ISSN 2658–5782 Том 18 (2023), № 3, с. 173–174

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/2023/pdf/mfs2023.3.047.pdf
DOI: 10.21662/mfs2023.3.047

Получена: 15.09.2023
Принята: 10.11.2023

Критерий допустимости решений в виде бегущей волны для обобщенного уравнения Кортевега–Де Вриза–Бюршерса[1]

Томашева А.М., Коломийцев Г.В., Шаргатов В.А.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва

Рассматриваются разрывные решения обобщенного уравнения Хопфа, соответствующего упрощенной модели среды (на крупных масштабах):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(v)}{\partial x} = 0. \tag{1}$$

Интегральная форма этого уравнения имеет вид

$$\oint \varphi(v)\, dt - v dx = 0. \tag{2}$$

Решение уравнения (2) представляет собой разрыв, распространяющийся со скоростью W (ударную волну)

$$v(x - Wt) = \begin{cases} v_l & x - Wt < 0, \\ v_r & x + Wt > 0, \end{cases} \quad W = \frac{[\varphi(v)]}{[v]}, \tag{3}$$

где через v_r и v_l обозначены значения параметров v перед и за разрывом соответственно.

Разрывное решение уравнения Хопфа в узкой зоне ударного перехода является непрерывной функцией, если учитываются мелкомасштабные процессы. В этом случае решение описывается обобщенным уравнением Кортевега-де Вриза-Бюргерса (КдВБ)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(v)}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - m \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}, \quad v = v(x, t), \tag{4}$$

где $\mu, m = const > 0$ — коэффициенты диссипации и дисперсии соответственно.

Для некоторых наборов значений W и v_r существуют решения уравнения КдВБ в виде бегущей волны, которые близки к кусочно-постоянному решению интегрального уравнения (3) вне узкой зоны ударного перехода. Такие решения уравнения КдВБ называются стационарными структурами разрывов.

После переобозначений

$$v \to u + v_r, \qquad t \to t\sqrt{m}, x \to x\sqrt{m},$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{m}}{\mu}, \varphi(v) = f(v - u_r)$$

ставится задача на структуру разрывов (решение в виде бегущей волны):

$$u = u(\xi), \xi = x - Wt,$$

[1] Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 20-11-20141.

© Томашева Анастасия Михайловна, anastasiatomasheva@gmail.com
© Коломийцев Георгий Васильевич, kolomytsev@theor.mephi.ru
© Шаргатов Владимир Анатольевич, VAShargatov@mephi.ru

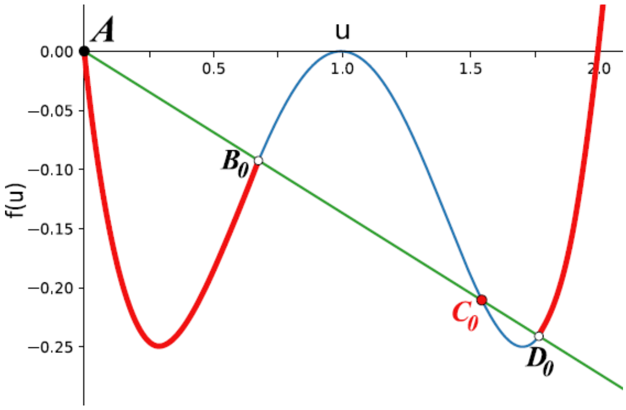

Рис. 1. $f(u)$. Выделенные интервалы — множество устойчивых разрывов со структурой. 0 — устойчивый особый разрыв

