрующиеся фазы — несжимаемыми. Ограничимся рассмотрением одномерного течения в случае плоской симметрии. Соответствующие уравнения неразрывности для фаз хорошо известны [15] и имеют вид:

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial s_1}{\partial t} + \frac{\partial w_1}{\partial x} &= 0, \\ \phi \frac{\partial s_2}{\partial t} + \frac{\partial w_2}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ϕ — пористость среды; t — время; w_i и s_i — скорость и насыщенность i -й фазы ($i = 1, 2$), соответственно. Насыщенности связаны соотношением $s_1 + s_2 = 0$, поэтому в дальнейшем обозначим

$$s_1 = s, \quad s_2 = 1 - s.$$

Тогда из (1) следует, что суммарная скорость двухфазного потока $w = w_1 + w_2$ не зависит от пространственной координаты x : $w = w(t)$.

Пусть для фаз выполнены дробно-интегральные обобщения закона Дарси (гравитационными силами пренебрегаем):

$$w_i = -\frac{kk_{ri}}{\mu_i T_\alpha} {}_{t_0}I_t^\alpha \left(\frac{\partial p_i}{\partial x} \right), \quad 0 < \alpha < 1, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

где k — проницаемость пористой среды; k_{ri} — относительная фазовая проницаемость i -й фазы; μ_i — динамическая вязкость i -й фазы; p_i — давление i -й фазы; T_α — временной релаксационный параметр, имеющий дробную размерность s^α ;

$$({}_{t_0}I_t^\alpha y)(t, x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{y(\tau, x)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} d\tau$$

— интеграл дробного порядка α [3]; $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция.

Феноменологические соотношения (2) являются специальным частным случаем известной наследственной фильтрационной модели [6], учитывающей неравновесные эффекты, и определяют ускоренный (супердиффузионный) режим фильтрации [14]. В предельном случае $\alpha = 0$ оператор дробного интегрирования ${}_{t_0}I_t^\alpha$ превращается в единичный и уравнения (2) переходят в классические законы Дарси для фаз.

В дальнейшем будем предполагать, что проницаемость среды и относительные фазовые проницаемости в (2) не зависят от характеристик памяти среды. Как и в классическом случае, также будем полагать, что относительные фазовые проницаемости являются функциями насыщенности: $k_{ri} = k_{ri}(s)$ ($i = 1, 2$). Таким образом, влияние памяти в рассматриваемой модели будет определяться двумя постоянными параметрами: порядком α и коэффициентом T_α . Будем рассматривать простейший случай $k = \text{const}$, $\mu_i = \text{const}$ ($i = 1, 2$), который позволит относительно просто выявить основные качественные отличия рассматриваемой дробно-интегральной модели от классической.

Для сокращения записи введем дробные аналогии подвижностей фаз:

$$\lambda_{\alpha i}(s) = \frac{kk_{ri}(s)}{\mu_i T_\alpha}, \quad i = 1, 2.$$

Рассмотрим процесс фильтрации с учетом капиллярных сил. Тогда давления фаз связаны между собой через капиллярное давление p_c :

$$p_2 - p_1 = p_c. \quad (3)$$

Капиллярное давление является функцией насыщенности и по аналогии с классической пористой средой может быть записано в виде [15]

$$p_c(s) = \bar{p}_c J(s),$$

где $J(s)$ — функция Леверетта; \bar{p}_c — характерное капиллярное давление, соответствующее насыщенности $s = \hat{s}$ такой, что $J(\hat{s}) = 1$. Для обычной пористой среды \bar{p}_c зависит от проницаемости k и пористости ϕ , в случае среды с памятью \bar{p}_c может дополнительно зависеть от α и T_α .

С учетом (2) и (3), в силу линейности операторов дифференцирования и дробного интегрирования, соотношение для суммарной скорости двухфазного потока w может быть записано в виде

$$-w(t) = [\lambda_{\alpha 1}(s) + \lambda_{\alpha 2}(s)] {}_{t_0}I_t^\alpha \left(\frac{\partial p_1}{\partial x} \right) + \bar{p}_c \lambda_{\alpha 2}(s) {}_{t_0}I_t^\alpha \left(J'(s) \frac{\partial s}{\partial x} \right).$$

Выражая отсюда слагаемое с p_1 и подставляя его в обобщенный закон Дарси для скорости первой фазы, находим

$$w_1 = f(s) \left[w(t) + \bar{p}_c \lambda_{\alpha 2}(s) {}_{t_0}I_t^\alpha \left(J'(s) \frac{\partial s}{\partial x} \right) \right], \quad (4)$$

где

$$f(s) = \frac{\lambda_{\alpha 1}(s)}{\lambda_{\alpha 1}(s) + \lambda_{\alpha 2}(s)} = \frac{k_{r1}(s)}{k_{r1}(s) + \frac{\mu_1}{\mu_2} k_{r2}(s)}$$

— функция Бакли–Леверетта. Заметим, что поскольку относительные фазовые проницаемости предполагаются независимыми от α , функция $f(s)$ также не зависит от α .

