ISSN 2658–5782 Том 18 (2023), № 3, с. 105–107

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/2023/pdf/mfs2023.3.021.pdf
DOI: 10.21662/mfs2023.3.021

Получена: 15.09.2023
Принята: 10.11.2023

14-я международная конференция-школа «Волны и вихри в сложных средах» 2023

Эффективный подход к математическому моделированию задач обтекания с фазовыми переходами[1]

Гайдуков Р.К., Данилов В.Г.

Национальный Исследовательский Университет «Высшая Школа Экономики», Москва

Классическая математическая модель, описывающая теплоперенос с фазовым переходом (например, плавление—кристаллизация, растворение—осаждение) в подвижной среде состоит из уравнений движений среды — уравнений Навье–Стокса и неразрывности, уравнений теплопроводности с адвекцией в каждой фазе, и условия Стефана на границе раздела фаз. Хорошо известно [1], что температура фазового в случае криволинейной границы раздела фаз отличается от случая плоской границы (см. рис. 2(*в*)), и эта разница описывается условием Гиббса–Томсона, учитывающего поверхностное натяжение на границе раздела фаз. Получившаяся задача Стефана–Гиббса–Томсона является вычислительно сложной — требуется очень мелкая сетка для точного определения положения криволинейной границы раздела фаз в каждый момент времени.

Однако, эту вычислительную сложность можно обойти, применив другой подход, основанный на введении функции порядка $\phi = \phi(t, x, \zeta)$, такой что $\phi = +1$ в жидкой фазе (например, в вводе), и $\phi = -1$ в твердой фазе (например, во льду), t и x — время и координаты, а ζ — параметр регуляризации: в ζ-окрестности границы раздела фаз функция ϕ быстро меняется от -1 до $+1$. В рамках этого подхода температура T во всей области и функция порядка определяется из системы уравнений фазового поля (см. (2)), которая является регуляризацией задачи Стефана–Гиббса–Томсона при $\zeta \to +0$, см. [2]. Граница раздела фаз определяется как линия нулевого уровня функции порядка. Система фазового поля эффективно решается численно с помощью простых разностных схем с постоянным шагом, что позволяет эффективно моделировать динамику фазового перехода без использования высокопроизводительных компьютеров.

В рамках такого подхода авторами изучены задачи обтекания водой малых ледяных наростов на поверхности пластины [3,4] и внутри трубы [5] при достаточно больших числах Рейнольдса Re (но таких, при которых еще сохраняется ламинарный поток). В [3] изучен случай обтекания поверхности y_s изо льда с малым наростом. А именно, рассматривается нарост в точке $x_0 = 1$ вида $y_s = \varepsilon^{4/3} h(t, (x - 1)/\varepsilon)$, где $\varepsilon = \mathrm{Re}^{-1/2}$ — малый параметр, $h(t, \xi)$ —

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00186, https://rscf.ru/project/22-21-00186/.

гладкая функция, описывающая динамику границы раздела фаз, такая, что $h(t, \pm\infty) = 0$. Отметим, что такой масштаб неровностей приводит к двухпалубной структуре пограничного слоя [6]. Полученная в [3] математическая модель состоит из системы уравнений Прандтля с самоиндуцированным давлением

$$\varepsilon^{2/3}\frac{\partial u^*}{\partial t} + u^*\left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \frac{\partial h}{\partial \xi}\frac{\partial u^*}{\partial \bar{\theta}}\right) + v^*\frac{\partial u^*}{\partial \bar{\theta}} =$$
$$= -f''(0)v^*|_{\bar{\theta}\to\infty} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \bar{\theta}^2} + \varepsilon^{2/3}\frac{\partial h}{\partial t}\frac{\partial u^*}{\partial \bar{\theta}},$$
$$\frac{\partial v^*}{\partial \bar{\theta}} + \frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \frac{\partial h}{\partial \xi}\frac{\partial u^*}{\partial \bar{\theta}} = 0, \qquad (1)$$
$$u^*|_{\bar{\theta}=0} = v^*|_{\bar{\theta}=0} = 0, \quad u^*|_{\xi\to\pm\infty} = f''(0)\bar{\theta},$$
$$v^*|_{\xi\to\pm\infty} = 0, \quad \left.\frac{\partial u^*}{\partial \bar{\theta}}\right|_{\bar{\theta}\to\infty} = f''(0),$$
$$u^*|_{t=0} = U_0(\xi, \bar{\theta})$$

