ISSN 2658–5782 Том 18 (2023), № 3, с. 192–195

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/2023/pdf/mfs2023.3.054.pdf
DOI: 10.21662/mfs2023.3.054

Получена: 15.09.2023
Принята: 10.11.2023

Двухпалубная структура пограничного слоя в трехмерной задаче обтекания малой неровности на поверхности пластины[1]

Буров Н.А., Гайдуков Р.К.

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва

Для задач обтекания жидкостями и газами поверхностей с малыми неровностями при больших значениях числа Рейнольдса *Re* широко известны асимптотические решения с двух- и трехпалубными структурами пограничного слоя [1–3]. Использование таких моделей позволяет избежать прямого численного моделирование (DNS) уравнений Навье–Стокса, которое является ресурсоемким [4] из–за наличия пространственной разномасштабности (обусловленной геометрией обтекаемой поверхности — наличием малых неровностей). В рамках такого подхода исходная система уравнений Навье–Стокса асимптотически редуцируется к серии более простых систем, которые уже не содержат нескольких разных пространственных масштабов.

Однако, несмотря на широкую известность теории многопалубных структур, трехмерные задачи в рамках нее практически не исследовались. В данной работе исследуется задача обтекания вязкой несжимаемой жидкостью малой локализованной неровности произвольной формы (например, типа «горбик») на пластине в трехмерном случае (Рис. 1).

А именно, предполагается что поверхность пластины имеет вид

$$y_s = \varepsilon^{4/3}\mu((x-x_0)/\varepsilon, (z-z_0)/\varepsilon),$$

где $\varepsilon = Re^{-1/2}$ — малый параметр, а μ — некоторая гладкая локализованная в точке (x_0, z_0) функция, убывающая при стремлении аргументов к $\pm\infty$. На пластину набегает плоскопараллельный поток $u_\infty = (1,0,0)$, а неровность удалена от края пластины так, чтобы перед ней сформировался классический пограничный слой Прандтля. Такая геометрия (высота и ширина неровности) приводит к образованию двухпалубной структуры пограничного слоя (Рис. 1).

Рассматриваемая задача описывается системой уравнений Навье–Стокса и неразрывности $\langle \mathbf{U}, \nabla\rangle\mathbf{U} = -\nabla p + \varepsilon^2\Delta\mathbf{U}$, $\langle\nabla, \mathbf{U}\rangle = 0$ с граничными условиями прилипания к обтекаемой поверхности y_s, $\mathbf{U}|_{y=y_s} = 0$ и согласования с набегающим потоком $\mathbf{u}_\infty$ вдали от нее. Здесь $\mathbf{U} = (u, v, w)$ — вектор скорости, p — давление. С помощью мно-

[1]Исследование выполнено с использованием ресурсов суперкомпьютерного кластера НИУ ВШЭ. Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

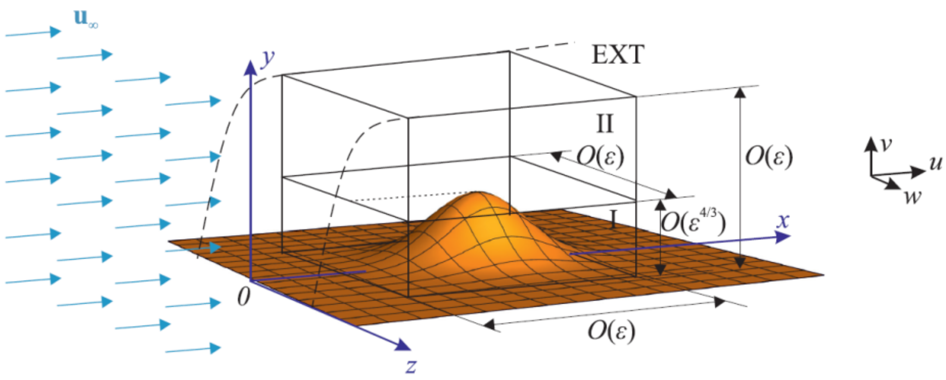

Рис. 1. Геометрия задачи и двухпалубная структура: I — тонкий погранслой, II — погранслой Прандтля, EXT — область внешнего (потенциального) потока

гомасштабного асимптотического анализа [1], основанного на комбинации метода погранслойных разложений и метода построения локализованных решений, построено формальное асимптотическое решение с двухпалубной структурой пограничного слоя.

