



Процессы образования гравитационных внутренних волн за телом, движущимся в двумерной и трехмерной стратифицированной вязкой жидкости

Матюшин П.В.

Институт Автоматизации Проектирования РАН, Москва

Проведено математическое моделирование равномерного движения квадрата и диска со скоростью U в покоящейся линейно стратифицированной по плотности несжимаемой вязкой жидкости вдоль горизонтальной оси Z симметрии тела справа налево [1]. Показано, как на пустом месте **в силу гравитационной и сдвиговой неустойчивостей** формируются полуволны -1 и 1 (Рис. 1, 3), первая из которых со временем формирует след за телом, а вторая начинает череду внутренних полуволн над следом (Рис. 1–3). Пусть T_b — период плавучести жидкости, тогда **первая часть механизма формирования внутренних волн (МФВВ1)** будет одинаковой для двумерного (2D) и трехмерного (3D) случаев: «Каждые $T_b/2$ **новые полуволны k и $-k$ рождаются над местом Q старта тела**, где $k = 1, 2, 3, \dots$; точка Q находится на пересечении черной вертикальной прямой и оси Z , совпадающей с нижней границей рисунков. Нечётные и чётные полуволны k со временем становятся впадинами и гребнями, соответственно.

Моделирование

Для математического моделирования решалась система уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска [2], записанная как в декартовой (Z, X) , так и в цилиндрической $(Z = Z, X = R \cdot \cos \varphi, Y = R \cdot \sin \varphi)$ системах координат. Решение системы находилось при помощи численного метода МЕРАНЖ [3] на вычислительных ресурсах Межведомственного суперкомпьютерного центра Российской академии наук (МСП РАН). Длина стороны квадрата и диаметр диска равны d . Толщина диска $h = 0.76 \cdot d$. Эта задача характеризуется четырьмя параметрами: $T_b, Fr = U \cdot T_b / (2\pi \cdot d)$ — внутреннее число Фруда, $Re = U \cdot d / \nu$ — число Рейнольдса, $Sc = \nu / \kappa = 709.2$ — число Шмидта, где ν и κ — коэффициенты кинематической вязкости жидкости и диффузии соли. Пусть $T = \tau / T_b$, где τ — реальное время, прошедшее с начала старта тела.

МФВВ2 для квадрата

«Каждые T_b из левой части **осевой полуволны -1 формируется новый вихрь $k^{-1} \equiv -1(k)$ (осевая часть гребня k)**, где k — чётное число (Рис. 1, I)». Сердцевины полуволн на Рис. 1(в-д), I показаны красными штриховыми линиями с красными номерами.

