ISSN 2658–5782 Том 18 (2023), № 3, с. 137–139

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/2023/pdf/mfs2023.3.033.pdf
DOI: 10.21662/mfs2023.3.033

Получена: 15.09.2023
Принята: 10.11.2023

Исследование устойчивости бегущих волн в двухфазных потоках жидкости в пористой среде методом функции Эванса[1]

Коломийцев Г.В., Горкунов С.В., Кожурина П.И., Томашева А.М.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Рассматривается двухфазный одномерный поток жидкости в пористой среде в рамках модели, основанной на использовании закона Дарси в среде, проницаемость которой описывается квадратичными функциями насыщенности. В работе получены уравнения для исследования устойчивости решений в виде бегущих волн методом функции Эванса и обоснована возможность применения этого метода.

Введение

Проблема математического описания процесса распространения жидкости в двухфазной среде в одномерном приближении возникает в задачах извлечения нефти из пластов пористой породы под действием давления накачиваемой в пласт воды [1, 2]. В приближении исчезающей вязкости (уравнения Бакли–Леверетта) существуют решения в виде бегущих волн [3, 4], линейная устойчивость которых в данной работе поисследуется методом функции Эванса. Этот подход применяется, например, при анализе устойчивости бегущих волн в средах с диссипацией и дисперсией [5, 6].

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 21-11-00126.

Основные соотношения и результаты

Рассматривается пористая среда с проницаемостью K, в которой движутся две несжимаемые несмешивающиеся жидкости, одна из которых несмачивающая (нефть), характеризуемая скоростью $\mathbf{v}_W$ и давлением p_W, а вторая — смачивающая (вода) с соответствующими параметрами $\mathbf{v}_N$, p_N. Закон Дарси предполагает связь между скоростью жидкости и градиентом давления в ней:

$$v_i = -\lambda_i \nabla p_i, \ i = \{W, N\}.$$

Коэффициенты подвижности $\lambda_W = \lambda_W(u)$ и $\lambda_N = \lambda_N(1-u)$ зависят от насыщенности среды смачивающей фазой u, ее проницаемости K, вязкости жидкостей $\mu_{W,N}$ и некоторых модельных функций $\kappa_{W,N}$:

$$\lambda_i = \frac{K a_i}{\mu_i} \kappa_i(u),$$

где $a_{W,N}$ — некоторые постоянные, а модельные функции имеют квадратичную зависимость от насыщенности:

$$\kappa_W(u) = u^2, \ \kappa_N(u) = (1-u)^2.$$

Дополнительной величиной, выбираемой из модельных соображений, является капиллярное давление

$$p_c(u) = p_N(u) - p_W(u).$$

В одномерной постановке закон сохранения массы и уравнение несжимаемости приводятся к виду

$$\partial_{t'} u + \partial_{x'} F(u) = \partial_{x'} G(u) \partial_{x'} u,$$

$$\partial_{x'} p = -\frac{M}{u^2 + M(1-u)^2}\left(1 + (1-u)^2 p_c'(u)\partial_{x'} u\right),$$

где введены обозначения:

$$t' = t \Big/ \left(\frac{Ka_N}{U\mu_N}\right), \; x' = x \Big/ \left(\frac{Ka_N}{\mu_N}\right),$$

$$U = (\lambda_N(u_+) + \lambda_W(u_+))\,(\partial_x p)_+, \; p \equiv p_W;$$

$$M = \frac{\mu_W a_N}{\mu_N a_W}.$$

Функция потока Бакли–Леверетта $F(u)$ и эффективный коэффициент диссипации $G(u)$ определяются как

$$F(u) = \frac{u^2}{u^2 + M(1-u)^2}, \; G(u) = -p_c'(u)\frac{u^2(1-u)^2}{u^2 + M(1-u)^2}.$$

Граничные условия задаются постоянными значениями насыщенности и градиента давления при $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} u = u_+, \; \lim_{x\to\infty} \partial_x p = (\partial_x p)_+.$$

В координатах бегущей волны $z = x' - Dt'$ уравнение для насыщенности приводится к виду

$$\partial_{t'} u + \partial_z (F(u) - Du) = \partial_z G(u) \partial_z u,$$

и его стационарные решения $u = u(z) > 0$ отвечают волнам, бегущим со скоростью D.

