ISSN 2658–5782 Том 18 (2023), № 3, с. 171–172

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/2023/pdf/mfs2023.3.046.pdf
DOI: 10.21662/mfs2023.3.046

Получена: 15.09.2023
Принята: 10.11.2023

Квантовая турбулентность в терминах теории многих тел

Талалов С.В.

Тольяттинский государственный университет, Тольятти

В докладе рассматривается квантовое взаимодействие вихревых петель с внутренней структурой. Такая система рассматривается как модель квантовой турбулентности в среде без диссипации. Вихревые петли — замкнутые кривые $\mathbf{r}(\tau,\xi)$, эволюционирующие в пространстве в соответствии с уравнением:

$$\partial_t \mathbf{r}(t,s) = A\partial_s \mathbf{r}(t,s) \times \partial_s^2 \mathbf{r}(t,s) + B\left(\partial_s^3 \mathbf{r}(t,s) + \frac{3}{2}\left|\partial_s^2 \mathbf{r}(t,s)\right|^2 \partial_s \mathbf{r}(t,s)\right).$$

Второе слагаемое, добавленное к стандартному уравнению локальной индукции, описывает, как известно (см., например, [1]), поток внутри ядра вихря. Доклад основан на работах автора [2, 3], в которых показана применимость теории многих тел к описанию взаимодействия петель, включая их распад, соединение и пересоединение. Новый подход к квантованию отдельно взятого возмущенного вихревого кольца был предложен ранее в работах автора [4, 5]. В данных работах был также сделан обзор литературы по данным вопросам, который здесь, вследствие малого объема статьи, приводиться не будет.

В простейшем случае, когда мы рассматриваем только вихревые кольца с переменным, вообще говоря, радиусом, динамика кольца определяется переменными $\mathbf{p}, \mathbf{q}$, ω и χ. Где $\mathbf{p}$ – гидродинамический импульс, связанный с вихрем, $\mathbf{q}$ — координаты центра кольца, а переменные ω и χ — осцилляторные переменные, такие, что радиус кольца $R^2 = R_0^2(\omega^2 + \chi^2)$. Величина R_0 определяет некий масштаб длин в теории, а величина $\arctan(\chi/\omega)$ определяет поток внутри ядра вихря.

В квантовом варианте единичный вихрь описывается состоянием в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_{p,q} \otimes \mathbf{H}_b$, где $\mathbf{H}_{p,q}$ — пространство свободной бесструктурной 3D частицы (например, $L^2(R_3)$, а $\mathbf{H}_b$ обозначает гильбертово пространство квантового гармонического осциллятора.

Данные переменные позволяют использовать инструменты квантовой теории многих тел для описания взаимодействия вихревых колец. Действительно, пусть

$$\mathbf{H}_N = \underbrace{\mathbf{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{H}_1},$$

пространство N невзаимодействующих вихрей. В этом случае любой вектор $\left|\Phi^N\right\rangle \in \mathbf{H}_N$ может быть представлен в виде $(N \geqslant 1)$

$$|\Phi^N\rangle = \sum_{n_1,\ldots,n_N} \int \cdots \int d\mathbf{p}_1 \ldots d\mathbf{p}_N f^N(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N) \times \varphi^N_{n_1,\ldots,n_N} \, |\mathbf{p}_1\rangle \ldots |\mathbf{p}_N\rangle \, |n_1\rangle \ldots |n_N\rangle,$$

где векторы $|\mathbf{p}_j\rangle$ — собственные для операторов $\hat{\mathbf{p}}_j$. Фоковское пространство определяется стандартным образом:

$$\mathfrak{H} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathbf{H}_N, \quad \mathbf{H}_0 = |0_{pq}\rangle \otimes |0_b\rangle = \mathbb{C}.$$

Полный гамильтониан системы взаимодействующих вихрей выбирается в виде

$$\hat{\mathbf{H}} = \hat{H}_0 + \hat{\mathbf{U}},$$

где $\mathbf{H}_0$ — свободный гамильтониан системы вихрей [2], а гамильтониан взаимодействия $\hat{\mathbf{U}}$ в общем случае имеет вид:

$$\hat{U} = \sum_{m,n=1}^{\infty} \varepsilon_{m,n} \hat{U}_{m\leftrightarrow n}.$$

Операторы $\hat{U}_{m\leftrightarrow n}$ определяют процессы взаимодействия (распада, пересоединения) вихрей в потоке. Каждый такой оператор описывает переход из состояния с m вихревыми кольцами в состояние с n вихревыми кольцами и обратно, обозначено как $m \leftrightarrow n$.

В цитированных работах автора обсуждаются возможные варианты явного вида таких операторов.

Например, для оператора $\hat{U}_{2\leftrightarrow 2}\,(n_1, n_2, n'_1, n'_2)$ может быть выбран такой вид:

$$\begin{aligned}
&\hat{U}_{2\leftrightarrow 2}(n_1, n_2, n'_1, n'_2) = \\
&= \delta_{n_1+n_2, n'_1+n'_2} \int \cdots \int d\mathbf{p}_1\, d\mathbf{p}_2\, d\mathbf{p}'_1\, d\mathbf{p}'_2 \times \\
&\times \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2) \times \\
&\times \hat{a}^+(\mathbf{p}_1; n_1)\hat{a}^+(\mathbf{p}_2; n_2)\hat{a}(\mathbf{p}'_1; n'_1)\hat{a}(\mathbf{p}'_2; n'_2).
\end{aligned}$$

Предложенный подход позволяет, в определенных случаях, вычислить статистическую сумму турбулентного потока:

$$Z = Tr \exp\left(-\frac{\hat{H}}{k_B T}\right).$$

Список литературы

[1] *Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л.*.Введение в теорию концентрированных вихрей. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО РАН, 2003.

[2] *Talalov S.V.*Towards quantum turbulence theory: A simple model with interaction of the vortex loops // Physical Review Fluids, 2023, V. 8, p.034607.

[3] *Talalov S.V.*The turbulence development at its initial stage: A scenario based on the idea of vortices decay // Physics of Fluids, 2023, V. 35, p. 045132.

[4] *Talalov S.V.*Small Oscillation of a Vortex Ring: Hamiltonian Formalism and Quantization // Eur. Journ. Mech B/Fluids, 2022, V. 92, p. 100–106.

[5] *Talalov S.V.*Closed vortex filament in a cylindrical domain: Circulation quantization // Physics of Fluids, 2022, V.34, p. 041702-1 – 041702-4.