Подстановка (4) в первое уравнение системы (1) приводит к дробно-интегральному обобщению уравнения Рапопорта–Лиса:

$$\phi \frac{\partial s}{\partial t} + w(t) f'(s) \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[g_\alpha(s) {}_{t_0}I_t^\alpha \left(J'(s) \frac{\partial s}{\partial x} \right) \right] = 0, \quad (5)$$

где

$$g_\alpha(s) = \bar{p}_c f(s) \lambda_{\alpha 2}(s).$$

В предельном случае $\alpha = 0$ это уравнение переходит в классическое уравнение Рапопорта–Лиса. Заметим также, что в случае $p_c = \text{const}$ нелокальное слагаемое в (5) обращается в нуль и в результате получается уравнение Бакли–Леверетта [15]. Таким образом, в рассматриваемой модели память среды будет проявляться только при переменном капиллярном давлении.

Для нахождения однозначного решения уравнения (5) необходимо поставить соответствующую начально-краевую задачу. Поскольку это уравнение содержит только оператор дробного интегрирования, но не дробного дифференцирования, могут быть использованы обычные начальные и граничные условия. Например, если в ограниченной

области $0 \leq x \leq L$ рассматривается задача вытеснения, в которой первая фаза является вытесняющей, то начальные и граничные условия для уравнения (5) могут быть записаны в виде:

$$s(t_0, x) = s_0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (6)$$

$$s(t, 0) = s_1, \quad \left. \frac{\partial s}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad t > t_0, \quad (7)$$

где s_0 — некоторая начальная насыщенность, а s_1 — насыщенность на границе закачки вытесняющей фазы. Если закачивается «чистая» первая фаза, то можно положить $s_1 = 1$, в этом случае $f(s_1) = 1$.

В силу переменности коэффициентов уравнения (5) в общем случае решение задачи (5)–(7) возможно только численно. Однако ряд качественных характеристик процесса вытеснения в среде с памятью может быть получен аналитически из рассмотрения специальной модельной задачи.

3. Влияние памяти среды на структуру скачка насыщенности

Хорошо известно [15], что в случае постоянной скорости $w(t) = w_0 = \text{const}$ классическое уравнение Рапопорта–Лиса допускает решение типа бегущей волны. Это обусловлено его инвариантностью относительно преобразований переноса как по пространственной, так и по временной переменным. Именно это решение имеет основное значение в задаче одномерного вытеснения несмешивающихся жидкостей с учетом капиллярных сил.

Оператор дробного интегрирования $t_0 I_t^\alpha$ не инвариантен относительно преобразования переноса по t при конечном пределе интегрирования t_0 [16]. Поэтому, в отличие от классического случая, уравнение (5) при $t_0 > -\infty$ решения типа бегущей волны не допускает.

Тем не менее, ситуация меняется при $t_0 \rightarrow -\infty$. Этот случай соответствует так называемой полной памяти среды [7]. Тогда оператор $-\infty I_t^\alpha$ уже инвариантен относительно преобразования переноса по t и в этом случае уравнение (5) будет обладать решением типа бегущей волны вида

$$s(t, x) = \varphi(\xi), \quad \xi = x - ct, \quad (8)$$

где c — скорость движения волны.

Рассмотрим модельную задачу вытеснения в неограниченном коллекторе как задачу распада разрыва. В этом случае $x \in (-\infty, \infty)$, а начальные и граничные условия имеют следующий вид:

$$s(t_0, x) = \begin{cases} s_1, & x < 0, \\ s_0, & x > 0; \end{cases} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\partial s(t, x)}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial s(t, x)}{\partial x} = 0, \quad t \geq t_0. \quad (10)$$

Поскольку $s = \text{const}$ является решением уравнения (5), то, не ограничивая общности, можно полагать, что условия (9) и (10) выполнены и при всех временах $t < t_0$. Тогда в уравнении (5) можно положить $t_0 = -\infty$ и рассматривать процесс вытеснения в среде с полной памятью. В этом случае при $t > t_0$ будет справедливо решение типа бегущей волны (8), в котором в качестве c будет выступать скорость движения скачка насыщенности.

