ISSN 2658–5782 Том 18 (2023), № 3, с. 158–160

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/2023/pdf/mfs2023.3.041.pdf
DOI: 10.21662/mfs2023.3.041

Получена: 15.09.2023
Принята: 10.11.2023

О лучевой теории волновых аттракторов в стратифицированной жидкости[1]

Петров А.Г.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва

Введение

Несжимаемая жидкость находится в устойчивом статическом равновесии с плотностью, линейно растущей в направлении силы тяжести. Регулярные возмущения этого статического равновесия с некоторой частотой ω приводят к внутренним гравитационным волнам, энергия которых распространяется по прямым линиям — лучам, образующим фиксированный угол с вертикалью $\theta = \arccos(\omega/N)$, где N — частота Брента-Вяйсяля. При отражении от стенки направление луча меняется так, что его угол с вертикалью θ меняет знак, а абсолютная величина угла θ сохраняется. Таким образом, для простейшего исследования внутренних волн можно использовать лучевую модель. Существуют лабораторные и численные эксперименты, в которых волновой луч отражается от стенок бассейна, имеющего форму трапеции [1, 2]. В таком бассейне луч, последовательно отражаясь от стенок, принимает предельную устойчивую форму параллелограмма — волновой аттрактор [1–5]. Данное исследование посвящено аналитическому выводу координат вершин аттрактора при заданных сторонах трапеции и угла θ, условиям сходимости, а также вывода необходимых и достаточных условий, которым должны удовлетворять длины сторон трапеции, в которой образуются волновые аттракторы с одним отражением от каждой стороны.

[1]Работа выполнена в рамках госзадания (АААА-А20-120011690138-6).

Постановка задачи и ее решение

Рассмотрим бассейн в форме трапеции $ABCD$. Сторона AD направлена по вертикали, стороны AB и DC по горизонтали, их длины $AD = a$, $AB = b_1$, $DC = b$, $b_1 < b_2$. В декартовых осях X, Y вершины трапеции задаются координатами $A(0, a)$, $B(b_1, a)$, $C(b_2, 0)$, $D(0, 0)$ (Рис. 1, a).

Исследование аттракторов удобно провести на (d, τ) плоскости, введенной в [1] (см. Рис. 1, б). Равенство углов луча относительно вертикали сохраняется при растяжении плоскости относительно горизонтальной оси или относительно вертикальной оси. Поэтому преобразование $\bar{x} = 2x/b_2 - 1$, $\bar{y} = y\tau/a$, переводящее вершины трапеции $A(0, a)$, $B(b_1, a)$, $C(b_2, 0)$, $D(0, 0a)$ на плоскости x, y в вершины трапеции $\bar{A}(-1, \tau)$, $\bar{B}(1, \tau)$, $\bar{C}(d, 0)$, $\bar{D}(-1, 0)$ на плоскости $\bar{x}, \bar{y}$. Координаты вершин аттрактора $M_0(x, a)$, $M_1(0, y)$, $M_2(z, 0)$, $M_3(b, u)$ в исходной трапеции $ABCD$ преобразуются в вершины $\bar{M}_0(\bar{x}, \tau)$, $\bar{M}_1(-1, \bar{y})$, $\bar{M}_2(\bar{z}, 0)$, $\bar{M}_3(\bar{b}, \bar{u})$ на преобразованной трапеции $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$. Формулам координат аттрак-