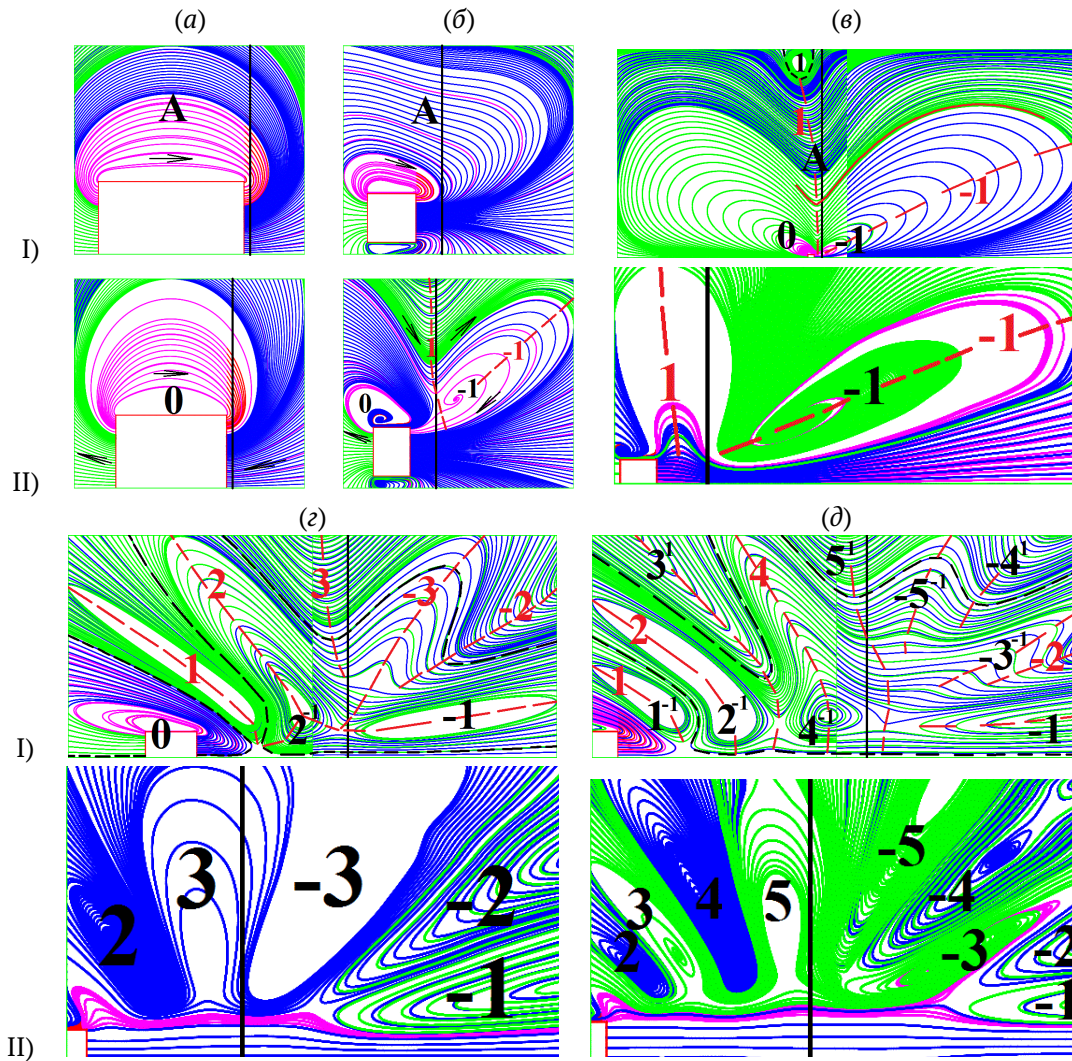


Рис. 1. Мгновенные линии тока в системе координат, связанной с жидкостью, при $Fr = 0.3$, $Re = 50$, $T_b = 2\pi$ с около квадрата со стороной d (I) и диска толщиной $0.76 \cdot d$ (II) (в вертикальной плоскости $X - Z$): а-д – $T = 0.02, 0.28, 0.55, 1.55, 2.55$

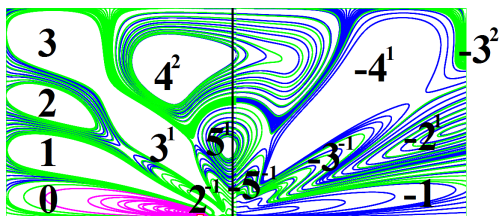


Рис. 2. Линии тока около квадрата при $Fr = 0.3$, $Re = 50$, $T_b = 2\pi$ с, $T = 2.55$

Черными номерами на Рис. 1в–д, I обозначаются вихревые ячейки, появившиеся в общем поле течения A около квадрата. Со временем картина течения становится похожей на шахматную доску (Рис. 2). Так на Рис. 1д, I и 2 виден пятилистник

следа, состоящий из вихревых ячеек 2^{-1} , 4^{-1} и -1 и полуячеек -5^{-1} и -3^{-1} , которые выделены на Рис. 1д, I чёрной штриховой линией. Над этим пятилистником виден первый ряд вихревых ячеек: 1 , 3^1 , 5^1 , -4^1 , -2^1 . Выше первого ряда расположен второй ряд вихревых ячеек: 2 , 4^2 , -3^2 , и т.д. В отличие от 2D-случая в 3D-случае в картинах линий тока в плоскости $X - Z$ на Рис. 1, II такого шахматного расположения вихрей не наблюдается, отличается время формирования полуволн и отсутствуют осевые части гребней.

Для визуализации 3d вихревых структур течения используются изоповерхности функции β (мнимая часть двух комплексно сопряженных собственных значений тензора градиента скорости [4]). В двухцветной « $\beta+$ »-визуализации [1] полу-

волны окрашиваются двумя разными цветами при помощи знака фитой компоненты завихренности ($\text{rot } v_\varphi$) (Рис. 3а,в,III), где v – вектор скорости жидкости. Для « $\beta-$ »-визуализации [1][1] выводятся на экран только полуволны, для которых $\text{rot } v_\varphi < 0$ (Рис. 3б,III). В 2D-случае « $\beta+$ »-визуализация кроме полуволн показывает еще и зону блокировки перед квадратом и рециркуляционную зону сразу за квадратом (Рис. 3б,в,I), а также усложняет МФВВ2(2D, $\beta+$): «Каждые T_b около точки Q рядом друг с другом зарождаются два вихря $-3(k)$ и $-1(k)$ (осевые части гребня k), где k – чётное число».

МФВВ2(3D, $\beta+$) для диска

В 3D-случае сердцевины полуволн k и $-k$ за диском похожи на деформированные **полукольца**, **которые падают на точку Q** [1][1]. «Каждые T_b для каждого нечётного k у оси Z формируется вихревая петля $-k$, состоящая из нитей f_k и полукольца $-k$, на которое потом садится чётное полукольцо

($k + 1$). При этом нечетное полукольцо $-k$ сначала превращается в полукруг (Рис. 3б,III), а потом в кольцо (Рис. 3в,III)». Таким образом, при $X > 0$ и $T > 0$ в течение каждого $\Delta T = 1$ формируется новая внутренняя волна, состоящая из впадины k и гребня ($k + 1$), где k – нечётное число. Полукольцо $-k$ становится осевой частью гребня ($k + 1$). Осевые части гребней оказываются связанными друг с другом в цепочку нечетными нитями.