Теорема. Пусть $x_0, z_0 \geqslant \delta > 0$. Тогда асимптотическое решение задачи имеет вид

$$u=1+u_0^{\mathrm{II}}(x,\tau)+\varepsilon^{\frac{1}{3}}(u_1^{\mathrm{I}}(\xi_1,\xi_2,0)+u_1^{\mathrm{II}}(\xi_1,\xi_2,\tau))+O(\varepsilon^{\frac{2}{3}}),$$

$$v=\varepsilon^{\frac{2}{3}}\left(v_2^{\mathrm{I}}(\xi_1,\xi_2,\theta)+v_2^{\mathrm{II}}(\xi_1,\xi_2,\tau)\right)+O(\varepsilon),$$

$$w=\varepsilon^{\frac{1}{3}}w_1^{\mathrm{I}}(\xi_1,\xi_2,\theta)+O(\varepsilon^{\frac{2}{3}}),$$

$$p=p_0+\varepsilon^{\frac{2}{3}}p_2^{\mathrm{II}}(\xi_1,\xi_2,\tau)+O(\varepsilon),$$

где $\xi_1=(x-x_0)/\varepsilon$, $\xi_2=(z-z_0)/\varepsilon$, $\tau=y_w/\varepsilon$, $\theta=y_w/\varepsilon^{4/3}$, $y_w=y-y_s$ — переменная, которая «выравнивает» границу (т.е. в переменных (x,y_w,z) граница становится плоской), τ и θ — погранслойные переменные для II и I палуб соответственно.

Функция $u_0^{\mathrm{II}}=u^*-1$, $u_1^{\mathrm{II}}=\mu(\partial u_0^{\mathrm{II}}/\partial\tau)|_{x=x_0}$, где $u^*=f'(\tau/\sqrt{x})$, $f(\gamma)$ — функция Блазиуса. Функции u_1^{I}, v_2^{I}, w_1^{I} определяются из соотношений

$$u^\dagger=u_1^{\mathrm{I}}+u_1^{\mathrm{II}}|_{\tau=0}+\theta\left.\frac{\partial u_0^{\mathrm{II}}}{\partial\tau}\right|_{\substack{\tau=0\\x=x_0}},$$

$$v^\dagger=v_2^{\mathrm{I}}+v_2^{\mathrm{II}}|_{\tau=0},\quad w^\dagger=w_1^{\mathrm{I}},$$

где функции $u^\dagger$, $v^\dagger$, $w^\dagger$ являются решением краевой задачи для системы уравнений Прандтля с самоиндуцированным давлением:

$$\begin{cases} u^\dagger\left(\dfrac{\partial u^\dagger}{\partial\xi_1}-\dfrac{\partial\mu}{\partial\xi_1}\dfrac{\partial u^\dagger}{\partial\theta}\right)+w^\dagger\left(\dfrac{\partial u^\dagger}{\partial\xi_2}-\dfrac{\partial\mu}{\partial\xi_2}\dfrac{\partial u^\dagger}{\partial\theta}\right)+\\ \quad+v^\dagger\dfrac{\partial u^\dagger}{\partial\theta}+\left.\dfrac{\partial p_2^{\mathrm{II}}}{\partial\xi_1}\right|_{\substack{\tau=0\\x=x_0}}-\dfrac{\partial^2u^\dagger}{\partial\theta^2}=0,\\ v^\dagger\dfrac{\partial w^\dagger}{\partial\theta}+w^\dagger\left(\dfrac{\partial w^\dagger}{\partial\xi_2}-\dfrac{\partial\mu}{\partial\xi_2}\dfrac{\partial w^\dagger}{\partial\theta}\right)+\\ \quad+u^\dagger\left(\dfrac{\partial w^\dagger}{\partial\xi_1}-\dfrac{\partial\mu}{\partial\xi_1}\dfrac{\partial w^\dagger}{\partial\theta}\right)-\dfrac{\partial^2w^\dagger}{\partial\theta^2}=0,\\ \dfrac{\partial u^\dagger}{\partial\xi_1}-\dfrac{\partial\mu}{\partial\xi_1}\dfrac{\partial u^\dagger}{\partial\theta}+\dfrac{\partial w^\dagger}{\partial\xi_2}-\dfrac{\partial\mu}{\partial\xi_2}\dfrac{\partial w^\dagger}{\partial\theta}+\dfrac{\partial v^\dagger}{\partial\theta}=0, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{gathered} u^\dagger|_{\theta=0}=0,\ v^\dagger|_{\theta=0}=0,\ w^\dagger|_{\theta=0}=0,\\ \left.\frac{\partial u^\dagger}{\partial\theta}\right|_{\theta\to\infty}=\left.\frac{\partial u_0^{\mathrm{II}}}{\partial\tau}\right|_{\substack{\tau=0\\x=x_0}},\\ u^\dagger|_{\xi_{1,2}\to\pm\infty}=\theta\left.\frac{\partial u_0^{\mathrm{II}}}{\partial\tau}\right|_{\substack{\tau=0\\x=x_0}},\\ w^\dagger|_{\theta\to\infty}=0,\ v^\dagger|_{\xi_{1,2}\to\pm\infty}=0,\ w^\dagger|_{\xi_{1,2}\to\pm\infty}=0. \end{gathered} \tag{2}$$

