



ISSN: 2658–5782

Номер 4

2024

МНОГОФАЗНЫЕ СИСТЕМЫ

mfs.uimech.org





Характерные режимы истечения углеводородов при глубоководных авариях

С.Р. Кильдибаева, Э.И. Харисов, Э.Э. Суяргулова

Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Стерлитамак

E-mail: freya.13@mail.ru

Исследование утечек нефти, возникающих при аварийных глубоководных истечениях углеводородов из поврежденной скважины в случаях разработки месторождений в шельфе Мирового океана, имеет большое значение для безопасной добычи углеводородов. Для уменьшения времени ликвидации таких утечек важно понимать динамику распространения углеводородов: их траекторию, состав, температуру, скорость и т.д. В настоящей работе рассмотрены этапы течения углеводородов (нефть, газ, гидрат) для случаев их глубоководного истечения из поврежденной скважины; исследованы основные теплофизические зависимости, характерные координаты перехода этапов течения; проанализирована динамика изменения координаты перехода струи в шлейф в зависимости от начальных условий. Для расчетов использован модифицированный интегральный Лагранжевый метод контрольного объема.

Ключевые слова: углеводороды, затопленные струи

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 21-79-10227

Characteristic modes of hydrocarbon leakage during deep-water accidents

S.R. Kildibaeva, E.I. Kharisov, E.E. Suyargulova

Sterlitamak branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, Russia

E-mail: freya.13@mail.ru

Investigation of oil leaks that occur during emergency deep-water hydrocarbon outflows from a damaged well in cases of deposit development on the World Ocean shelf is of great importance for the safe production of hydrocarbons. To reduce the time required to eliminate those types of spills it is important to understand the hydrocarbon dispersion dynamics: trajectory, contents, temperature, velocity, etc. Article considers hydrocarbon flow (oil, gas, hydrate) for cases of their deep-water outflow from a damaged well, main thermophysical dependencies, typical stage transition coordinates, and coordinate change dynamics of transition of jet to plume depending on the initial conditions was analysed. Integral Lagrangian method of control volume was used for calculations.

Keywords: hydrocarbons, submerged jets

1. Введение

Разработка глубоководных залежей нефти в Мировом океане притягательна в связи с практически нетронутыми запасами добываемых углеводородов. Опасность такой добычи связана с высокой вероятностью загрязнения водной акватории в случае техногенной утечки. Нефть, поднимаясь на поверхность водоема, образует тонкую пленку, которая нарушает кислородный обмен, необходимый для живых организмов. В связи с этим необходимо не только предпринимать профилактические меры во избежание аварийных утечек, но и разрабатывать методы прогнозирования распространения углеводородов, что в случае аварии позволит сократить время ликвидации утечки. Одной из ключевых

особенностей глубоководных утечек является образование газогидратов, наличие которых существенно влияет на динамику течения и усложняет процесс транспортировки и хранения газа [1–5]. При разливе нефти в Мексиканском заливе при одной из крупнейших в истории добычи нефти техногенных катастроф [6] образование газогидратов не позволило установить железобетонный купол, который предназначен для устранения утечки. Газовые гидраты, накапливаясь внутри купола, придавали куполу нежелательную плавучесть и не позволяли закрепить устройство.

В [4, 5, 7] было выполнено математическое моделирование работы устройства, предназначенного для ликвидации разлива. Для прогнозирования масштабов

загрязнения водоемов нефтепродуктами необходимо исследовать особенности углеводородных течений: траекторию, скорость распространения, температуру, фазовые превращения, сопровождающие гидратообразование и т.д. Для этого необходимо рассмотреть этапы миграции углеводородов от источника (поврежденная скважина или трубопровод) до поверхности водоема.