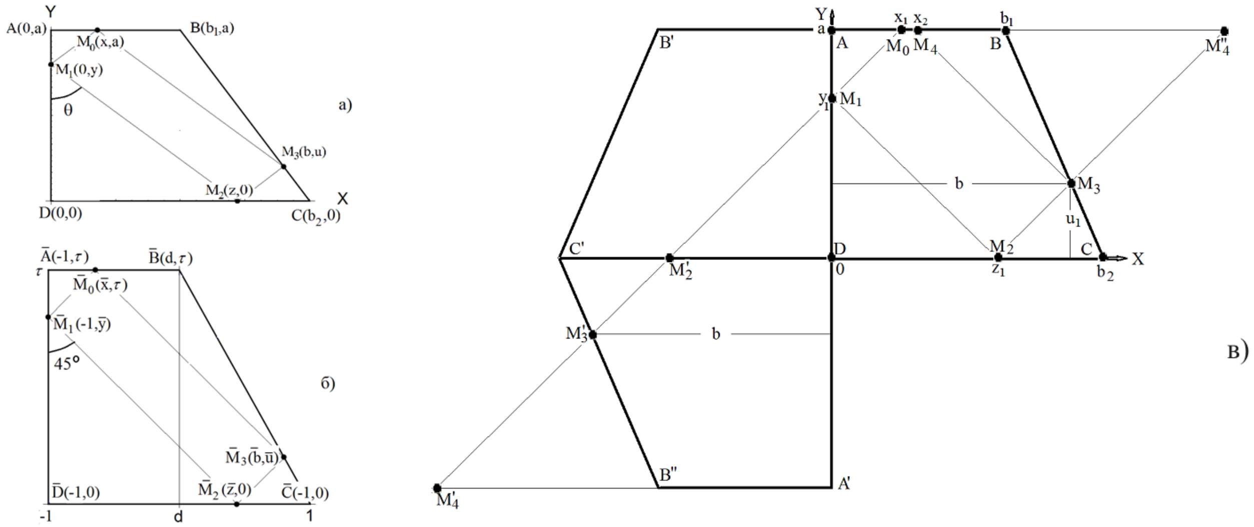

Рис. 1. К схеме лучевой теории волновых аттракторов

тора соответствуют координаты преобразованного аттрактора

$$\bar{x} = \frac{(-2+\tau)\tau}{-1+d} - 1, \quad \bar{y} = \frac{(1+d-\tau)\tau}{-1+d},$$

$$\bar{z} = \frac{(1+d-\tau)\tau}{-1+d} - 1, \quad \bar{u} = \frac{(-2+\tau)\tau}{-1+d}, \quad \bar{b} = \tau.$$

При этом преобразовании угол θ переходит в угол 45°, а параметры d и τ выражаются через стороны исходной трапеции и угол θ следующим образом: $d = 2b_1/b_2 - 1$, $\tau = 2a\operatorname{tg}\theta/b_2$. Поскольку $0 < b_1 < b_2$, то параметр d меняется на интервале $d \in (-1, 1)$.

Предлагается метод отражений [7]. Траектория луча с вершинами M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, лежащих на сторонах трапеции (Рис. 1, в), состоит из четырех отрезков. Каждый отрезок траектории наклонен к вертикали под одним и тем же углом θ. Поэтому лучу соответствует прямая линия M_0, M_1, M_2', M_3', M_4' на отраженных трапециях. Координаты начальной точки луча заданы $M_0(x_1, a)$. Решаются следующие задачи.

1) Определить координаты точек траектории луча M_1, M_2, M_3, M_4.

2) Определить координаты аттрактора: траектории луча у которого начальная точка M_0 совпадает с конечной M_4 (Рис. 1, а).

3) Исследовать устойчивость аттрактора, то есть найти такие длины сторон трапеции $ABCD$, при которых при небольшом отклонении начальной точки от точки M_0 аттрактора, после каждых последующих отражениях от стенок трапеции луч приближался к предельной траектории аттрактора.

Методом отражений доказываются следующие теоремы [6].