Функция v_2^{II} является решением краевой задачи для уравнения типа Рэлея

$$u^*|_{x=x_0}\Delta_{\xi_1,\xi_2,\tau}v_2^{\mathrm{II}}-v_2^{\mathrm{II}}\frac{\partial^2u^*}{\partial\tau^2}|_{x=x_0}=0,$$

$$v_2^{\mathrm{II}}|_{\xi_{1,2}\to\pm\infty}=0,\quad v_2^{\mathrm{II}}|_{\tau\to\infty}=0,$$

$$v_2^{\mathrm{II}}|_{\tau=0}=v^\dagger|_{\theta\to\infty},\quad \Delta_{\xi_1,\xi_2,\tau}=\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\xi_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}.$$

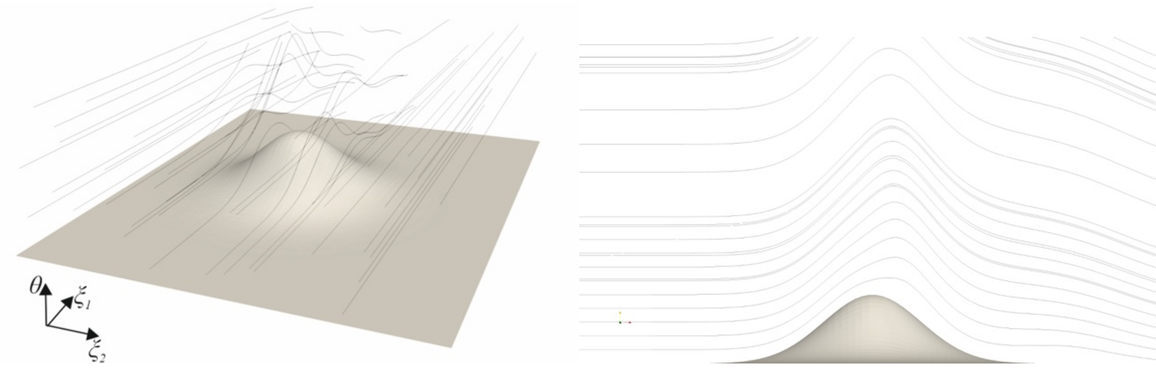

Рис. 2. Линии тока для функции для неровности h_1, $A = 1$, $t = 0.75$

Давление p_2^{II} определяется равенством:

$$p_2^{\mathrm{II}} = \int\limits_{-\infty}^{\xi_2} \frac{\partial w_2^{\mathrm{II}}}{\partial \xi_1} d\xi_2,$$