Рассмотрим, как в этом случае преобразуется дробный интеграл, входящий в уравнение (5). Имеем

$$\begin{aligned} & -\infty I_t^\alpha \left(J'(s) \frac{\partial s}{\partial x} \right) = \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \frac{\partial J(s(\tau, x))}{\partial x} d\tau = \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{1}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \frac{\partial J(\varphi(x-c\tau))}{\partial x} d\tau = \\ & = \frac{c^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\xi}^{\infty} \frac{1}{(\eta-\xi)^{1-\alpha}} \frac{dJ(\varphi(\eta))}{d\eta} d\eta = \\ & = c^{-\alpha} \xi I_\xi^\alpha \left(J'(\varphi) \frac{d\varphi}{d\xi} \right). \end{aligned}$$

В результате дробно-интегральное уравнение Рапопорта–Лиса (5) редуцируется к обыкновенному дробно-дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} & -c\varphi \frac{d\varphi}{d\xi} + w_0 \frac{df_\alpha(\varphi)}{d\xi} - \\ & -c^{-\alpha} \frac{d}{d\xi} \left[g_\alpha(\varphi) \xi I_\xi^\alpha \left(J'(\varphi) \frac{d\varphi}{d\xi} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что, как и в классическом случае, полученное уравнение один раз легко интегрируется:

$$c\varphi\varphi - w_0 f(\varphi) + c^{-\alpha} g_\alpha(\varphi) \xi I_\xi^\alpha \left(J'(\varphi) \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = C, \quad (11)$$

где C — постоянная интегрирования, которая может быть найдена из граничных условий.

Поскольку при $p_c = 0$ уравнение (5) переходит в классическое уравнение Бакли–Леверетта, остаются справедливы все ключевые соотношения, полученные в классической теории двухфазной фильтрации при отсутствии капиллярных эффектов [15]. Тогда, как и в случае классического уравнения Рапопорта–Лиса, решение уравнения (11) при $\xi \rightarrow \pm\infty$ должно сопрягаться с решением уравнения Бакли–Леверетта. В результате получаем, что решение уравнения (5) должно удовлетворять следующим предельным соотношениям:

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \varphi(\xi) = s_c, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \varphi(\xi) = s_0, \quad (12)$$

где s_0 — начальная насыщенность из (9), а s_c — так называемая насыщенность на скачке. В задаче Бакли–Левретта выделяется случай стационарного скачка, когда насыщенности по обе стороны от него остаются постоянными [15]. В этом случае s_c определяется как решение уравнения

$$f'(s_c) = \frac{f(s_c) - f(s_0)}{s_c - s_0}. \quad (13)$$

Очевидно, что физический смысл будут иметь только те решения уравнения (11), на которых входящий в это уравнение дробный интеграл принимает конечные значения при $\xi \rightarrow \pm\infty$. Учитывая, что интегральное уравнение

$$({}_\xi I_\infty^\alpha y)(\xi) = a, \quad a \text{ const},$$

имеет только тривиальное решение $y = 0$, при котором $a = 0$, получаем

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} {}_\xi I_\infty^\alpha \left(J'(\varphi) \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = 0.$$

Тогда переходя в уравнении (11) к пределу при $\xi \rightarrow \infty$, с учетом второго условия из (12) находим значение постоянной C :

$$C = c\phi s_0 - w_0 f(s_0).$$

В результате (11) сводится к дробно-дифференциальному уравнению

$${}_\xi I_\infty^\alpha \left(J'(\varphi) \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = F_\alpha(\varphi), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (14)$$

где

$$F_\alpha(\varphi) = \frac{w_0(f(\varphi) - f(s_0)) - c\phi(\varphi - s_0)}{c^{-\alpha} g_\alpha(\varphi)}.$$

Решение этого уравнения должно удовлетворять первому из условий в (12).

Определим теперь характер распределения насыщенности вблизи условных границ скачка. Рассмотрим уравнение (14) при значениях φ близких к s_0 , то есть при достаточных больших значениях координаты ξ . Пусть $s_0 > s_*$, где s_* — остаточная насыщенность первой фазы. Тогда $f(s_0) > 0$ и, следовательно, $g_\alpha(s_0) > 0$. В этом случае с использованием разложения

$$f(\varphi) \approx f(s_0) + f'(s_0)(\varphi - s_0), \quad \varphi \rightarrow s_0,$$

уравнение (14) линеаризуется и приводится к виду

$${}_\xi I_\infty^\alpha \left(\frac{d\varphi}{d\xi} \right) = A(\varphi - s_0), \quad \xi \rightarrow \infty,$$

