ISSN 2658–5782 Том 18 (2023), № 3, с. 108–110

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/2023/pdf/mfs2023.3.022.pdf
DOI: 10.21662/mfs2023.3.022

Получена: 15.09.2023
Принята: 10.11.2023

«14-я международная конференция-школа «Волны и вихри в сложных средах» 2023

Существование фигур равновесия вращающейся капиллярной двухслойной сжимаемой жидкости

Денисова И.В.*, **Солонников В.А.****

*Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Санкт-Петербург
**Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург

Введение

Существование поверхности равновесия для изолированной сжимаемой жидкой массы, вращающейся вокруг неподвижной оси с постоянной скоростью, впервые было доказано в [1]. Наша цель — доказать существование фигур равновесия для вращающейся сжимаемой двухслойной жидкости.

Задачу о вращении изолированной несжимаемой капли как твердого тела рассматривали многие известные математики, среди которых были Ньютон, Маклорен, Якоби, Ковалевская, Ляпунов, Пуанкаре и другие [2, 3]. Они, в основном, изучали движение без капиллярности. Капиллярные жидкости впервые исследовали Глоба–Михайленко [4], Буссинеск и Шаррюо в начале 20-го века. Причём Шаррюо дал подробный анализ проблемы, рассчитал форму фигур равновесия и рассмотрел некоторые аспекты устойчивости [5]. Эти результаты вошли в большой обзор на эту тему, представленный в книге Аппелля [6]. Проблема устойчивости различных эллипсоидальных фигур равновесия анализируется также в монографии [7].

© Денисова Ирина Владимировна, denisovairinavlad@gmail.com
© Солонников Всеволод Алексеевич, solonnik@pdmi.ras.ru

Мы предполагаем сжимаемые жидкости баротропными, а это означает, что давление p является известной возрастающей функцией плотности: $p'(\rho) > 0$. Пусть, кроме того, $\rho = \rho(|x'|)$, $x' = (x_1, x_2, 0)$. Будем считать, что фигуры равновесия F^+, F^- представляют собой почти шарообразные вложенные области с радиусами $R_0^\pm$ ($R_0^+ < R_0^-$), а движение жидкостей близко к состоянию покоя, т. е. скорость $\mathbf{v}$ мала, а плотность ρ мало отличается от ступенчатой функции $\rho^\pm > 0$. Схематически эта картина представлена на рис. 1. Обозначим шары $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leqslant R_0^\pm\}$ через $B_{R_0^\pm}$. Мы доказываем существование границ G^+ и G^- фигур F^+ и F^- соответственно.

Постановка задачи

Стационарное движение двухслойного облака $F \equiv \overline{F^+} \cup F^-$, равномерно вращающегося вокруг оси x_3 с постоянной угловой скоростью ω, описывается однородными стационарными уравнениями Навье–Стокса

$$\rho(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} - \nabla\cdot\mathbb{T} = 0, \;\; \nabla\cdot(\rho\mathbf{V}) = 0, \;\; x \in \cup F^\pm, \quad (1)$$

(здесь плотность ρ и скорость $\mathbf{V}$ зависят только от x) и граничными условиями

$$\begin{gathered} \mathbb{T}(\mathbf{V}, P)\mathbf{n}|_{G^-} = \sigma^- H^-\mathbf{n}, \;\; x \in G^-, \\ [\mathbf{V}]|_{G^+} = 0, \;\; [\mathbb{T}(\mathbf{V}, P)\mathbf{n}]|_{G^+} = \sigma^+ H^+\mathbf{n}, \;\; x \in G^+, \\ \mathbf{V}\cdot\mathbf{n} = 0, \;\; x \in G = G^+ \cup G^-. \end{gathered} \quad (2)$$