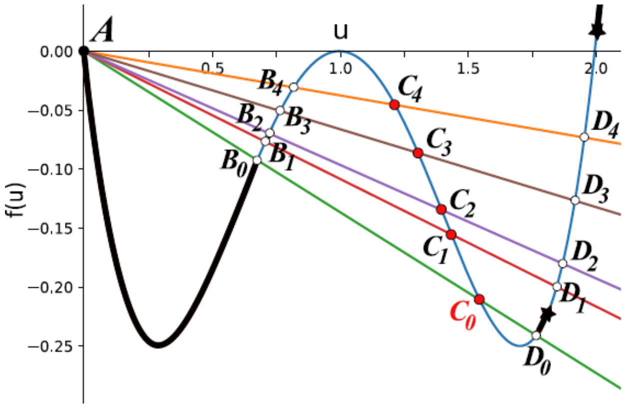

Рис. 2. $f(u)$. Множество допустимых разрывов

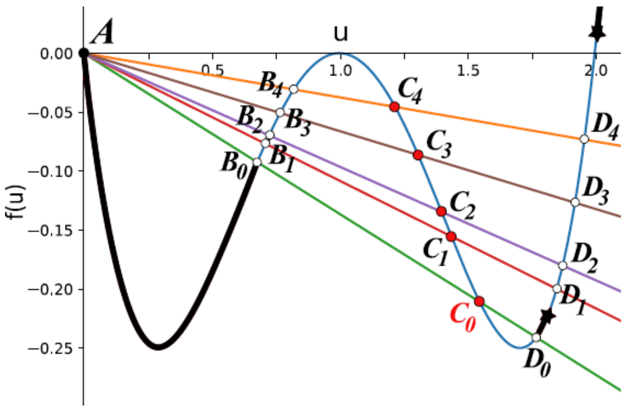

Рис. 3. $f(u)$ с четырьмя точками перегиба. Множество допустимых разрывов

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} - \frac{1}{\gamma}\frac{du}{d\xi} = Wu - f\,(u)$$

$$\lim_{\xi\to+\infty} u(\xi) \ = u_r \equiv 0.$$

В случае наличия диссипации и дисперсии множество решений в виде бегущих волн со структурой состоит из классических и особых разрывов, для которых нарушается условие Лакса. Аналог задачи Римана о распаде разрыва для уравнения Хопфа может иметь неединственное решение, если все разрывы со структурой признать допустимыми.

Для признания разрывов в решении гиперболической модели допустимыми необходимо наличие у них структуры [1]. Кроме того, разрывы не должны обладать «распадной» неустойчивостью. Устойчивость разрывов исследуется методом функции Эванса.

В случае, когда функция потока $f\,(u)$ имеет две точки перегиба (Рис. 1), множество устойчивых разрывов со структурой состоит из особого разрыва C0, обладающего наименьшей скоростью, классических разрывов со скоростью и параметром u_l за разрывом меньше, чем у особого ($A - B0$), и некоторого множества классических разрывов со скоростями и параметром за разрывом больше, чем у упомянутого особого разрыва (за $D0$) [2, 3]. На графике множество таких разрывов обозначено черной жирной линией.

Множество допустимых разрывов (Рис. 2) включает в себя также разрывы, которые представляют собой пульсирующие с определенным периодом структуры, не распадающиеся на последовательность волн.

Для функции потока с четырьмя точками перегиба (Рис. 3) показано, что множество допустимых разрывов качественно строится тем же образом, что и для функции с двумя точками перегиба. Сформулирован общий критерий, позволяющий выделить допустимые разрывы при известных скоростях устойчивых особых разрывов. Таким образом, исчезает неединственность в решении аналога задачи Римана.

Исходя из полученных результатов, также сформулирована и доказана теорема, которая устанавливает зависимость монотонности структур особых разрывов от скорости W бегущей волны и значения параметра за разрывом u_l.

Список литературы

[1] *Куликовский А.Г.*О возможном влиянии колебаний в структуре разрыва на множество допустимых разрывов // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275, № 6. С. 268–303.

[2] *Chugainova A.P., Il'Ichev A.T., Kulikovskii A.G., Shargatov V.A.*Problem of arbitrary discontinuity disintegration for the generalized Hopf equation: Selection conditions for a unique solution // IMA Journal of Applied Mathematics (Institute of Mathematics and Its Applications). 2017. V. 82, no. 3. P. 496–525.

[3] *A.P. Chugainova, V.A. Shargatov, G.V. Kolomiytsev*On the Instability of Monotone Traveling-Wave Solutions for a Generalized Korteweg–de Vries–Burgers Equation // J. Russian Journal of Mathematical Physics. 2022. Vol. 29, no. 3. P. 342 – 357.