где постоянная

$$A_0 = \frac{w_0 f'(s_0) - c\phi}{c^{-\alpha} g_\alpha(s_0) f'(s_0)}.$$

Заменой переменных $\psi = \varphi - s_0$ это уравнение приводится к однородному:

$${}_\xi I_\infty^\alpha \left(\frac{d\psi}{d\xi} \right) = A_0 \psi.$$

Учитывая известное [3] соотношение

$${}_\xi I_\infty^\alpha e^{-\lambda\xi} = \lambda^{-\alpha} e^{-\lambda\xi}, \quad \lambda > 0,$$

находим его решение в виде

$$\psi(\xi) = C_0 e^{-\lambda_0 \xi}, \quad \lambda_0 = (-A_0)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

где C_0 — постоянная интегрирования. Решение имеет смысл при $A_0 < 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае на правой границе скачок насыщенности экспоненциально убывает и стремится к $s = s_0$.

Пусть теперь $s_0 = s_*$. Найдем асимптотику функции $F_\alpha(\varphi)$ при $\varphi \rightarrow s_*$. Имеем $f(s_*) = 0$, поэтому $g_\alpha(s_*) = 0$. На практике относительные фазовые проницаемости часто аппроксимируются степенными зависимостями. Пусть $k_{r1}(s) \sim (s - s_*)^n$, $n > 1$. Тогда $f(s) \sim (s - s_*)^n$ и $g_\alpha(s) \sim (s - s_*)^n$, поэтому $F_\alpha(\varphi) \sim (\varphi - s_*)^{1-n}$. Таким образом, в точке $\varphi = s_*$ правая часть уравнения (14) становится сингулярной. Это означает, что дробный интеграл в левой части должен расходиться, что противоречит физике процесса. Отсюда следует, что, как и в классическом случае $\alpha = 0$, значение $s = s_*$ достигается не асимптотически, а при конечном значении координаты ξ , то есть имеется выраженный фронт вытеснения [15].

Теперь рассмотрим асимптотику на левой границе. Переходя в (14) к пределу при $\xi \rightarrow -\infty$ и учитывая первое соотношение из (12), получаем

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} {}_\xi I_\infty^\alpha \left(J'(\varphi) \frac{d\varphi}{d\xi} \right) = S,$$

где

$$S = \frac{w_0[f(s_c) - f(s_0)] - c\phi(s_c - s_0)}{c^{-\alpha} g_\alpha(s_c)}.$$

Отметим, что в классическом случае $S = 0$ в силу условия $\varphi'(-\infty) = 0$. В среде с памятью всегда $S \neq 0$, поскольку функция Левретта является однозначной [15], и подынтегральное выражение в приведенном выше дробном интеграле не меняет знак при $\xi \in (-\infty, \infty)$. Для стационарного скачка с учетом выражения (13) получаем

$$S = S_s(s_c - s_0), \quad S_s = \frac{w_0 f'(s_c) - c\phi}{c^{-\alpha} g_\alpha(s_c)}. \quad (15)$$

Это уравнение служит для нахождения скорости s , однако выписать его решение в явном виде не представляется возможным.

Далее заметим, что

$$\begin{aligned} {}_{\xi}I_{\infty}^{\alpha}y &\equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\xi}^{\infty} \frac{y(\eta)d\eta}{(\eta - \xi)^{1-\alpha}} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(\eta)d\eta}{|\eta - \xi|^{1-\alpha}} - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{y(\eta)d\eta}{(\xi - \eta)^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание условие $\varphi'(-\infty) = 0$, получаем, что второй интеграл в этом случае обращается в нуль, поэтому

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J'(\varphi)}{|\eta - \xi|^{1-\alpha}} d\eta = S.$$

Тогда, с учетом обозначения для левостороннего дробного интеграла

$$-_{\infty}I_{\xi}^{\alpha}y = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{y(\eta)d\eta}{(\xi - \eta)^{1-\alpha}},$$

для достаточно больших отрицательных значений ξ находим

$${}_{\xi}I_{\infty}^{\alpha} \left(J'(\varphi) \frac{d\varphi}{d\xi} \right) \approx S - -_{\infty}I_{\xi}^{\alpha} \left(J'(\varphi) \frac{d\varphi}{d\xi} \right).$$

Подставляя данное представление в уравнение (14) и учитывая конечность значения $J'(s_c)$ получаем, что асимптотическое поведение скачка насыщенности при $\xi \rightarrow -\infty$ описывается линейным уравнением

$$-_{\infty}I_{\xi}^{\alpha} \left(\frac{d\varphi}{d\xi} \right) = A_c(s_c - \varphi) + B_c(s_c - \varphi)^2, \quad (16)$$