Список литературы

[1] Матюшин П.В. Формирование пространственных внутренних волн за телом,двигающимся в стратифицированной вязкой жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2023. № 4. С. 117–130.
 [2] Boussinesq J. Essai sur la thïorie des eaux courantes // Comptes rendus de l'Académie des Sciences. 1877. V. 23. P. 1–680.
 [3] Белоцерковский О.М., Гушин В.А., Коньшин В.Н. Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // Ж. вычислительной математики и математ. физики. 1987. Т. 27. № 4. С. 594–609.
 [4] Jeong J., Hussain F. On the identification of a vortex // J. Fluid Mech. 1995. V. 285. P. 69–94.

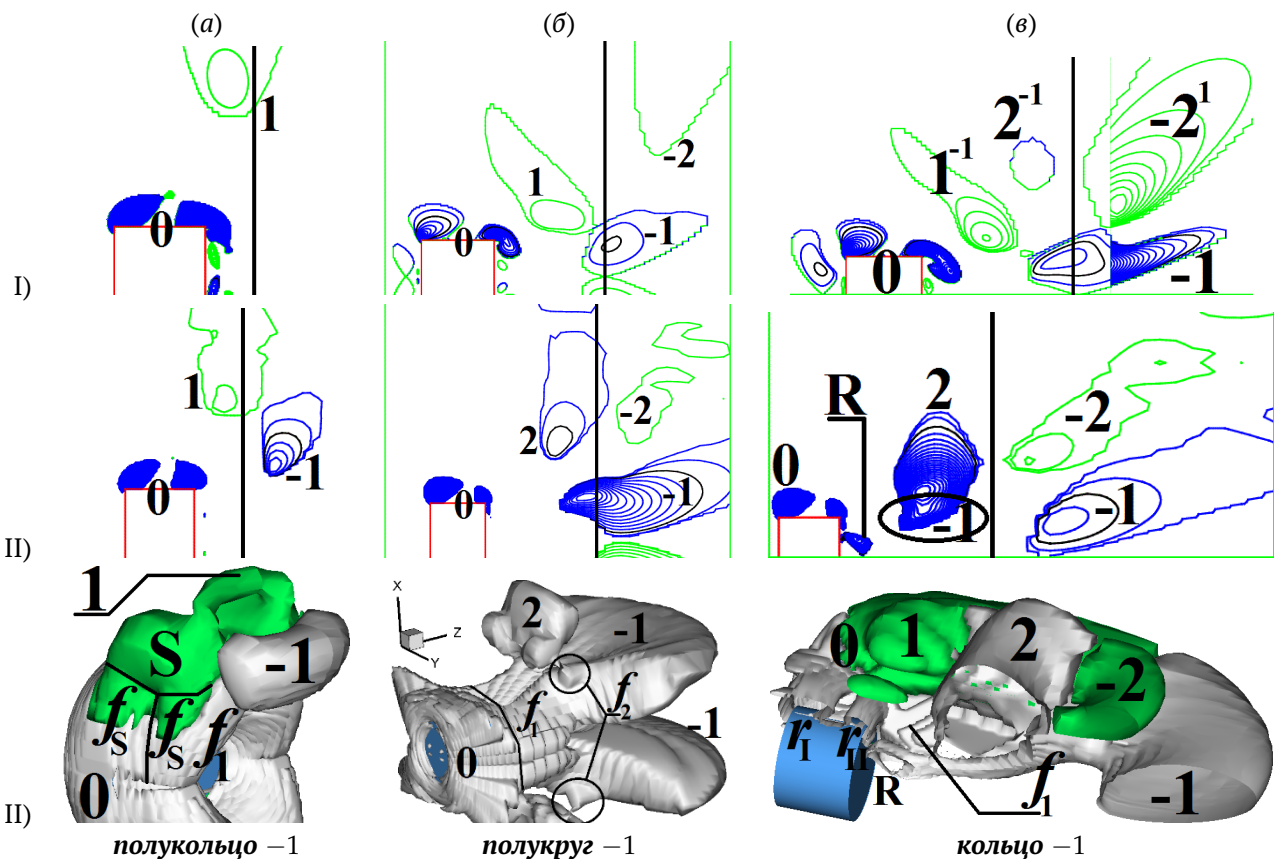


Рис. 3. Вихревая структура течения жидкости при $Fr = 0.3, Re = 50, T_b = 2\pi$ с около квадрата (I) и диска (II–III): а–в – изолинии $\beta+$ с шагами 0.01, 0.2, 0.1 и 0.01 при $T = 0.28, 0.8, 1.05$ (I) и 0.005, 0.01, 0.01 (в вертикальной плоскости $X - Z$) (II) и изоповерхности $\beta+ = \pm 0.0052, \beta- = 0.005, \beta+ = \pm 0.005$ (III) при $T = 0.28, 0.8, 1. S$ – боковая полуволна, f – нить, r – кольцевой вихрь вихревой оболочки следа $0, R$ – рециркуляционная область следа [1][1]