ISSN 2658–5782 Том 18 (2023), № 3, с. 85–87

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/2023/pdf/mfs2023.3.013.pdf
DOI: 10.21662/mfs2023.3.013

Получена: 15.09.2023
Принята: 10.11.2023

Автомодельные режимы установившегося стекания степенной жидкости по наклонной супергидрофобной поверхности[1]

Агеев А.И., Осипцов А.Н.

Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва

Введение

За последнее десятилетие значительно вырос интерес к моделированию течений жидкости вблизи супергидрофобных поверхностей (СГП), в элементах текстуры которых удерживаются микропузырьки газа. Проскальзывание жидкости вдоль пузырьков приводит к макроскопическому эффекту снижения сопротивления на СГП (см. обзор [1]). Появившаяся возможность создания СГП с контролируемым микрорельефом поверхности способствовала пересмотру ряда задач гидродинамики вязкой жидкости на СГП с формулировкой условия проскальзывания вместо классического условия прилипания. В частности, были описаны автомодельные режимы растекания тонкого слоя ньютоновской жидкости вдоль горизонтальной и наклонной СГП [1]. Для течения тонкого слоя неньютоновской жидкости вдоль СГП опубликованных результатов существенно меньше, хотя в самые последние годы наблюдается всплеск интереса к исследованию таких течений. Это связано как с возможностью создания СГП с заметным проскальзыванием неньютоновских жидкостей, так и с обнаружением ряда неожиданных эффектов, в частности, аномально высокого скольжения псевдопластической среды при ее течении в канале с супергидрофобными стенками [2].

В настоящей работе рассматривается стационарное стекание ручейка жидкости со степенной реологией от точечного источника по наклонной неоднородной плоской СГП. В приближении стоксова тонкого слоя с заданным на СГП граничным условием проскальзывания получено уравнение для формы поперечного сечения ручейка. В предположении симметрии поверхности ручейка найдены условия существования класса автомодельных решений. Для ряда значений параметров скольжения СГП и реологических показателей жидкости построены аналитические и численные решения для автомодельной функции и геометрии пятна смачивания на наклонной СГП. Полученные решения могут быть использованы для планирования и интерпретации экспериментальных исследований, цель которых определение эффективных свойств СГП.

[1]Работа выполнена по госбюджетному плану МГУ им. М.В. Ломоносова.

Постановка задачи

Рассмотрим стекание неньютоновской жидкости от локализованного источника по плоской СГП, образующей угол φ с горизонтом. Жидкость задана реологическим соотношением $\tau_{ij}^* = 2\mu_0^* I^{n-1} e_{ij}^*$, где τ_{ij}^* и e_{ij}^* — тензоры напряжений и скоростей деформации соответственно, $I = \sqrt{e_{ij}^* e_{ij}^*}$, $n > 0$, по повторяющимся индексам выполняется суммирование. При $n = 1$ коэффициент μ_0^* совпадает с динамической вязкостью ньютоновской жидкости. Начало декартовой системы координат $Ox^*y^*z^*$ совпадает с локализованным источником массоподвода; оси Ox^* и Oy^* направлены вдоль главных направлений тензора скольжения на СГП [1]; ось Oz^* направлена по нормали к наклонной поверхности. Обозначим через L, l и h_0 характерные линейные размеры длины, ширины и толщины ручейка соответственно. Предполагается, что толщина ручейка много меньше его ширины, а ширина много меньше длины: $h_0/l = l/L = \varepsilon \ll 1$. В предположении малой относительной толщины слоя ε, а также $\varepsilon^2 2^{n-1} \rho^* L^n U^{2-n} / \mu_0^* \to 0$ (где ρ^* — плотность жидкости, U — характерная скорость стекания, определяемая по заданному объемному расходу жидкости Q^*, h_0 и l) из уравнений Навье–Стокса получаем уравнения тонкого стоксова слоя на наклонной плоскости:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^n\right) + \sin\phi = 0, \\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^{n-1} \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{\partial p}{\partial y}, \\
\frac{\partial p}{\partial z} = -\cos\phi.
\end{gathered} \tag{1}$$