где

$$A_c = \frac{S_s g_{\alpha}(s_c) - S g'_{\alpha}(s_c)}{g_{\alpha}(s_c) J'(s_c)}, \quad B_c = \frac{S_s g'_{\alpha}(s_c)}{g_{\alpha}(s_c) J'(s_c)}.$$

Для обычной пористой среды ($\alpha = 0$) имеем $S = 0$, а в случае стационарного скачка и $S_s = 0$. Тогда $A_c = 0$ и правая часть асимптотического уравнения (16) является квадратичной. В теории двухфазной фильтрации этот случай хорошо известен [15]. В случае среды с памятью $S \neq 0$ и для стационарного скачка выполнено (15), при этом $S_s \neq 0$. Тогда $A_c = 0$ только при условии

$$g_{\alpha}(s_c) = g'_{\alpha}(s_c)(s_c - s_0).$$

В результате существует единственная пара (s_c, s_0) , определяющая стационарный скачок и являющаяся решением системы уравнений (13), (16).

Для нестационарного скачка условие (13) уже не выполнено. Тогда при заданном s_c значение s_0 будет определяться уравнением

$$S_s g_{\alpha}(s_c) = S g'_{\alpha}(s_c).$$

Таким образом, в среде с памятью квадратичная правая часть в уравнении (16) возможна только при определенных значениях начальной насыщенности s_0 , однозначно связанных с насыщенностью на скачке s_c . Во всех остальных случаях $A_c \neq 0$ и правая часть асимптотического уравнения (16) будет в главном приближении линейной.

Найдем теперь левую асимптотику скачка в линейном случае. Подстановкой $\psi = s_c - \varphi$ уравнение (16) приводится к виду

$$-_{\infty}I_{\xi}^{\alpha} \left(\frac{d\psi}{d\xi} \right) = -A_c \psi,$$

решением которого является функция

$$\psi(\xi) = C_c e^{\lambda_c \xi}, \quad \lambda_c = (-A_c)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Здесь C_c — постоянная интегрирования, определяемая по условной границе скачка. Решение имеет смысл при $A_c < 0$. В этом случае при $\xi \rightarrow -\infty$ скачок насыщенности асимптотически экспоненциально стремится к $s = s_c$.

Теперь рассмотрим уравнение (16) при условии $A_c = 0$. Выполняя, как и ранее, подстановку $\psi = s_c - \varphi$, приводим это уравнение к виду

$$-_{\infty}I_{\xi}^{\alpha} \left(\frac{d\psi}{d\xi} \right) = -B_c \psi^2.$$

Используя известную [3] формулу дробного интегрирования степенной функции

$$\begin{aligned} -_{\infty}I_{\xi}^{\alpha} (b - a\xi)^{\gamma-1} &= \frac{1}{a^{\alpha}} \frac{\Gamma(1 - \alpha - \gamma)}{\Gamma(1 - \gamma)} (b - a\xi)^{\alpha+\gamma-1}, \\ a > 0, \quad a\xi < b, \quad \alpha + \gamma < 1, \end{aligned}$$

приходим к следующему степенному решению рассматриваемого уравнения:

$$\psi(\xi) = -\frac{1}{B_c} \frac{\Gamma(2 - 2\alpha)}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{1}{(C_c - \xi)^{1-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Здесь, как и ранее, C_c — постоянная интегрирования, задающая условную границу асимптотической области скачка. Таким образом, в этом случае на левой границе скачок имеет степенную асимптотику — так называемый «тяжелый хвост».

4. Приближенное решение дробно-интегрального уравнения Рапопорта–Лиса

В предельном случае $\alpha = 0$ уравнение (14) является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка и легко интегрируется. Это решение хорошо известно (см., например, [15]). При $0 < \alpha < 1$ задача построения решения дробно-дифференциального уравнения (14) становится нетривиальной. Методов нахождения точного решения этого уравнения для случая произвольной функции $F_\alpha(\varphi)$ не существует. Поэтому в настоящей работе построим его приближенное аналитическое решение при некоторых дополнительных ограничениях.

Прежде всего заметим, что функция Леверетта $J(\varphi)$ является однозначной [15]. Тогда уравнение $J(\varphi) = u$ может быть однозначно разрешено относительно φ : $\varphi = J^{-1}(u)$. В результате (14) может быть переписано в виде

$${}_{\xi}I_{\infty}^{\alpha} \left(\frac{du}{d\xi} \right) = \tilde{F}_{\alpha}(u), \quad 0 < \alpha < 1,$$

где $\tilde{F}_{\alpha}(u) = F_{\alpha}(J^{-1}(u))$. В данном случае $u = u(\xi)$ — новая зависимая переменная.

