ISSN 2658–5782

Том 18 (2023), № 3, с. 102–104

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/2023/pdf/mfs2023.3.020.pdf
DOI: 10.21662/mfs2023.3.020

Получена: 15.09.2023
Принята: 10.11.2023

Нелинейные колебания двухслойной жидкости при угловых колебаниях цилиндрической полости

Вин Ко Ко, Темнов А.Н.

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва

В статье исследована задача о нелинейных колебаниях двух идеальных и несжимаемых жидкостей в осесимметричной цилиндрической полости, совершающей колебания относительно горизонтальной оси OY. Полость полностью заполнена несжимаемыми жидкостями. Приведены нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие колебания круглого цилиндрического сосуда и поверхности раздела двухслойной жидкости в окрестности основного резонанса нелинейных колебаний, и определены линейные и нелинейные гидродинамические коэффициенты при различных значениях глубины верхней жидкости. Выявлены основные нелинейные эффекты, связанные с вращением диаметра поверхности раздела жидкостей. Используя метод Бубнова-Галеркина, построены области неустойчивости и амплитудно-частотные характеристики двухслойной жидкости при вынужденных угловых колебаниях сосуда.

Введение

С развитием ракетно-космической техники и увеличением перевозки сниженных природных ресурсов морским транспортом, возрастает интерес к задачам движения тел, внутренние полости которых заполнены неоднородной жидкостью. Простейшей моделью такой неоднородной жидкости может являться двухслойная жидкость, которая полностью заполняет полость твердого тела.

В книге [1] были исследованы нелинейные задачи динамики твердого тела, в которых существуют полости, заполненные жидкостью со свободной поверхностью. Рассмотрены различные модели и методы, применяемые для анализа таких задач, и предоставлены численные результаты проведенных исследований.

В работе [2] исследуется задача о малых колебаниях двухслойной тяжелой жидкости, целиком заполняющей прямоугольный сосуд. Поставлена и решена задача об управлении движением сосуда с финальным условием гашения внутренних волн жидкости. В работе [3] рассмотрены свободные колебания вязкой двухслойной жидкости в замкнутом прямоугольном сосуде.

Постановка задачи

Рассматривается круглый цилиндрический сосуд, полностью заполненный двумя несмешивающимися жидкостями, который совершает колебания вокруг неподвижной оси OY. Связанную с твердым телом систему координат $OXYZ$ расположим так, чтобы в невозмущенном положении механической системы ось ox была перпендикулярна невозмущенной поверхности раздела жидкостей

Γ_0.

Представим потенциалы скоростей каждой жидкости в виде следующей суммы:

$$\Phi^{(k)}(x,r,\eta,t) = \omega_2 \cdot A^{(k)}(x,r,\eta) + \\ + \sum_{i=1}^{\infty} \dot{\alpha}_i(t) B_i^{(k)}(x,r,\eta), \quad (k=1,2), \tag{1}$$

$\Phi^{(k)}$ — потенциалы скоростей верхней и нижней жидкостей; $A^{(k)}$ — гармонические скалярные функции; $B_i^{(k)}$ — функции координат верхней и нижней жидкостей, α_i — обобщенные координаты волновых движений i-ой гармоники на поверхности раздела. Поставленная задача решается с применением разложения функций в ряд Тейлора, а также использования значения функций и её нормальных производных на невозмущенной поверхности раздела жидкостей Γ_0. Представим функции $A^{(k)}$ и $B_i^{(k)}$ в виде разложения по параметрам α_i до второго порядка включительно

$$A^{(k)} = A_0^{(k)} + \sum_i \alpha_i A_i^{(k)} + \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j A_{ij}^{(k)} + \ldots; \\ B_i^{(k)} = B_{i0}^{(k)} + \sum_j \alpha_j B_{ij}^{(k)} + \sum_j \sum_k \alpha_j \alpha_k B_{ijk}^{(k)} + \ldots; \tag{2}$$

где функции $A_0^{(k)}$, $A_i^{(k)}$, $A_{ij}^{(k)}$, $B_{i0}^{(k)}$, $B_{ij}^{(k)}$, $B_{ijk}^{(k)}$ зависят только от пространственных координат и не зависят от времени.

Выделим две основные несимметричные гармоники, возбуждаемые в двух взаимно перпендикулярных плоскостях и определяемые обобщенными координатами и формами $\alpha_i = \alpha_i$ $(i = 1,2)$: $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$, $f_1 = f_\alpha = \varphi(r)\sin\eta$, $f_2 = f_\beta = \varphi(r)\cos\eta$. f_α, f_β — Это формы основного тона колебаний поверхности раздела жидкостей [1].

Система уравнений для обобщённых координат волновых движений α и β, характеризующих колебания поверхности раздела двух жидкостей при возбуждении основного тона примет вид [5]

$$L_1(\alpha,\beta) = (1 + d_1\alpha^2 + d_2\beta^2)\ddot{\alpha} + \\ +(d_1\alpha\beta - d_2\alpha\beta)\ddot{\beta} + (d_3\alpha^2 - d_4\beta^2 - d_0)\ddot{\theta} + \\ +d_1\alpha\dot{\alpha}^2 + (d_1\alpha - 2d_2\alpha)\dot{\beta}^2 - d_5\alpha\dot{\theta}^2 + \\ +2d_2\beta\dot{\alpha}\dot{\beta} - (d_3 + 3d_4)\beta\dot{\theta}\dot{\beta} + \sigma^2\alpha = 0, \tag{3}$$

$$L_2(\alpha,\beta) = (1 + d_1\beta^2 + d_2\alpha^2)\ddot{\beta} + \\ +(d_1\alpha\beta - d_2\alpha\beta)\ddot{\alpha} + (d + (d_3 + d_4)\alpha\beta)\ddot{\theta} + \\ +d_1\beta\dot{\beta}^2 + (d_1\beta - 2d_2\beta)\dot{\alpha}^2 - d_6\beta\dot{\theta}^2 + \\ +2d_2\alpha\dot{\alpha}\dot{\beta} + (d_3 + 3d_4)\beta\dot{\theta}\dot{\alpha} + \sigma^2\beta = 0, \tag{4}$$