Известно, что слабая зависимость капиллярного давления от насыщенности приводит к исчезновению эффективного коэффициента диссипации, так что уравнение для насыщенности становится гиперболическим и дает соотношение на разрыве

$$D = \frac{F(u_-) - F(u_+)}{u_- - u_+}.$$

В работах [4, 7] исследование устойчивости разрывных решений сводится к анализу устойчивости решений уравнения с малой постоянной диссипацией $G(u) \to \varepsilon = \mathrm{const}$. Такой подход позволяет установить ряд общих утверждений, относящихся к устойчивости решений, однако связан с использованием решений, не являющихся собственно решениями задачи с исходным коэффициентом диссипации.

Альтернативный подход к анализу устойчивости профилей бегущих волн сводится к построению функции Эванса линеаризованного уравнения для малых возмущений «основного» решения

$$u(z,t) = e^{\lambda t} y(z) + u_0(z).$$

В описанной выше модели уравнение для $y(z)$ имеет вид

$$\frac{d^2}{dz^2}(G(u_0(z))y(z)) - \frac{d}{dz}\left((F_u'(u_0(z)) - D)y(z)\right) = \lambda y(z),$$

при этом анализ устойчивости сводится к поиску собственных значений получившегося линейного дифференциального оператора в пространстве дважды интегрируемых функций. Наличие собственных значений с $\mathrm{Re}\lambda > 0$ отвечает наличию неустойчивости.

Функция Эванса $E(\lambda)$ для дифференциальных операторов второго порядка определяется через скалярное произведение решений соответствующих этому дифференциальному уравнению системам

$$Y'(z) = J(z,\lambda)Y(z); \; -\tilde{Y}'(z) = J^T(z,\lambda)\tilde{Y}(z),$$

$$J(z,\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\lambda + (F_u'(u_0(z)) - G_z'(u_0(z)))}{G(u_0(z))} & -\dfrac{2G_z''(u_0(z)) - F_u'(u_0(z)) + D}{G(u_0(z))} \end{bmatrix};$$

$$E(\lambda) = \tilde{Y}^T(z) \cdot Y(z).$$

Решения этих систем выбираются так, чтобы $Y(z)$ исчезало при $z \to \infty$, а $\tilde{Y}(z)$ — напротив, исчезало при $z \to -\infty$. Изолированные нули функции $E(\lambda)$ в комплексной плоскости спектрального параметра λ отвечают собственным значениям оператора.

Анализ асимптотического поведения функции Эванса при больших параметрах λ показывает ее ограниченность в бесконечно удаленной точке. При этом вычисление функции Эванса для задачи определения устойчивости фильтрационных течений в виде бегущих волн может быть сведено к вычислению определителя Вронского двух линейно независимых решений уравнения с некоторым редуцированным оператором, обладающим спектром, совпадающим со спектром исходного оператора:

$$G(u_0(z))\frac{d^2}{dz^2}f(z) + R(u_0(z))f(z) = \lambda f(z),$$

$$R(u_0(z)) = \frac{1}{2G(u_0(z))}\left(G'_z(u_0(z))(F'_u(u_0(z)) - D) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\left(F'_u(u_0(z)) - D\right)^2 - G(u_0(z))\left(F'_u(u_0(z))\right)'_z\right).$$

Список литературы

[1] *Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.

[2] *Bear J.* Dynamics of fluids in porous media. American Elsevier, New York, London, Amsterdam. 1972.

[3] *van Duijn CJ., Peletier L.A., Pop I.S.* A new class of entropy solutions of the Buckley-Leverett equation // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 2007. Т. 39. № 2. С. 507–536.

[4] *Spayd K., Shearer M., Hu Z.* Stability of plane waves in two-phase porous media flow //Applicable Analysis. 2012. Т. 91. № 2. С. 295–308.

[5] *Evans J. W., Feroe J.* Local stability of the nerve impulse // Mathematical Biosciences. 1977. Т. 37. № 1–2. С. 23–50.

[6] *Chugainova A. P., Kolomiytsev G. V., Shargatov V. A.* On the Instability of Monotone Traveling-Wave Solutions for a Generalized Korteweg–de Vries–Burgers Equation // Russian Journal of Mathematical Physics. 2022. Т. 29. № 3. С. 342–357.

[7] *Bakharev F., Enin A., Petrova Y., Rastegae N.* Impact of dissipation ratio on vanishing viscosity solutions of the Riemann problem for chemical flooding model // Journal of Hyperbolic Differential Equations. 2023. Т. 20. № 02. С. 407–432.