ISSN 2658–5782 Том 18 (2023), № 4, с. 280–282

Многофазные системы

http://mfs.uimech.org/2023/pdf/mfs2023.4.082.pdf
DOI: 10.21662/mfs2023.4.082

Получена: 15.09.2023
Принята: 10.11.2023

14-я международная конференция-школа «Волны и вихри в сложных средах» 2023

Взаимодействие пары вихрей в вязкой жидкости[1]

Остапец Р.Е.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва

Динамика завихренности играет ключевую роль в формировании турбулентных потоков. В связи с этим подробное изучение динамического поведения отдельных структурных элементов вихревых течений представляет значительный фундаментальный интерес. В данной работе проводится численное моделирование задачи о взаимодействии и слиянии двух плоских вихрей в вязкой несжимаемой жидкости. Эта задача, помимо фундаментального интереса, важна также для ряда гео- и астрофизических приложений.
В работе проведено сравнение численного решения задачи о слиянии двух плоских вихрей с экспериментами [3]. Выделены четыре качественно различных этапа взаимодействия вихрей и проведен их анализ.

Постановка задачи

Рассматриваются два плоских вихря, описываемых решением Ламба-Озеена и находящихся на расстоянии b_0 друг от друга в вязкой жидкости. Вихри имеют одинаковую циркуляцию Γ и одинаковый размер ядра a_0. Под размером ядра понимается расстояние от центра вихря (максимума ω) до локального минимума азимутальной скорости. На Рис. 1 показана начальная геометрия потока и система координат.

Движение несжимаемой вязкой однородной жидкости описывается системой уравнений Навье-Стокса:

$$\nabla \cdot v = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 v. \tag{2}$$

Здесь v — вектор скорости, P — давление, ρ — плотность жидкости, которая постоянна в несжимаемой жидкости, ν — кинематическая вязкость жидкости.

Применив оператором ротора к левой и правой частям уравнения (2), в случае двумерного течения получим уравнение переноса завихренности:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v \cdot \nabla \omega = \nu \nabla^2 \omega. \tag{3}$$

Уравнение (3) не содержит давления, это одно из основных преимуществ такого перехода. Вследствие уравнения неразрывности (1) можно ввести функцию тока ψ, такую, что

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Теперь мы можем записать завихренность в терминах функции тока: $\omega = -\nabla^2 \psi$. Итоговая система уравнений примет вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + v_y \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

[1] Работа выполнена по открытому плану Института механики МГУ.

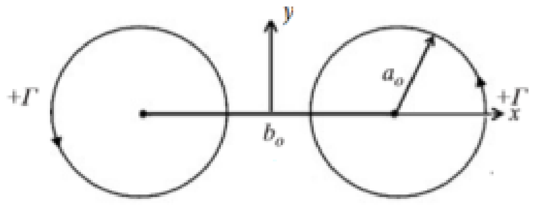

Рис. 1. Начальная геометрия потока

Полученная система содержит параболическое уравнения переноса завихренности и эллиптическое уравнение Пуассона для определения функции тока ψ.

Начальные и граничные условия

В начальный момент времени задаются поля скорости и завихренности, соответствующие суперпозиции соответствующих полей для двух вихрей Ламба-Озеена. Точным решением для такого вихря в начальный момент времени является такое распределение завихренности:

$$\omega = \frac{\Gamma}{\pi a^2} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right),$$

где r — координата, отсчитываемая от центра ядра вихря в начальный момент времени.

Считалось, что в начальный момент вихри Ламба-Озеена удалены друг от друга на расстояние b_0 и имеют одинаковую циркуляцию Γ и одинаковый размер ядра a_0.

На внешней, достаточно удаленной, границе расчетной области ставились мягкие граничные условия:

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0.$$

Результаты

Были проведены численные расчеты поставленной задачи конечно-разностным методом. Результаты численного решения задачи о слиянии двух вихрей сравнивались с экспериментальными данными [3].

На основании анализа численного решения получены следующие качественные результаты. Движение вихрей можно разбить на четыре стадии. На первой стадии, пока вихри удалены друг от друг, происходит их вращение друг относительно друга с постоянной угловой скоростью $\Omega = \Gamma/\pi b_0^2$. При этом их ядра увеличиваются, но расстояние b_0 остается постоянным. Переход ко второй стадии определяет критическое соотношение $(a/b)_c$ при достижении которого происходит быстрое уменьшение b. Вихри выбрасывают сгустки завихренности и начинают сливаться в один вихрь. В конце второй стадии слияние вихрей никогда не происходит полностью. Расстояние b не обращается в ноль и остается на значении, близком к 0,25. Это и определяет начало третьей стадии, на которой два вихря все еще имеют два отдельных максимума завихренности.

На заключительной четвертой стадии происходит окончательное слияние двух пиков завихренности в единый пик за счет диффузии завихренности.

На Рис. 2 и 3 представлены экспериментальная и рассчитанная картины взаимодействия пары вихрей. Видно, как два вихря приближаются друг к другу за счет конвекции, затем два мощных сгустка завихренности выбрасываются и сворачиваются вокруг общей точки вращения, а затем вихри сливаются в единое целое.

Число Рейнольдса вычислено по циркуляции скорости и кинематической вязкости. Динамика расстояния b/b_0, показанная на Рис. 4 позволяет увидеть четыре стадии слияния вихрей, описанные выше.