Теорема 1. *Координаты вершин аттрактора $M_0(x, a)$, $M_1(0, y)$, $M_2(z, 0)$, $M_3(b, u)$ в трапециевидном бассейне со сторонами a, b_1, b_2, $b_1 < b_2$ определяются формулами*

$$x = \frac{a\operatorname{tg}\theta(b_2 - a\operatorname{tg}\theta)}{b_2 - b_1}, \qquad y = a\frac{b_1 - a\operatorname{tg}\theta}{b_1 - b_2},$$

$$z = a\operatorname{tg}\theta\frac{b_1 - a\operatorname{tg}\theta)}{b_1 - b_2}, \qquad u = a\frac{-b_2 - a\operatorname{tg}\theta}{b_1 - b_2},$$

$$b = a\operatorname{tg}\theta.$$

Теорема 2. *Для того чтобы существовал аттрактор в трапеции $ABCD$, изображен-ной на Рис. 1, а), луч которого отражается от каждой стороны трапеции по одному разу, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее соотношение*

$$1 + |d| < \tau < 2, \quad d = 2b_1/b_2 - 1, \quad \tau = 2a(\operatorname{tg}\theta)/b_2.$$

Более общий результат для областей существования аттракторов $(1, n)$, луч которых отражается от горизонтальных сторон трапеции по n раз, тем же методом получен в [7][7]

$$\tau > \frac{d+1}{n}, \quad \tau < \frac{2}{n}, \quad \tau > 1 - d.$$

Результат проверен методом трассировки лучей (Рис. 2)

Теорема 3. *При последовательном отражении луча от стенок бассейна на верхней стороне образуется последовательность точек $M_0(x_1, a)$, $M_4(x_2, a)$, $M_8(x_3, a)$, $\ldots$,* где x_n — *геометрическая прогрессия*:

$$x_n = x + (x_1 - x)q^{n-1}, \quad q = \frac{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b_2 - b_1}{a}.$$

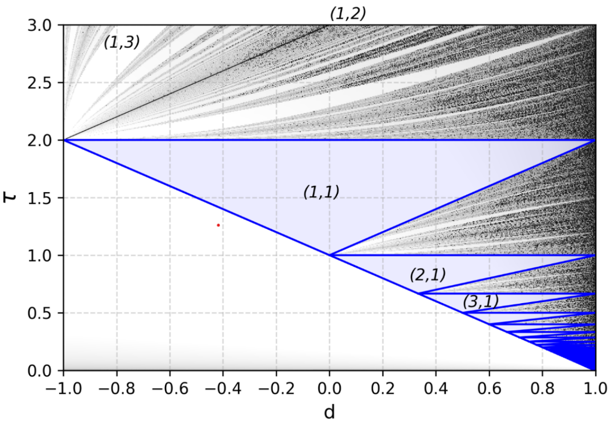

Рис. 2. Области существования волновых аттракторов, полученные методом трассировки лучей

Список литературы

[1] *Maas L.R.M., Lam F.P.A.* Geometric focusing of internal waves // J. Fl. M.1995, V. 300, p. 1–41.

[2] *Maas L.R.M., Benielli D., Sommeria J., Lam F.P.A.* Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid // Nature 1997, V. 388, p. 557–561.

[3] *Brouzet C., Sibgatullin, I., Scolan H., Ermanyuk E., Dauxois T.* Internal wave attractors examined using laboratory experiments and3D numerical simulations // J.Fl.M. 2016, V. 3, p. 109–131.

[4] *Brouzet C., Ermanyuk E., Joubaud S., Sibgatullin I., Dauxois T.* Energy cascade in internal-wave attractors // EPL Europhys. Lett. 2016, V. 113.

[5] *Boury S., Sibgatullin I., Ermanyuk E., Shmakova, N., Odier P., Joubaud S., Maas L.R., Dauxois T.* Vortex cluster arising from an axisymmetric inertial wave attractor // J. Fluid Mech. 2021, V. 926, p. A12.

[6] *Петров А.Г.* Координаты волнового аттрактора в трапециевидном водном бассейне со стратификацией // Доклады РАН. Физика Технические науки. 2022. Т. 503. С. 18–23.

[7] *Sibgatullin I.,Petrov A.G., Xu X., Maas L.* On Wave Attractors: Coordinates and Saturation Time // Symmetry 2022, V. 14, p. 319. https://doi.org/10.3390/sym14020319