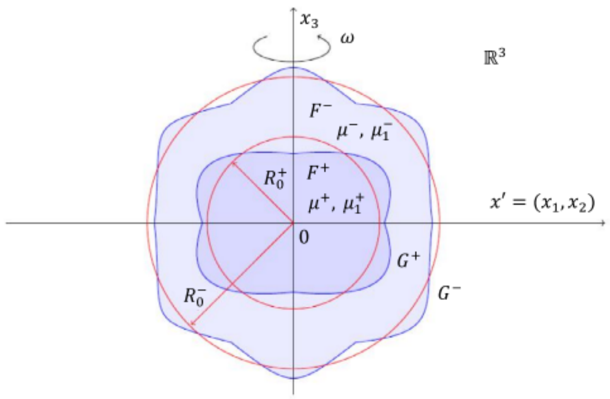

Рис. 1. Фигуры равновесия для двухслойной сжимаемой жидкости

где тензор напряжений $\mathbb{T}(\mathbf{v}, p) = (-p^{\pm}(\rho) + \mu_1^{\pm}\nabla\cdot\mathbf{v})\mathbb{I} + \mu^{\pm}\mathbb{S}(\mathbf{v})$ задаётся в двух областях $F^{\pm}$, причём $(\mathbb{S}(\mathbf{v}))_{ij} = \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}$ — удвоенный тензор скоростей деформации, $\mathbb{I}$ — единичная матрица, $\mu^{\pm}$, $\mu_1^{\pm}$ — ступенчатые функции динамических вязкостей, равные μ^-, μ_1^- в F^- и μ^+, μ_1^+ в F^+, $\mu^{\pm} > 0$, $2\mu^{\pm} + 3\mu_1^{\pm} \geqslant 0$; $H^{\pm}$ — это удвоенные средние кривизны поверхностей равновесия $G^{\pm}$, $\sigma^{\pm} > 0$ — коэффициенты поверхностного натяжения на $G^{\pm}$, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к объединению G, $[\mathbf{v}]|_{\Gamma_t^+} \equiv \lim\limits_{x\to x_0\in\Gamma_t^+, x\in\Omega_t^+} \mathbf{v}(x,t) - \lim\limits_{x\to x_0\in\Gamma_t^+, x\in\Omega_t^-} \mathbf{v}(x,t) = 0$. Последнее соотношение в (2) следует из условия непротекания газа через границы. Давление P — заданная функция от ρ.

Нетрудно видеть, что векторное поле скорости и градиент функции давления

$$\mathbf{V}(x) = \omega(-x_2, x_1, 0),$$

$$\nabla P(\rho) = \rho\omega^2 x' \equiv \rho\frac{\omega^2}{2}\nabla|x'|^2, \ |x'|^2 = x_1^2 + x_2^2,$$

удовлетворяют (1). Подставим их в граничные условия (2). Тогда мы получим уравнения для поверхностей $G^{\pm}$

$$\begin{aligned} &\sigma^- H^-(x) + P(\rho) = 0, \ x \in G^-, \\ &\sigma^+ H^+(x) + [P(\rho)]|_{G^+} = 0, \ x \in G^+, \end{aligned} \tag{3}$$

при этом в простейшем случае $P'(\rho) = \rho(x)$, $P^{\pm}(\rho) \equiv \rho^2(x)/2 + p^{\pm}$ в $F^{\pm}$ с определёнными значениями постоянных $p^{\pm}$. Очевидно, что тогда плотность определяется формулой

$$\rho(x) = \frac{\omega^2}{2}|x'|^2 + c^{\pm}, \ x \in F^{\pm}. \tag{4}$$

Константы $c^{\pm}$ можно вычислить, задав массы жидкостей

$$\int\limits_{F^{\pm}} \rho(x)\mathrm{d}x \equiv \int\limits_{F^{\pm}} \left(\frac{\omega^2}{2}|x'|^2 + c^{\pm}\right)\mathrm{d}x = m^{\pm}. \tag{5}$$

Еще одним параметром задачи мы считаем угловой момент β. Зададим его:

$$\begin{aligned} \beta &\equiv \int\limits_{F^+\cup F^-} \rho(x)\mathbf{V}\cdot\eta_3\mathrm{d}x = \\ &= \omega \int\limits_{\cup F^{\pm}} \left(\frac{\omega^2}{2}|x'|^2 + c^{\pm}\right)|x'|^2\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\eta_i = \mathbf{e}_i \times \mathbf{x}$ — вектор жесткого вращения, $\mathbf{e}_i$ — базисный вектор, $i = 1, 2, 3$. Тогда угловая скорость ω является функцией от β.