где $u^* = u^*(t, \xi, \bar{\theta})$ и $v^* = v^*(t, \xi, \bar{\theta})$ — горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости, f — функция Блазиуса; U_0 — некоторая гладкая функция, $\bar{\theta} = (y - y_s)/\varepsilon^{4/3}$ — вертикальная погранслойная переменная, $\xi = (x-1)/\varepsilon$ — горизонтальная быстрая переменная, и системы уравнений фазового поля

$$\varepsilon^{2/3}\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial \xi} + v\frac{\partial T}{\partial \theta} -$$
$$-\frac{\lambda_l}{c_l\rho_l}\varepsilon^{-2}\left(\varepsilon^{2/3}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)\right) = \qquad (2)$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \zeta^2\alpha\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \zeta^2\beta\Delta_{\xi,\theta}\varphi + \varphi(1-\varphi^2) +$$
$$+\zeta(1-\varphi^2)T/\sqrt{2\beta},$$

дополненной некоторыми краевыми и начальными условиями, $\theta = \bar{\theta} + h$, u и v — продолженные нулем в область твердой фазы скорости u^* и v^* (гладко в силу условий прилипания), а постоянные α и β определяются физическими постоянными и обезразмериванием, $\alpha = \varepsilon^{2/3}/(mT_0) \approx 2.1 \cdot 10^{-2}$, $\beta = \varepsilon^{-4/3}\sigma\hat{T}_m/(l\rho_l T_0) \approx 2.3 \cdot 10^{-4}$, подробнее см. в [3]. В результате численного исследования задачи (1), (2) было показано [3], что при малой разности температур воды и льда (2°C и −2°C) вершинки горбиков плавятся, а на остальной поверхности, наоборот, происходит намерзание (см. рис. 1(*a*)), а наличие потока жидкости приводит к ассиметричному и более быстрому плавлению вершинки неровности (в 6.5 раз). При большой температуре воды (20°C) происходит плавление уже всей области (см. рис. 1(*б*)), но вершинки горбиков плавятся немного быстрее. Также исследовано наличие зоны отрыва пограничного слоя с вихрем (который возникает при превышении высоты горбика некоторой величины) — скорость таяния вершинок горбиков больше, чем в случае малой высоты (см. рис. 1(*в*)).

В [4] исследован более сложный случай — наличие малого ледяного нароста на нерасплавляемой подложке (например, замерзшая капля воды), см. рис. 2(*a*). Особенностью этого случая является наличие точек контактов трех сред и двух фаз — воды, льда и подложки, в которых модель из [3] необходимо модифицировать, т.к. в точках контакта не определена нормаль, фигурирующая в условии Гиббса–Томсона. В [4] было предложено два пути решения этой проблемы, результаты моделирования для случая течения воды с температурой 20°C (температура льда −2°C) приведены на рис. 2(*б*): видно что плавление происходит активнее со стороны набегающего потока.

В [5] исследована задача о фазовом переходе на стенках трубы с аксиально–симметричным ледяным наростом на стенке с течением Пуазейля внутри, см. рис. 3(*a*). Особенностью задачи является то, что при таянии ледяного слоя толщины a происходит небольшое изменение течения Пуазейля, т.к. увеличивается радиус области, в которой течет жидкость. Отметим, что предложенная модель годится также и для задач о течении переохлажденной жидкости, результаты такого моделирования для случая трубы приведены на рис. 3(*б*): температура воды $-1^{c}irc$C, льда — −5°C. Видно ассиметричное намерзание, позади неровности — более активное, чем перед ней.

Также предлагаемая модель годится и для моделирования течений с химическим взаимодействием — фазовым переходом типа растворение—осаждение. Для таких задач часто используются довольно экзотические модификации системы фазового поля (что на наш взгляд является излишним), но общая концепция сохраняется.

Список литературы

[1] *Caginalp G.* An analysis of a phase field model of a free boundary // Arch. Ration. Mech. Anal. 1986. V. 92(3). P. 205–245.

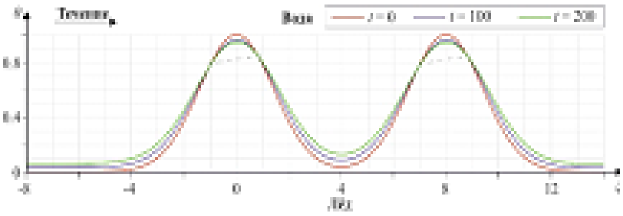
[2] *Danilov V. G., Omel'yanov G. A., Radkevich E. V.* Hugoniot-type conditions and weak solutions to the phase-field system // Eur. J. Appl. Math. 1999. V. 10. P. 55–77.

[3] *Гайдуков Р.К., Данилов В.Г., Фонарева А.В.* Моделирование таяния-намерзания льда в задаче обтекания жидкостью малой неровности // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2023. № 5. С. 82–94.

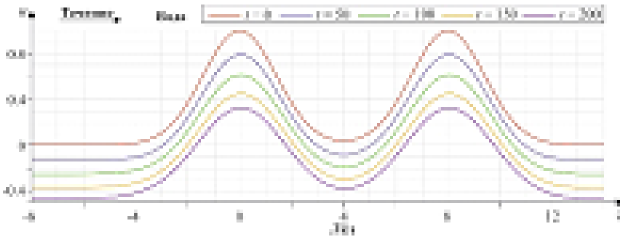
[4] *Danilov V.G., Gaydukov R.K.* Ice-water phase transition on a substrate // Russian Journal of Mathematical Physics. 2023. V. 30(2). P. 165–175.

