ISSN 2658–5782 Том 18 (2023), № 3, с. 162–163

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/2023/pdf/mfs2023.3.043.pdf
DOI: 10.21662/mfs2023.3.043

Получена: 15.09.2023
Принята: 10.11.2023

14-я международная конференция-школа «Волны и вихри в сложных средах» 2023

Интегро-дифференциальное уравнение с кубической нелинейностью для профиля стационарной поверхностной волны

Руденко А.И.

«Калининградский государственный технический университет» ФГБОУ ВО «КГТУ», Калининград

Предположим, что на свободной поверхности идеальной однородной несжимаемой жидкости конечной глубины h сформировалась система стационарных нелинейных волн, которые движутся с постоянной скоростью [1, 2]. Рассмотрим двумерную постановку задачи. Систему отсчета совместим с движущейся волной, тогда течение, которое обусловлено волнами, будет установившимся, а, следовательно, свободную поверхность и дно можно принять за линии тока. Введем некоторые обозначения: $u = u(x)$,$v = v(x)$ — горизонтальная и вертикальная компоненты скорости; $\eta = \eta(x)$ и c — профиль волны и среднее значение скорости течения;$u - iv = cw'(z)$, $z = x + iy$,$w = \phi + i\psi$— комплексный потенциал скорости, (ϕ, ψ— относительный потенциал и функция тока). Тогда кинематические условия на дне и на свободной поверхности примут вид: $\psi_{y=-h} = 0$, $\psi_{y=\eta(x)} = d$, d — динамическая глубина.

Динамическое условие получим с помощью интеграла Бернулли–Коши:$2^{-1}(u^2 + v^2) + g\eta(x) = P$, $y = \eta(x)$. Необходимо отметить что $P = \text{const}$, которая требует определения. Область течения с помощью относительного комплексного потенциала скорости конформно отображается на полосу: $\psi \in (0, d)$. Тогда требуется определить функции $\eta(\phi)$, $y = \eta(\phi, \psi)$, которые удовлетворяют следующим граничным условиям (следствия из кинематического и динамического условий на свободной поверхности):

$$y(\phi, 0) = -h,\ y(\phi, d) = \eta(\phi), \tag{1}$$

$$\left(P - 2c^2 g^{-1}\eta(\phi)\right)\left(y_\phi^2(\phi, d) + y_\psi^2(\phi, d)\right) = 1, \tag{2}$$

а также условиям нулевого среднего:

$$\langle \eta(\phi) \rangle = 0, \qquad \langle y(\phi, \psi) - \psi \rangle = 0.$$

Для этого выразим обе частные производные в динамическом граничном условии (2) через $\eta(\phi)$. Первое выражается из (1) и имеет следующий вид:

$$y_\phi(\phi, d) = \eta'(\phi). \tag{3}$$

Для нахождения $y_\psi(\phi, d)$ следует отметить, что соответствие $V\ :\ y(\phi, 0)\ \rightarrow\ y_\psi(\phi, 0)$ является линейным интегро-дифференциальным оператором типа свертки. Для достижения цели достаточно определить его действие на косинусы. Далее найдем гармоническую функцию $y = \eta(\phi, \psi)$, которая удовлетворяет граничным условиям: $y(\phi,0) = 0$, $y(\phi,d) = \eta(\phi) = A\,\mathrm{sh}(kh)\cos(k\phi)$, где A — амплитуда основной гармоники, k — волновое число. Функция $y(\phi,\psi)$ будет иметь следующий вид:

$$y(\phi,\psi) = A\,\mathrm{sh}(kh)\,\mathrm{sh}(k\psi)\cos(k\phi)\,\mathrm{sh}^{-1}(kd).$$

Тогда получаем, что:

$$y_\psi(\phi,0) = V(A\,\mathrm{sh}(kh)\cos(k\phi)) =$$

$$= kA\,\mathrm{sh}(kh)\,\mathrm{cth}(kd)\cos(k\phi).$$

Поскольку $y(\phi,\psi) = \psi^+$ периодическая функция, то из свойств оператора V следует равенство: $y_\psi(\phi,0) = 1 + V\eta(\phi)$. Подставим последнее равенство и (3) в (2), получаем нужное уравнение для профиля волны:

$$(P - 2\eta(\phi))((1 + V\eta(\phi))^2 + (\eta'(\phi))^2) = c^2 g^{-1}. \quad (4)$$

К (4) следует присоединить уравнение, определяющее зависимость x от ϕ, которое получается из соотношения для сопряженных гармонических функций: $x(\phi,\psi)$, $y(\phi,\psi)$, где $(x_\phi(\phi,\psi) = y_\psi(\phi,\psi))$, и имеет вид:

$$x'(\phi) = 1 + V\eta(\phi). \quad (5)$$

Уравнения (4), (5) представляют собой самостоятельный интерес, например, в связи с возможностью сопоставить их с стационарным уравнением КдФ.

Список литературы

[1] *Зайцев А.А., Руденко А.И.* К теории стационарных волн на горизонтальном течении с линейным профилем скорости// ПМТФ. Т. 47. № 3. Новосибирск. 2006. С. 43–49.

[2] *Зайцев А.А., Руденко А.И., Алексеева С.М.* Первый метод Стокса в задаче о волнах на поверхности жидкости конечной глубины. // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта, раздел Физико-математические и технические науки, №1 Калининград. 2020. С. 64–75.