Данные уравнения получены в предположении равенства единице коэффициента, содержащего ускорение свободного падения, и соотношения на геометрические масштабы задачи. На наклонной СГП задаются условия непротекания и проскальзывания для компонент скорости, которые в безразмерной форме принимают вид:

$$\begin{aligned}
z = 0: \quad & u = b_1(x,y)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^m, \\
& v = b_2(x,y)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^m, \quad w = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

На свободной поверхности ручейка ставятся кинематическое (непротекание) и динамические (отсутствие касательных напряжений) граничные условия:

$$\begin{aligned}
z = h(x,y): \quad & u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y} = w, \quad p = 0, \\
& \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

В граничном условии (2) на СГП параметры b_1 и b_2 — коэффициенты пропорциональности, связывающие безразмерную касательную скорость и степени безразмерных нормальных производных продольных скоростей среды, вычисленных на СГП при $z = 0$ [1]. Случай $m = 1$ соответствует линейному граничному условию Навье для течения ньютоновской ($n = 1$) жидкости вдоль СГП. Для ньютоновских жидкостей $b_{1,2}$ соответствуют безразмерным «длинам скольжения» главных направлений тензора скольжения. Рассмотрим достаточно общую ситуацию неоднородной СГП, для которой зависимость безразмерных коэффициентов $b_{1,2}$ в условии проскальзывания от координат описывается функциями вида $B_{1,2}x^\gamma y^\delta$, где $B_{1,2}$ — положительные константы. Частный случай, когда $\delta = \gamma = 0$, соответствует СГП с однородными свойствами. Ограничимся рассмотрением случая $m = 1$ для неньютоновской жидкости. После решения уравнений (1) с граничными условиями (2) и (3), интегрирования уравнения неразрывности по толщине слоя получаем уравнение для установившейся формы поперечного сечения ручейка на СГП:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x}\left(\left[\frac{n}{2n+1}\right] h^{\frac{2n+1}{n}} + B_1 x^\gamma y^\delta h^{\frac{n+1}{n}}\right) \mathrm{tg}\phi + \\
& + \frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\left[\frac{n}{2n+1}\right] h^{\frac{2n+1}{n}} + B_2 x^\gamma y^\delta h^{\frac{n+1}{n}}\right) \frac{\partial h}{\partial y}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Для установившегося стекания жидкости расход через поперечное сечение ручейка вычисляется следующим образом:

$$\int\limits_{-y_e(x)}^{y_e(x)} \int_0^{h(x,y)} u(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y = 1,$$

где $\pm y_e(x)$ на плоскости (x, y) — заранее неизвестные боковые границы области смачивания жидкости, на которых толщина слоя равняется нулю. После подстановки в интегральный закон сохранения расхода жидкости выражения для компоненты скорости u получаем:

$$\begin{aligned}
(\sin\phi)^{\frac{1}{n}} \int\limits_{-y_e(x)}^{y_e(x)} & \left(\left[\frac{n}{2n+1}\right] h^{\frac{2n+1}{n}} + \right. \\
& \left. + B_1 x^\gamma y^\delta h^{\frac{n+1}{n}}\right) dy = 1.
\end{aligned} \tag{5}$$

Задача (4)–(5) является многопараметрической и может описывать широкий класс течений для различных неоднородных СГП и стекающих жидкостей. Далее рассмотрим для уравнения (4) автомодельные решения вида:

$$h(x,y) = x\alpha F(\eta), \quad \eta = y/Cx\beta, \quad C = const > 0,$$

где α и β — некоторые константы [3]. Новая переменная η характеризует автомодельный закон расширения области смачивания жидкости в направлении оси Oy. Значение константы C вычисляется из условия $\eta = 1$ на боковой границе ручейка. После подстановки автомодельной формы решения в уравнение (4) и закон постоянства расхода получаем условия существования автомодельных решений и уравнение для вычисления C:

$$\alpha = -\frac{n}{5n+2}, \quad \beta = \frac{2n+1}{5n+2}, \quad \gamma = -\frac{n+(2n+1)\,\delta}{5n+2};$$

$$C(\sin\phi)^{\frac{1}{n}} \int\limits_{-1}^{1} \left(\left[\frac{n}{2n{+}1}\right] F^{\frac{2n+1}{n}} + B_1 C^{\delta}\eta^{\delta} F^{\frac{n+1}{n}} \right) \mathrm{d}\eta = 1.$$