Далее рассмотрим случай, когда параметр α в уравнении (14) близок к нулю, то есть может рассматриваться как малый параметр. Обозначим $\alpha = \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Тогда используя известную [3] формулу разложения дробного интеграла по порядку дробного интегрирования

$$\begin{aligned} &({}_{\xi}I_{\infty}^{\varepsilon}y)(\xi) = y(\xi) + \\ &+ \varepsilon \left[\gamma y(\xi) + \frac{d}{d\xi} \int_{\xi}^{\infty} \ln(\eta - \xi) y(\eta) d\eta \right] + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

где $\gamma \approx 0,57721566$ — постоянная Эйлера, уравнение (14) с точностью $o(\varepsilon)$ можно приблизить следующим нелинейным интегро-дифференциальным уравнением с малым параметром

$$(1 + \varepsilon\gamma) \frac{du}{d\xi} + \varepsilon \frac{d^2}{d\xi^2} \int_{\xi}^{\infty} \ln(\eta - \xi) u(\eta) d\eta = \tilde{F}_{\alpha}(u). \quad (17)$$

Будем искать решение уравнения (17) в виде $u(\xi) = u_0(\xi) + \varepsilon u_1(\xi) + o(\varepsilon)$. После подстановки этого решения в уравнение (17) и расщепления его по ε , приходим к системе:

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{d\xi} &= \tilde{F}_{\alpha}(u_0), \\ \frac{du_1}{d\xi} - \tilde{F}'_{\alpha}(u_0)u_1 &= -\gamma \tilde{F}_{\alpha}(u_0) - \frac{dL}{d\xi}, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$L(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \ln(\eta - \xi) \tilde{F}_{\alpha}(u_0(\eta)) d\eta.$$

Первое уравнение в (18) легко интегрируется в квадратурах:

$$\int \frac{du_0}{\tilde{F}_{\alpha}(u_0)} = \xi + C_0, \quad (19)$$

где C_0 — произвольная постоянная.

Второе уравнение системы (18) является линейным неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка и решается в явном виде:

$$\begin{aligned} u_1(\xi) &= (C_1 - \gamma\xi) \tilde{F}_{\alpha}(u_0) - L(\xi) - \\ &- \int \frac{\tilde{F}'_{\alpha}(u_0)}{\tilde{F}_{\alpha}(u_0)} L(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, в неявном виде приближенное решение уравнения (14) имеет вид:

$$\varphi(\xi) \approx J^{-1}(u_0(\xi) + \varepsilon u_1(\xi))$$

или

$$\varphi(\xi) \approx J^{-1}(u_0(\xi)) + \varepsilon u_1(\xi) (J^{-1})'(u_0(\xi)),$$

в котором функции u_0 и u_1 определяются соотношениями (19) и (20). Тем самым, для насыщенности построено приближенное решение типа бегущей волны $s(t, x) = \varphi(x - ct)$.

5. Заключение

Полученные в работе результаты исследования процесса двухфазной фильтрации в среде со степенной памятью носят преимущественно качественный характер. Более детальное исследование может быть выполнено методами компьютерного моделирования. При этом интерес будет представлять сравнение численного решения с построенным в работе приближенным аналитическим решением типа бегущей волны с точки зрения границ применимости последнего. Также остается открытым вопрос о характере поведения решения полученного дробно-интегрального уравнения Рапопорта–Лиса в случае конечности коллектора и степени его отличия от решения типа бегущей волны. Приведенные задачи определяют направления ближайших исследований по данной тематике.

Список литературы

- [1] Мирзаджанзаде А.Х., Хасанов М.М., Бахтизин Р.Н. Моделирование процессов нефтегазодобычи. Нелинейность, неравновесность, неопределенность. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 368 с.

