ISSN 2658–5782 Том 18 (2023), № 3, с. 140–142

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/2023/pdf/mfs2023.3.034.pdf
DOI: 10.21662/mfs2023.3.034

Получена: 15.09.2023
Принята: 10.11.2023

Эволюционные уравнения, описывающие гидродинамическую неустойчивость пламени[1]

Минаев С.С., Дац Е.П.

Дальневосточный федеральный университет (ДВФУ), Аякс 10, Русский остров, Владивосток

В работе описаны подходы, позволяющие получить эволюционные уравнения для возмущенного фронта пламени в условиях неустойчивости Дарье–Ландау. Нелинейные уравнения для фронта пламени получены в предельных случаях малого и очень большого коэффициента расширения газа. В обоих случаях, полученные уравнения имеют вид нелинейного интегро-дифференциального уравнения Сивашинского.

Введение

Динамика распространения предварительно перемешанного пламени в большом объеме горючей смеси — одна из интересных фундаментальных проблем теории горения, с которой связано множество важных приложений — от сжигания газов в двигателях внутреннего сгорания до крупномасштабных взрывов газовых смесей. Расширение газа в зоне химической реакции приводит к развитию гидродинамической неустойчивости, которая проявляется в образовании ячеек на фронте пламени. Рост общей поверхности пламени увеличивает скорость его распространения и определяет динамику энерговыделения, изменения давления и других характеристик в системе с горением газа. Поэтому моделирование динамического поведения фронта пламени является актуальной задачей для практических приложений. Численное моделирование динамики ячеистого пламени и, связанного с ним возмущенного потока газа, требует значительных вычислительных затрат, которые зависят от размера расчетной области. Например, моделирование расходящегося цилиндрического пламени [1] показывает, что количество ячеек на фронте пламени увеличивается пропорционально радиусу пламени, и в этом случае количество узлов сетки, необходимых для расчета поля течения газа, пропорционально квадрат радиуса пламени.

Один из возможных способов уменьшить объем вычислений — использовать приближенные эволюционные уравнения для переменных, заданных на фронте пламени, что позволяет избежать вычислений в пространстве, окружающем пламя. Такой подход позволяет существенно сократить объем вычислений за счет уменьшения размерности системы. Решение этой задачи для произвольных значений коэффициента расширения газа $E = \rho_1/\rho_2$, (где ρ_1 и ρ_2 — плотности горючего газа и продуктов сгорания) сталкивается со значительными трудностями, связанными с описанием вихревого течения продуктов сгорания. В данной работе

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FZNS-2023-0031).

рассмотрен случай больших значений коэффициента расширения газа, что позволяет использовать асимптотическое разложение, рассматривая величину $1/E \ll 1$ как малый параметр.

Эволюционное уравнение для фронта пламени при больших коэффициентах расширения газа

Предполагая, что коэффициент расширения газа большая величина $E \gg 1$, будем считать $\varepsilon = E^{-1/2}$ малым параметром задачи. Фронт пламени, заданный уравнением $z = f(x,t)$ разделяет свежую смесь $(z > f)$ и продукты горения $(z < f)$. Движение газа описывается уравнениями Эйлера и на границе областей выполняются условия сохранения массы, импульса газа и условие распространения фронта пламени по свежему газу с заданной нормальной скоростью [2]. Предполагается, что нормальная скорость распространения пламени зависит от локальной кривизны фронта пламени и описывается зависимостью Маркштейна [3].

В этом случае можно использовать следующие переменные для возмущения фронта пламени $F = f/\sigma$, пространственные координаты, $\eta = x/\sigma$, $\zeta = y/\sigma$ и время $\tau = tS_0/\varepsilon\sigma$. Компоненты скорости в горючей смеси измеряются в единицах S_0/ε, скорости сгоревшего газа измеряются в единицах S_0/ε^2, а давление выражается в единицах $\rho_1 S_0^2/\varepsilon^2$. Здесь S_0 — скорость распространения плоского ламинарного пламени, σ — длина Маркштейна [3][3] и ρ_1 — плотность свежей смеси.

Записав основное уравнение Эйлера для скоростей, давления и граничных условий в безразмерных переменных, можно получить систему уравнений для возмущений фронта пламени $F(\zeta,\tau)$ и потенциала потока горючей смеси $\psi(\zeta,\tau)$ на фронте пламени [4].

$$F_\tau = -\hat{K}\{\psi\} - \hat{K}\{F\hat{K}\{\psi\}\} - \psi_{\zeta\zeta}F - \psi_\zeta F_\zeta \quad (1)$$

$$\begin{aligned}\psi_\tau = -\hat{K}\{F\} - 2F_{\zeta\zeta} - \frac{1}{2}\left(\hat{K}\{F\}\right)^2 - \\ -\frac{1}{2}F_\zeta^2 + \hat{K}\{F\hat{K}\{F\}\} + F_{\zeta\zeta}F - \\ -\hat{K}\{\psi\}F_\tau - \frac{1}{2}\left(\left(\hat{K}\{\psi\}\right)^2 + \psi_\zeta^2\right)\end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$\hat{K}\{f\} = \frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} |k| \exp\left(ik\left(y - y_1\right)\right) f(y_1)\, dy_1 dk$$