После подстановки автомодельной формы решения в уравнение (4) получаем краевую задачу для автомодельной функции F:

$$\left[\frac{n}{2n+1}\right] \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(F^{\frac{2n+1}{n}}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\eta}\right) + B_2 C^{\delta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\eta^{\delta}F^{\frac{n+1}{n}}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\eta}\right) + $$
$$+ \left[\frac{C^2 n}{5n+2}\right]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\eta F^{\frac{2n+1}{n}}\right)\mathrm{tg}\phi +$$
$$+B_1 C^{\delta+2}\left[\frac{2n+1}{5n+2}\right]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\eta^{\delta+1}F^{\frac{n+1}{n}}\right)\mathrm{tg}\phi = 0,$$
$$F'(0) = F(1) = 0.$$

Интегрируя данное уравнение с условием $F'(0) = 0$, получаем

$$\left[\frac{n}{2n{+}1}\right] F\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\eta} + B_2 C^{\delta}\eta^{\delta}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\eta} + \left[\frac{C^2 n}{5n{+}2}\right]\eta F\mathrm{tg}\phi + $$
$$+B_1 C^{\delta+2}\left[\frac{2n+1}{5n+2}\right]\eta^{\delta+1}\mathrm{tg}\phi = 0, \; F(1) = 0. \qquad (6)$$

В случае СГП, у которой коэффициенты скольжения зависят от одной пространственной координаты ($\delta = 0$ и $\gamma = -n/(5n+2)$ в выражениях для $b_{1,2}$) уравнение для автомодельной функции (6), имеет аналитическое решение, выраженное неявной функцией:

$$\left(\frac{n}{2n+1}\right) F + B_2 \ln\left|F + \left(\frac{2n+1}{n}\right) B_1\right| -$$
$$-B_1 \ln\left|F + \left(\frac{2n+1}{n}\right) B_1\right| = \frac{nC^2\mathrm{tg}\phi}{(10n+4)}(1 - eta^2) +$$
$$+B_2 \ln\left|\left(\frac{2n+1}{n}\right) B_1\right| - B_1 \ln\left|\left(\frac{2n+1}{n}\right) B_1\right|.$$

При $n = 1$ и $B_{1,2} = 0$ уравнение (6) принимает известный в литературе вид [3]. Решения для других значений δ и γ могут быть получены на основе численного интегрирования уравнения (6) с краевым условием $F(1) = 0$. Значение константы C в законе расширения пятна смачивания вычисления итерациями на основе решения ОДУ для автомодельной функции.

Список литературы

[1] *Агеев А.И., Осипцов А.Н.* Макро- и микрогидродинамика вязкой жидкости вблизи супергидрофобной поверхности // Коллоидный журнал. 2022. Т. 84(6). С. 380.

[2] *Patlazhan S., Vagner S.* Apparent slip of shear thinning fluid in a microchannel with a superhydrophobic wall // Phys. Rev. E. 2007. No. 96. P. 013104.

[3] *Wilson S.K., Duffy B.R., Hunt R.* A slender rivulet of a power-law fluid driven by either gravity or a constant shear stress at the free surface // Q. J. Mech. Appl. Math. 2002. V. 55(3). P. 385.

[4] *Агеев А.И., Осипцов А.Н.* Стекание ручейка неньютоновской жидкости по наклонной супергидрофобной поверхности // Письма в ЖЭТФ. 2023. Т. 118(3). С. 171.