Пусть S_1 — единичная сфера в $\mathbb{R}^3$ с центром в нуле, $\xi = x/|x| \in S_1$. Мы предполагаем, что поверхности равновесия $G^{\pm}$ заданы функциями $R^{\pm}(\xi)$ на S_1, которые чётны по ξ_3 и вращательно симметричны, т.е. зависят только от $|\xi'| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ и ξ_3. Мы доказываем, что система (3), (5), (6) при малом значении β и условии

$$\left(\frac{2\sigma^+}{3\rho^+ R_0^+} - \rho^+\right)\left(\frac{2\sigma^-(R_0^{-3} - R_0^{+3})}{3\rho^- R_0^{-4}} - \rho^-\right) - \\ - \frac{2\sigma^-\rho^- R_0^{+3}}{3\rho^+ R_0^{-4}} \neq 0$$

однозначно разрешима относительно переменных радиусов $R^{\pm}$, угловой скорости ω и констант $c^{\pm}$. Доказательство проводится в четных по ξ_3, вращательно симметричных пространствах Гельдера с помощью теоремы о неявной функции. Аналогичный результат верен и для произвольной гладкой возрастающей функции давления P, заданной в двух областях, при этом изменяется и формула для плотности (4).

Заключение

Таким образом, мы показали, что для двухслойной сжимаемой жидкости при малом угловом моменте существуют осесимметричные фигуры равновесия, близкие к вложенным шарам, причём функция давления задается гладкой растущей функцией плотности жидкости, а данные задачи удовлетворяют некоторому условию. Локальная разрешимость нестационарной задачи была получена в [8, 9]. Следующий этап исследования проблемы будет заключаться в доказательстве существования глобального решения нестационарной задачи для малых начальных данных и его стремления к стационарному решению $(\mathbf{V}, \rho)$, а также в изучении устойчивости полученных равновесных фигур. Аналогичный анализ для двухкомпонентной несжимаемой жидкости был проведён в [10,11]. Существование аксиально симметричных фигур равновесия в виде сплюснутых вложенных сфероидов доказано в [12].

Кроме того, отметим, что наше исследование проведено без учёта гравитации жидкостей. Такая ситуация реализуется в космосе, и наше двухслойное газообразное облако можно рассматривать, например, как газообразную планету или другое вращающееся космическое тело.

Список литературы

[1] *Solonnikov V.A., Tani A.* Equilibrium figures of slowly rotating viscous compressible barotropic capillary liquid // Advances in Math. Sciences and Applications. 1993. T. 2(1). C. 139–145.

[2] *Ляпунов А. М.* Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости // Издание АН. 1884 (Собр. сочин., т. 3, АН СССР, М., 1959. 5–113).

[3] *Poincaré H.* Figures d'équilibre d'une masse fluide, Paris, Gautier–Villars, 1902.

[4] *Globa-Mikhailenko B.* Figures ellipsoïdales d'équilibre d'une masse fluide en rotation quand on tient compte de la pression capillaire // Comptes rendus. 1915. T. 160. C. 233.

[5] *Charrueau A.* Ètude d'une masse liquide de révolution homogène, sans pesanteur et à tension superficielle, animée d'une rotation uniforme // Ann. de Ècole Normale Supérieure. 1926. T. 43. C. 129–176.

[6] *Аппелль П.* Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. Л.–М.: Главная редакция общетехнической литературы (сокр. ОНТИ). 1936. С. 375.

[7] *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М: Мир. 1973. С. 288.

[8] *Денисова И. В.* Задача о движении двух сжимаемых жидкостей, разделённых замкнутой свободной поверхностью // Зап. научн. семин. ПОМИ. 1997. Т. 243. С. 61–86.

[9] *Denisova I.V.* Solvability in weighted Hölder spaces of a problem governing the evolution of two compressible fluids // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2003 Т. 295. С. 57–89.

[10] *Denisova I. V., Solonnikov V. A.* Rotation Problem for a Two-Phase Drop // J. Math. Fluid Mech. 2022. T. 24. № 2, 40. 26 C.

[11] *Denisova I. V., Solonnikov V. A.* Hölder Space Theory for the Rotation Problem of Two-Phase Drop // Mathematics. 2022. V. 10(24). P. 4799.

[12] *Солонников В. А.* Задача о нестационарном движении двух вязких несжимаемых жидкостей // Проб. мат. анализа. 2006. Т. 34. С. 103–121.