нелокальный линейный оператор. В фурье-представлении действие этого оператора сводится к умножению коэффициентов Фурье функции на модуль волнового вектора $|k|$. Уравнение (1) следует из уравнения распространения фронта пламени по свежей смеси с заданной нормальной скоростью. Как было показано в работе [4], при больших коэффициентах расширения газа безразмерные уравнения для продуктов сгорания не зависят от времени, что позволяет получить уравнение (2) для фронта пламени F и функции ψ. Система уравнений (1) и (2), допускает дальнейшее упрощение. Записывая уравнения (1), (2) в переменных $X = F - \psi$ и $Y = F + \psi$ можно показать, что переменная X экспоненциально возрастает, тогда как Y экспоненциально убывает. В ходе эволюции переменная $Y = F + \psi$ будет экспоненциально стремиться к нулю откуда следует, что $\psi \to -F$ и $X \to 2F$. В результате, можно получить уравнение для фронта пламени вида:

$$F_\tau = \hat{K}\{F\} + F_{\zeta\zeta} + F_\zeta^2 \quad (3)$$

Полученное уравнение имеет вид уравнения Сивашинского [5], полученного ранее для случая малого коэффициента расширения газа $E - 1 \ll 1$. Несмотря на идентичную математическую формулировку эволюционных уравнений, физическая интерпретация решений, полученных в предельных случаях $E - 1 \ll 1$ и $E \gg 1$, различна. В случае малых коэффициентов расширения газа нелинейное уравнение описывает только эволюцию возмущений фронта пламени F. В случае больших коэффициентов расширения нелинейное уравнение описывает возмущения как фронта пламени F, так и потенциала поля скорости горючей смеси на фронте пламени ψ. В случае больших коэффициентов расширения газа в продуктах сгорания возникает вихревое течение и картина течения принципиально отличается от случая малых коэффициентов расширения. Завихренность потока сохраняется вдоль линий тока и остается отличной от нуля всюду в области продуктов сгорания. В общем случае эволюция пламени описывается системой уравнений (1) и (2) для F и функции ψ. Необходимость использования полной системы уравнений возникает, например, при описании перехода от первоначально плоского пламени к тюльпанообразному пламени, распространяющемуся в канале [6]. Исследование решений этой системы будет проводиться в дальнейшем.

На Рис. 1 показаны линии тока, построенные для точного частного решения уравнения (3), имеющего вид:

$$\begin{aligned}F(\zeta,\tau) = \ln(1 + a^2 + 2a\cos(\zeta\tau)) + w\tau, \\ w = k - k^2\end{aligned} \quad (4)$$

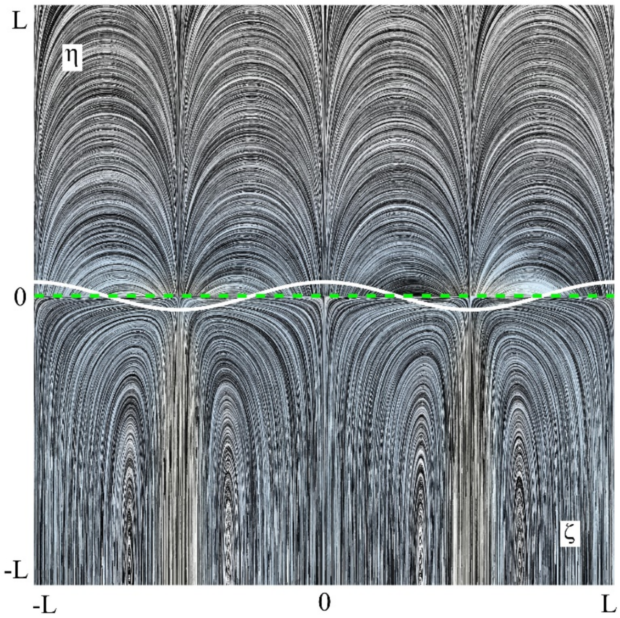

Рис. 1. Линии тока, соответствующие стационарному решению (4), построены для случая $L = 10$, $k = 2\pi/L$ и $a^2 = (1-k)/(1+k)$. Сплошная белая линия — фронт пламени. Зелёный пунктир — невозмущённое пламя

Список литературы

[1] *L.Filyand, G.I.Sivashinsky and M.L.Frankel*, On self-acceleration of outward propagating wrinkled flames// Physica D, 1994, V.72, p.110–118.

[2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука. ГРФМЛ. 2000. С. 733.

[3] *G.H.Markstein,* Nonsteady Flame Propagation, Pergamon Press, Oxford, 1964.

[4] *Minaev S., Gubernov V.,* Nonlinear Analysis of Flame Hydrodynamic Instability at Large Gas Expansion Ratio, Combustion Theory Modeling, 2022, V. 26(4), p. 654–668.

[5] *G.I. Sivashinsky*, Some developments in premixed combustion, Proceedings of the Combustion Institute, 2002, V. 29, p. 1737–1761.

[6] *G. Joulin, Hazem El-Rabii an K.A.Kazakov*, Description of Non-Stationary Flames, J. Fluid Mech., 2008, V. 608, p. 217–242.