ISSN 2658–5782 Том 18 (2023), № 3, с. 100–101

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/2023/pdf/mfs2023.3.019.pdf
DOI: 10.21662/mfs2023.3.019

Получена: 15.09.2023
Принята: 10.11.2023

К расчету неустойчивости заряженной поверхности неоднородной жидкости

Белоножко Д.Ф.

Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова, Ярославль

Введение

В середине 30-х годов прошлого столетия в работах Л. Тонкса [1] и Я.И. Френкеля [2] была построена количественная модель дестабилизации заряженной поверхности жидкости под действием поверхностных электрических сил, доминирующих над силами поверхностного натяжения. Задача расчета критического значения поверхностной плотности электрического заряда, превышение которой приводит к неустойчивости свободной поверхности, на настоящий момент является классической и приводится в качестве «простого» упражнения в восьмом томе курса теоретического физики Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [3]. Приведенная в [3] методика расчета легко обобщается на более сложные задачи. Но подобное обобщение зачастую нуждается в правильной физической интерпретации. Настоящая работа представляет собой пример такого обобщения на случай, когда поверхностно заряженная жидкость является стратифицированной по глубине и в расчетах возникают практически нереализуемые решения, которые из физических соображений необходимо опустить.

Математическая формулировка задачи

Задача решалась в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ с осью Ox направленной горизонтально вдоль поверхности жидкости. Ось Oz ориентировалась вертикально вверх против направления действия поля силы тяжести $\mathbf{g}$. Полупространство $z < 0$ считалось заполненным идеальной, идеально проводящей жидкостью, по поверхности которой равномерно распределен электрический заряд с постоянной поверхностной плотностью, индуцированной вертикальным электрическим полем с напряженностью E_0. Коэффициент поверхностного натяжения жидкости γ полагался постоянным. Считалось, что плотность жидкости в невозмущенном состоянии экспоненциально растет с глубиной $\rho = \rho_0(1 + \exp(-z/\Lambda))$, где $r(z) = \exp(-z/\Lambda)$. Параметр вертикального масштаба изменения плотности Λ непосредственно определялся через частоту плавучести $N = \sqrt{g/\Lambda}$. Эффектами вязкости, диффузии и теплопроводности пренебрегалось. Исследовалась устойчивость системы по отношению к малым возмущениям $z = \xi(t,x)$ свободной поверхности жидкости. Для простоты, возмущенное движение жидкости считалось независящим от координаты y.

В линейном приближении по малому параметру, пропорциональному отношению амплитуды возмущения к его длине, в условиях приближения Буссинеска математическая формулировка задачи имеет вид:

$$
\begin{aligned}
z > 0: \quad & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0;\\
z < 0: \quad & \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0(1+r(z))}\frac{\partial p}{\partial x};\\
& \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0(1+r(z))}\frac{\partial p}{\partial z};\\
& \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v}{\Lambda}r(z) = 0;\\
z = 0: \quad & \frac{\partial\xi}{\partial t} = v;\\
& -\rho_0\xi g + p - E_0\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\gamma\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2};\\
& \varphi - E_0\xi = 0;\\
z \to \infty: \quad & \frac{\partial\varphi}{\partial x} \to 0; \frac{\partial\varphi}{\partial z} \to 0;\\
z \to -\infty: \quad & v \to 0.
\end{aligned}
$$

Здесь $u \equiv u(t,x,z)$ и $v \equiv v(t,x,z)$ — горизонтальная и вертикальная компоненты поля скоростей; $p \equiv p(t,x,z)$ — возмущения к равновесному распределению давления в жидкости: φ — вызванное волновым искажением поверхности возмущение равновесного электрического потенциала $\Phi = -E_0 z + \varphi$ в верхнем полупространстве $z > 0$.

Результаты расчета

Стандартными методами легко построить дисперсионное уравнение задачи. В отличии от классической ситуации, для дисперсионного уравнения получаются две ветви. Принимая в качестве критерия отбора условие затухания движения жидкости с глубиной, несложно установить, что в зависимости от значения поверхностной плотности заряда физически реализуются разные части ветвей дисперсионного уравнения. В целом, результат удается описать с помощью формулы:

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\left(N^2 + \mathrm{sign}(\omega_0^2)\sqrt{4\omega_0^2 - N^4}\right) \qquad (1)$$

$$\omega_0^2 = gk(1 + \alpha k - \alpha k W);$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho_0 g}}; \quad W = \frac{E_0^2}{4\pi\sqrt{\gamma\rho_0 g}}$$

Здесь k — волновое число возмущения свободной поверхности; ω_0 — циклическая частота элетрокапиллярно-волнового движения на поверхности жидкости постоянной плотности ρ_0; α — капиллярная постоянная жидкости. Безразмерный параметр Тонкса–Френкеля W характеризует отношение электрических и капиллярных сил на гребнях волновых возмущений. Также, как и в классическом случае, критерием трансформации устойчивого состояния системы в неустойчивое является переход значений частоты ω_0 от действительных к чисто комплексным значениям. Анализируя (1), легко установить, что как и в классическом случае, как только $W > 2$, в спектре волновых искажений появляется диапазон волновых чисел, которым соответствуют экспоненциально растущие со временем амплитуды. Формально, критерий неустойчивости остается прежним — как и в классической задаче. Но при этом в выражениях для параметра Тонкса–Френкеля и капиллярной постоянной следует брать значение плотности жидкости вблизи её поверхности.

Результаты

При расчете условий развития неустойчивости заряженной поверхности неоднородной жидкости, необходимо правильно отбирать физически реализуемые решения электрогидродинамической задачи. Это позволяет однозначно установить критерий развития неустойчивости, согласованный с известным классическим решением.

Список литературы

[1] *Tonks L.* A theory of liquid surface rupture by a uniform electric field //Physical Review. 1935. Т. 48(??). p. 562.

[2] *Френкель Я.И.* К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1936. Т. 6(??). С. 347–350.

[3] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: учеб. пособие: в 10 т. Т. 8: Электродинамика сплошных сред/под ред. Л. П. Питаевского. 4-е изд., стереотип. – 2003.