- [2] Sahimi M. Flow and transport in porous media and fractured rock: from classical methods to modern approaches. Weinheim: Wiley-VCH, 2011. 733 p.
- [3] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
- [4] Tarasov V.E. Fractional dynamics. Application of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. Heidelberg: Springer, 2010. 504 p.
- [5] Головизнин В.М., Кондратенко П.С., Матвеев Л.В. и др. Аномальная диффузия радионуклидов в сильнонеоднородных геологических формациях. М.: Наука, 2010. 342 с.
- [6] Молокович Ю.М., Осипов П.П. Основы теории релаксационной фильтрации. Казань: Изд-во Казанского университета, 1987. 114 с.
- [7] Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Изд-во «Артишок», 2008. 512 с.
- [8] Metzler R., Klafter J. The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach // Physics Reports. 2000. V. 339, No. 1. Pp. 1–77.
DOI: [10.1016/S0370-1573\(00\)00070-3](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00070-3)
- [9] Bouchaud J.-P., Georges A. Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanics, models and physical applications // Physics Reports. 1990. V. 195, No. 4. Pp. 127–293.
DOI: [10.1016/0370-1573\(90\)90099-N](https://doi.org/10.1016/0370-1573(90)90099-N)
- [10] Caputo M. Diffusion of fluids in porous media with memory // Geothermics. 1999. V. 28, No. 1. Pp. 113–130.
DOI: [10.1016/S0375-6505\(98\)00047-9](https://doi.org/10.1016/S0375-6505(98)00047-9)
- [11] Raghavan R., Chen C. Fractured-Well Performance Under Anomalous Diffusion // SPE Res. Eval. and Eng. 2013. V. 16, No. 3. Pp. 237–245.
DOI: [10.2118/165584-PA](https://doi.org/10.2118/165584-PA)
- [12] Wei Y., He D., Wang J., Qi Y. A coupled model for fractured shale reservoirs with characteristics of continuum media and fractal geometry // SPE Asia Pacific Unconventional Resources Conference and Exhibition, Brisbane, Australia, 9–11 November 2015. 2015. 31 p. SPE-176843-MS.
DOI: [10.2118/176843-MS](https://doi.org/10.2118/176843-MS)
- [13] Obembe A.D., Al-Yousef H.Y., Hossain M.E., Abu-Khamsin S.A. Fractional derivatives and their applications in reservoir engineering problems: A review // J. Petrol. Sci. Eng. 2017. V. 157. Pp. 312–327.
DOI: [10.1016/j.petrol.2017.07.035](https://doi.org/10.1016/j.petrol.2017.07.035)
- [14] Газизов Р.К., Лукашук С.Ю. Дробно-дифференциальный подход к моделированию процессов фильтрации в сложных неоднородных пористых средах // Вестник УГАТУ. 2017. Т. 21, № 4 (78). С. 104–112.
<http://journal.ugatu.su/index.php/Vestnik/article/view/140>
- [15] Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.
- [16] Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Yu. Symmetries and group invariant solutions of fractional ordinary differential equations // In Anatoly Kochubei, Yuri Luchko (Eds.), Fractional Differential Equations. Boston: De Gruyter, 2019. Pp. 65–90.
DOI: [10.1515/9783110571660-004](https://doi.org/10.1515/9783110571660-004)



Fractional-order integral generalization of the Rapoport–Leas equation

Lukashchuk S.Yu.

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

A one-dimensional time-fractional integral model for a two-phase flow through a porous medium with power-law memory in the presence of capillary forces is considered. Based on the time-fractional integral generalization of Darcy's law and the classical mass balance equations for phases, neglecting gravity forces, a time-fractional integral generalization of the Rapoport–Leas equation is derived. It is shown that in the limiting case of constant capillary pressure, the obtained equation coincides with the classical Buckley–Leverett equation. An example of initial boundary value problem for the derived fractional integral equation is given for the case of a finite reservoir. Unlike the classical Rapoport–Leas equation, its time-fractional integral analogue does not have a traveling wave solution in general case. It is due to the fact that the fractional integral with a finite lower limit is not invariant with respect to translations in time. However, for the model problem of two-phase displacement in an unbounded reservoir, considered as a discontinuity breakup problem, the full memory approximation is valid. In this case the obtained equation has a traveling wave solution. In this approximation, relations for the main characteristics of the saturation jump on the shock are obtained. In particular, it is shown that the speed of the shock can be found from an equation that includes the time-fractional integral characteristic of the Leverett function. The behavior of the shock near its left and right boundaries is also asymptotically studied for different saturation levels at the boundaries. It has been proven that if the initial saturation exceeds the residual saturation of the displacing phase, then on the right boundary the saturation at the jump exponentially tends to the initial one. On the left boundary, the asymptotic behavior of the jump is also exponential, with the exception of one special case in which it becomes a fractional power law. For the equation in question, an approximate solution has been analytically constructed for the case of «weak» full memory, when the order of fractional integration is close to zero and can be considered as a small parameter.