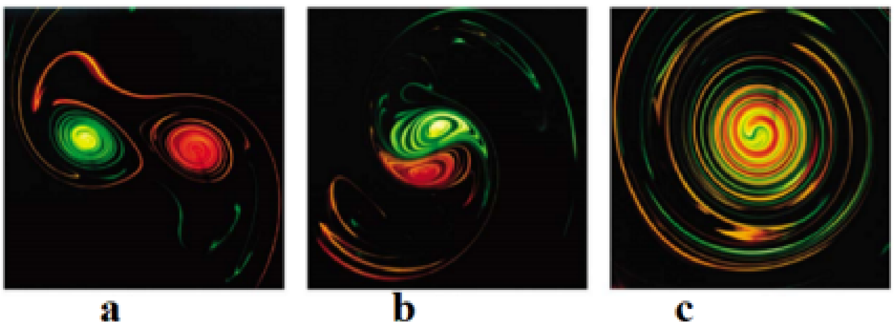

Рис. 2. Экспериментальная визуализация слияния двух вихрей при $Re = 2000, t(a) = 0.13, t(b) = 0.53, t(c) = 1.43$. Рисунок взят из статьи [3]

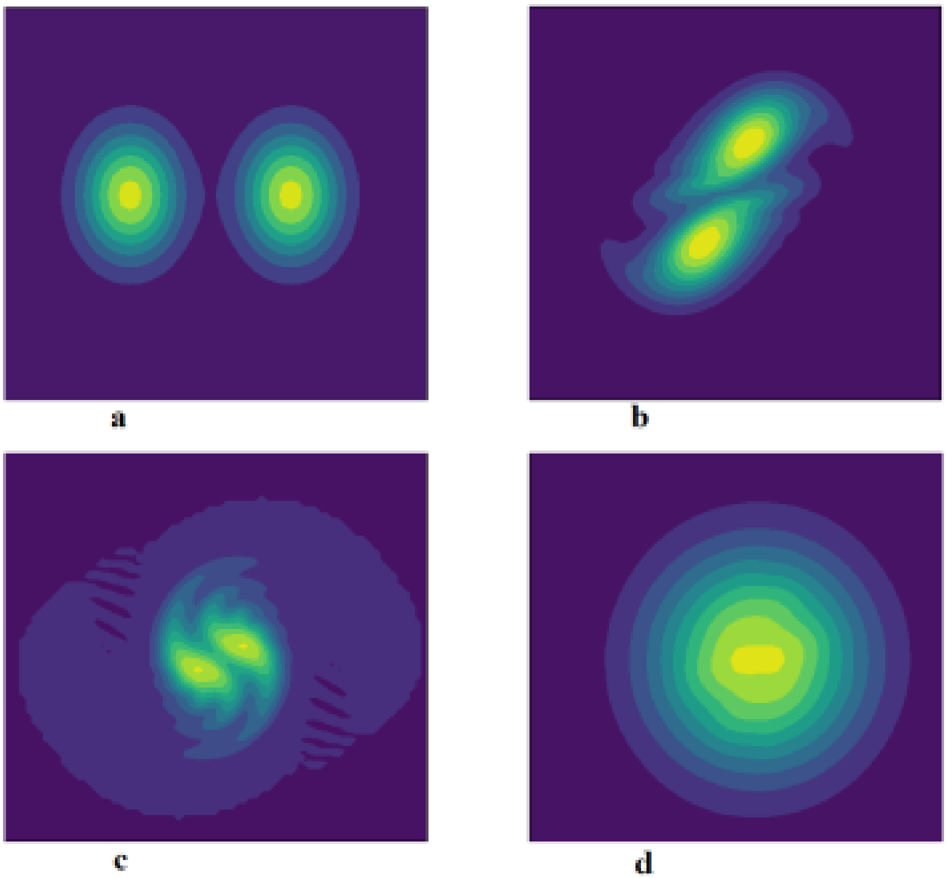

Рис. 3. Поля завихренности, полученные в настоящей работе путем численного решения при $a_0/b_0 = 0.15, Re = 2000, t(a) = 0, t(b) = 0.53, t(c) = 1.23, \ t(d) = 1.43$

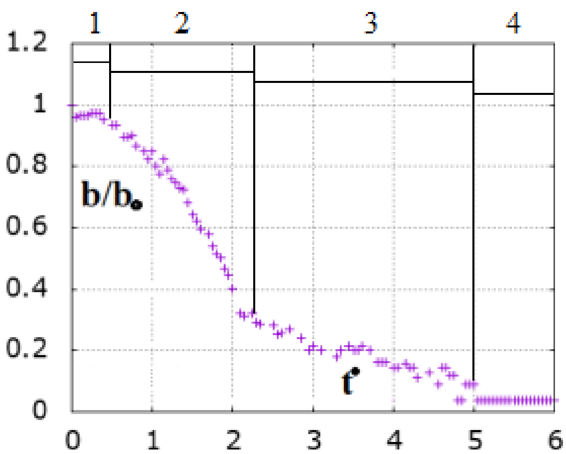

Рис. 4. Зависимость отношения b/b_0 от безразмерного времени.

В работе проанализированы этапы взаимодействия двух совместно вращающихся вихревых областей в вязкой жидкости. Анализ проведен в рамках модели двумерного течения, справедливой при не очень больших числах Рейнольдса. С увеличением числа Рейнольдса поток может стать трехмерным и картина взаимодействия вихрей может значительно усложниться.

Список литературы

[1] *Meunier P., Le Dizes S., Leweke T.* Physics of vortex merging // CR Physique. 2005.

[2] *Leweke T., Le Dizes S., Williamson C.* Dynamics and Instabilities of Vortex Pairs.

[3] *Meunier P.* Etude expérimentale de deux tourbillons corotatifs // Dynamique des Fluides. Université de Provence - Aix-Marseille I. 2001. Français.

[4] *Josserand Ch., Rossi M.* The merging of two co-rotating vortices: a numerical study // European Journal of Mechanics B/Fluids. 2007. V.26. p. 779–794.

[5] *Калиткин Н.Н., Альшина Е.А., Корякин П.В.* Численные методы // М.: Наука. 1978.