[5] *Гайдуков Р.К., Данилов В.Г.* Моделирование фазового перехода лед–вода в трубе с малыми ледяными наростами на стенке // ЖВМиМФ. 2023. (на рецензии).

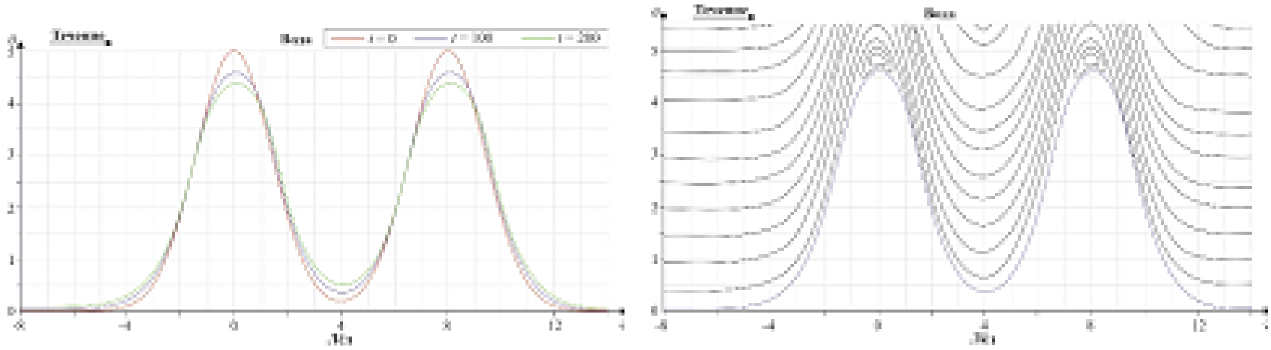
[6] *Gaydukov R.K.* Double-deck structure in the fluid flow problem over plate with small irregularities of time-dependent shape // Eur. J. Mech. B. 2021. V. 89. P. 401–410.



(*а*) случай малой амплитуды и малой разности температур;

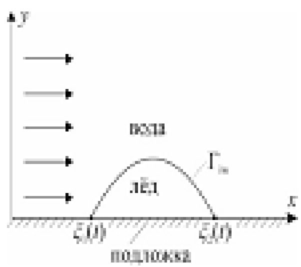


(*б*) случай малой амплитуды и большой разности температур;

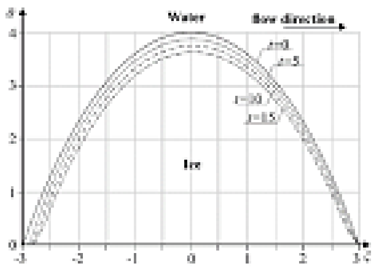


(*в*) случай большой амплитуды и малой разности температур (правый рисунок: линии тока)

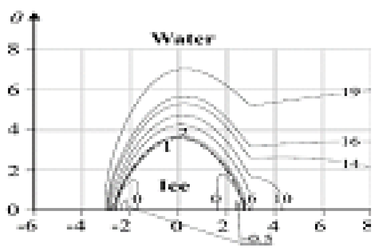
Рис. 1. Динамика границы раздела фаз при плавлении ледяной поверхности с наростом



(*а*) геометрия задачи;

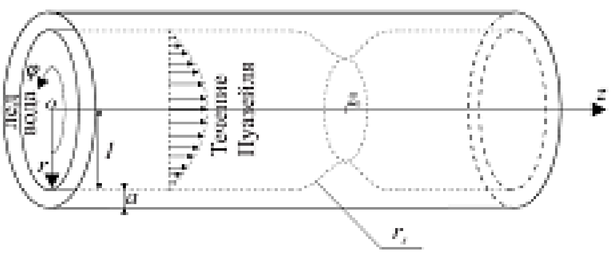


(*б*) динамика границы раздела фаз;

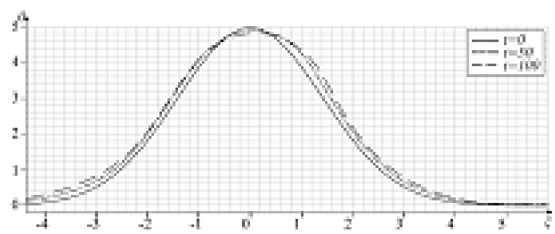


(*в*) изолинии температур

Рис. 2. Фазовый переход в системе 2 фазы — 3 среды



(*а*) геометрия задачи;



(*б*) намерзание переохлажденной воды

Рис. 3. Течение в трубе со слоем льда с неровностью