Keywords: two-phase flow in porous media, capillary forces, fractional integral, fractional-order integral Darcy's law, transient wave solution, small parameter, approximate solution

References

- [1] Mirzadzhanzade A.Kh., Khasanov M.M., Bakhtizin R.N. [Modeling of oil and gas production processes. Nonlinearity, nonequilibrium, indeterminacy] *Modelirovanie processov neftegazodobychi. Nelinei'nost', neravnovesnost', neopredelennost'*. M.-Izhevsk: Institut of computer science, 2004. 368 p. (in Russian)
- [2] Sahimi M. Flow and transport in porous media and fractured rock: from classical methods to modern approaches. Weinheim: Wiley-VCH, 2011. 733 p.
- [3] Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives. Theory and applications. New York: Gordon & Breach Sci. Publishers, 1993. xxxvi+976 p.
- [4] Tarasov V.E. Fractional dynamics. Application of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. Heidelberg: Springer, 2010. 504 p.
- [5] Goloviznin V.M., Kondratenko P.S., Matveev L.V. et al. [Anomalous diffusion of radionuclides in highly disordered geological formations] *Anomal'naya diffuziya v sil'noneodnorodnykh geologicheskikh formatsiyah*. M.: Nauka, 2010. 342 p. (in Russian)
- [6] Molokovich Yu.M., Osipov P.P. [Basis of the theory of relaxation filtration] *Osnovy teorii relaksacionnoi' filtratsii*. Kazan: Izd-vo Kazanskogo universiteta, 1987. 114 p. (in Russian)
- [7] Uchaikin V.V. [Method of fractional derivatives] *Metod grobnykh proizvodnykh*. Ul'yanovsk: Izd-vo «Artishok», 2008. 512 p. (in Russian)
- [8] Metzler R., Klafter J. The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach // *Physics Reports*. 2000. V. 339, No. 1. Pp. 1–77.
DOI: [10.1016/S0370-1573\(00\)00070-3](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00070-3)
- [9] Bouchaud J.-P., Georges A. Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanics, models and physical applications // *Physics Reports*. 1990. V. 195, No. 4. Pp. 127–293.
DOI: [10.1016/0370-1573\(90\)90099-N](https://doi.org/10.1016/0370-1573(90)90099-N)

- [10] Caputo M. Diffusion of fluids in porous media with memory // Geothermics. 1999. V. 28, No. 1. Pp. 113–130.
DOI: [10.1016/S0375-6505\(98\)00047-9](https://doi.org/10.1016/S0375-6505(98)00047-9)
- [11] Raghavan R., Chen C. Fractured-Well Performance Under Anomalous Diffusion // SPE Res. Eval. and Eng. 2013. V. 16, No. 3. Pp. 237–245.
DOI: [10.2118/165584-PA](https://doi.org/10.2118/165584-PA)
- [12] Wei Y., He D., Wang J., Qi Y. A coupled model for fractured shale reservoirs with characteristics of continuum media and fractal geometry // SPE Asia Pacific Unconventional Resources Conference and Exhibition, Brisbane, Australia, 9-11 November 2015. 2015. 31 p. SPE-176843-MS.
DOI: [10.2118/176843-MS](https://doi.org/10.2118/176843-MS)
- [13] Obembe A.D., Al-Yousef H.Y., Hossain M.E., Abu-Khamsin S.A. Fractional derivatives and their applications in reservoir engineering problems: A review // J. Petrol. Sci. Eng. 2017. V. 157. Pp. 312–327.
DOI: [10.1016/j.petrol.2017.07.035](https://doi.org/10.1016/j.petrol.2017.07.035)
- [14] Gazizov R.K., Lukashchuk S.Yu. [Fractional differentiation approach to modeling of fluid filtration processes in complex heterogeneous porous media] *Drobno-differencial'nyi podhod k modelirovaniyu processov filtratsii v slozhnykh neodnorodnykh poristykh sredah* // Vestnik UGATU. 2017. V. 21, No. 4 (78), Pp. 104–112. (in Russian)
<http://journal.ugatu.su/index.php/Vestnik/article/view/140>
- [15] Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. [Flow of liquids and gases in natural reservoirs] *Dvizhenie zhidkosti i gazov v prirodnykh plastah*. M.: Nedra, 1984. 211 p. (in Russian)
- [16] Gazizov R.K., Kasatkin A.A., Lukashchuk S.Yu. Symmetries and group invariant solutions of fractional ordinary differential equations // In Anatoly Kochubei, Yuri Luchko (Eds.), *Fractional Differential Equations*. Boston: De Gruyter, 2019. Pp. 65–90.
DOI: [10.1515/9783110571660-004](https://doi.org/10.1515/9783110571660-004)