где функция w_2^{II} является решением краевой задачи для уравнения Пуассона

$$u^*|_{x=x_0}\Delta_{\xi_1,\xi_2} w_2^{\mathrm{II}} = \frac{\partial v_2^{\mathrm{II}}}{\partial \xi_2}\frac{\partial u^*}{\partial \tau}\bigg|_{x=x_0} - \frac{\partial^2 v_2^{\mathrm{II}}}{\partial \xi_2 \partial \tau} u^*|_{x=x_0},$$

$$w_2^{\mathrm{II}}|_{\xi_{1,2}\to\pm\infty} = 0, \quad \Delta_{\xi_1,\xi_2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}.$$

Отметим, что выражение для самоиндуцированного давления можно записать в виде:

$$\frac{\partial p_2^{\mathrm{II}}}{\partial \xi_1}\Big|_{\substack{\tau=0\\ x=x_0}} = -v^{\dagger}|_{\theta\to\infty}\frac{\partial u_0^{\mathrm{II}}}{\partial \tau}\Big|_{\substack{\tau=0\\ x=x_0}}. \qquad (3)$$

Это равенство позволяет решать систему уравнений Прандтля с самоиндуцированным давлением (1), (2) независимо от остальных уравнений — нужно знать лишь значение $f''(0)$, которое известно и приближенно равно 0.33.

Течение в области около неровности описывается задачей (1)–(3), которую будем решать численно с методом установления с помощью конечных разностей. Программная реализация алгоритмов моделирования выполнена на языке C++ с применением библиотек VTK (для визуализации) и CUDA (для распараллеливания явной разностной схемы). Моделирование проводилось для нескольких типов неровностей. В качестве первой была взята неровность типа «горбик», форма которой описывается как:

$$h_1(\xi_1,\xi_2) = Ae^{(-\xi_1^2-\xi_2^2)}, \quad A = const.$$

Для случая $A = 1$ (Рис. 2) получено, что спустя некоторое время после начала моделирования поток становится ламинарным и стационарным (последнее утверждение проверено вычисление сеточной нормы решения — она становится малой). При увеличении до $A = 3$ (Рис. 3) формируется зона отрыва пограничного слоя с вихревым течением. Отметим также, что неровность вытесняет поток преимущественно вверх, а не в стороны.

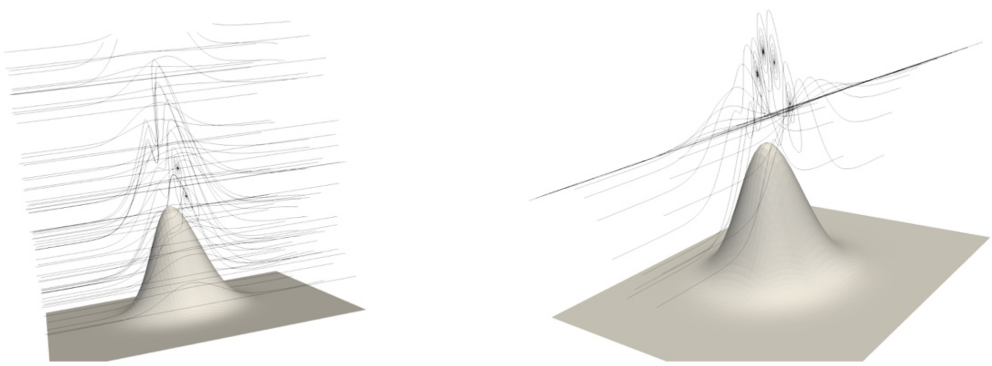

Рис. 3. Линии тока для функции для неровности h_1, $A = 3$, $t = 1.0$

Список литературы

[1] *Danilov V.G., Gaydukov R.K.* Double-deck structure of the boundary layer in problems of flow around localized perturbations on a plate // Math. Notes. 2015. V. 98. P. 561–571.

[2] *Smith F.T.* Laminar flow over a small hump on a flat plate / F. T. Smith // Journal of Fluid Mechanics. 1973. No. 57. P. 803–824.

[3] *Yapalparvi R.* Double-deck structure revisited // European Journal of Mechanics — B / Fluids. 2012. V. 31. P. 53–70.

[4] *Gianmarco M., Kravtsova M., Ruban A., Sherwin S.* Triple- deck and direct numerical simulation analyses of high-speed subsonic flows past a roughness element // Journal of Fluid Mechanics. 2015. V. 774. P. 311–323.