где, $d = \lambda/\mu$, $d_0 = \lambda_0/\mu$, $d_1 = \mu_1/\mu$, $d_2 = \mu_2/\mu$, $d_3 = \lambda_3/\mu$, $d_4 = \lambda_2/\mu$, $d_5 = J_1/\mu$, $d_6 = J_2/\mu$,

Допустим, сосуд совершает угловые колебания по данному закону

$$\theta = \theta_0 \cos pt, \tag{5}$$

Если параметрический резонанс отсутствует в рассматриваемом случае, т.е. $\beta \equiv 0$, то вынужденные угловые колебания системы описываются нелинейным дифференциальным уравнением

$$L_1(\alpha,\beta) = (1 + d_1\alpha^2)\ddot{\alpha} + (d_3\alpha^2 - d_0)\ddot{\theta} + \\ +\alpha\dot{\alpha}^2 - d_5\alpha\dot{\theta}^2 + \sigma^2\alpha = 0; \tag{6}$$

После использования метода Бубнова-Галеркина [1] получим соотношения для построения областей неустойчивости.

На Рис. 1, (а, б) кривые линии *FGQ* соответствуют резонансным кривым, которые описывают поведение системы при резонансе. Кривые сплошные линии *RNM* и *KLD* соответствуют плоским линейным устойчивым колебаниям, то есть колебаниям, при которых система возвращается к равновесному состоянию.

Вывод

Учет вязкости жидкостей, как правило, приводит к ослаблению возбуждения гармоник с более высокими частотами. В этом смысле учет только двух форм колебаний, рассматриваемых в данной работе, является оправданным, и может быть использован при исследовании нелинейных движений неоднородных жидкостей, взаимодействующих с твёрдым телом.

Список литературы

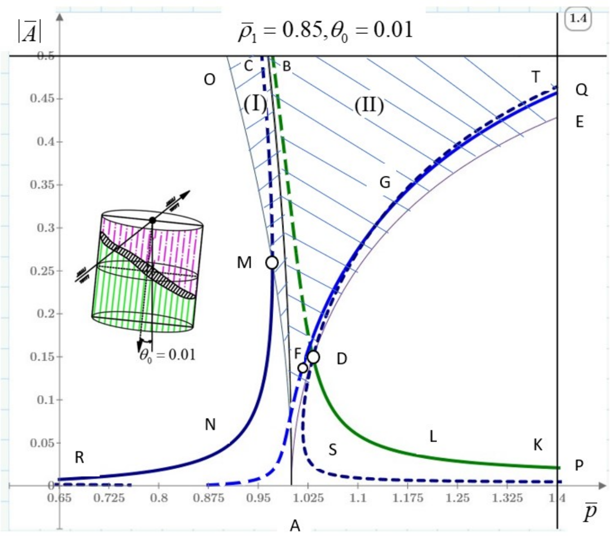
[1] *Луковский И.А.* Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость; Отв. Ред. В.А. Троценко; АН УССР. Ин-т математики. – Киев: Наук. Думка, 1990. 296 с.

[2] *Акуленко Л. Д., Нестеров С. В.* Нерезонансные колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую двухслойную жидкость. // Механика твердого тела. 1987. №2. С. 52–58.

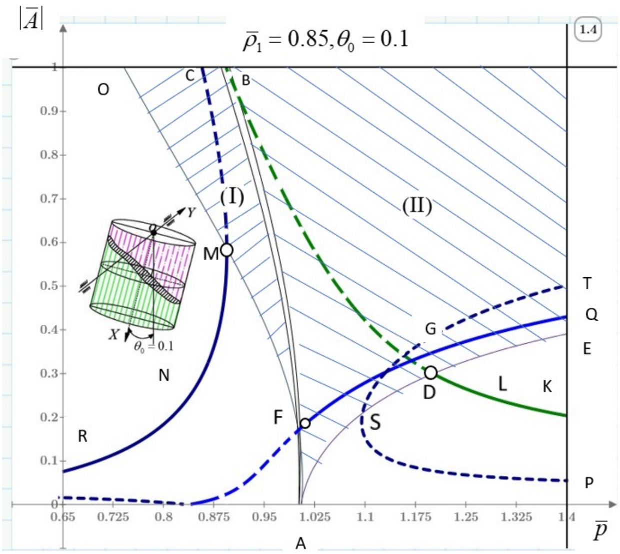
[3] *Kalinichenko V.A.* Regularization of barotropic gravity waves in a two-layer fluid // Fluid Dynamics. 2019. V. 54(6). p. 761–773.

[4] *Вин Ко Ко, Темнов А.Н.* Теоретическое исследование эффектов колебаний двух несмешивающихся жидкостей в ограниченном объёме // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 69. DOI: 10.17223/19988621/69/8

[5] *Вин Ко Ко, Темнов А.Н.* Угловые колебания твердого тела с двухслойной жидкостью вблизи основного резонанса // Труды МАИ. 2021. № 119. DOI: 10.34759/trd-2021-119-03



(а)



(б)

Рис. 1. Амплитудно-частотные характеристики и области неустойчивости вынужденных угловых колебаний жидкостей в цилиндрическом баке при возбуждении основных гармоник α для случая $\bar{\rho}_1 = 0.85$, $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 1$, $\bar{h}_0 = 0$. при $\theta_0 = 0.01$(а) и $\theta_0 = 0.1$(б)