Ранее в работах [8–10] были рассмотрены особенности течения многофазных затопленных струй на начальном этапе. В [8] представлена математическая модель течения с двумя предельными схемами гидратообразования, в работе [9] приводятся основные результаты лабораторного эксперимента по изучению траектории струи дизельного топлива. В исследовании [10] рассмотрена трехмерная визуализация течения углеводородов. Целью настоящей работы является исследование процесса перехода струйного этапа течения в шлейфовое.

2. Постановка задачи

Течение углеводородов определяется следующими начальными условиями: радиус источника истечения r , объемный расход поступающих углеводородов (нефть и газ), теплофизические характеристики окружающей среды и поступающих из источника углеводородов.

Для прогнозирования масштабов загрязнения водоемов нефтью необходимо рассмотреть три этапа течения углеводородов: турбулентная струя (jet), плюм (plume) и капельно-пузырьковый режим (схема течения представлена на рис. 1). Введем координату z_{jp} , характеризующую границу раздела между областью струйного течения, в которой доминирует начальный импульс потока (этап 1) и областью шлейфоподобного течения, в которой доминирует плавучесть (этап 2). То есть удельный импульс силы плавучести начинает превышать начальный удельный импульс струи. Согласно работам [11, 12] z_{jp} определяется следующим образом:

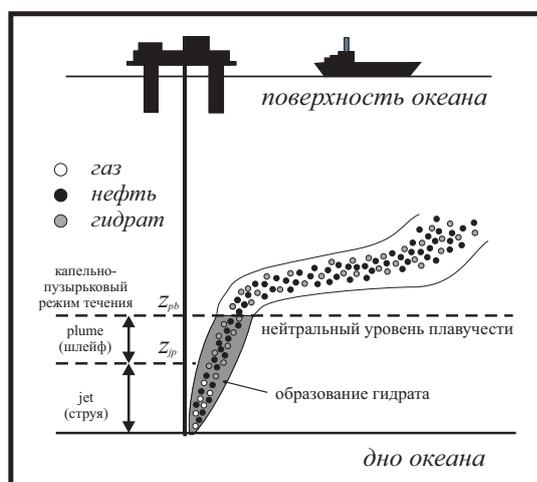


Рис. 1. Этапы течения струи: z_{jp} — координата перехода струи в шлейф; z_{pb} — координата перехода шлейфа в пузырьково-капельный режим

$$z = \frac{M_0^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{J_0}} \quad (1)$$

где $M_0 = u_0^2 a_0$ — поток импульса; u_0 — скорость у источника (начальная); a_0 — площадь поперечного сечения трубы; $J_0 = u_0 a_0 g'$ — поток плавучести у источника; $g' = \frac{(\rho_c - \rho_d)}{\rho_c} g$ — приведенное ускорение силы тяжести; ρ_c и ρ_d — плотность сплошной и дисперсной фаз соответственно; g — ускорение силы тяжести.

Формула (1) описывает миграцию углеводородов в стоячей воде, когда подводное течение отсутствует. На третьем этапе течения плотность и скорость распространения шлейфа становятся постоянными. Таким образом, выше координаты z_{pb} вовлечение окружающей воды в течение не происходит, а компоненты шлейфа (капли нефти, пузырьки газа, гидратные частицы) мигрируют независимо.

Для моделирования течения углеводородов на этапах турбулентной струи и шлейфа использован модифицированный интегральный Лагранжевый метод контрольного объема (ИЛМКО) [8, 13–16], согласно которому течение углеводородов описывается миграцией элементарных контрольных объемов цилиндрической формы. Моделирование течения углеводородов методом ИЛМКО подробно описано в работах [8, 10].

3. Результаты вычислительных экспериментов и анализ критического значения координаты перехода этапов 1 и 2

Расчеты проводились для следующих начальных параметров: $P = 15$ МПа, радиус скважины $r_0 = 0.1$ м, $\rho_0 = 650$ кг/м³, $\rho_n = 910$ кг/м³, $\rho_w = 1030$ кг/м³, $a_g = 10^{-3}$ м, $Q_g^e = 0.5$ м³/с, $Q_0^e = 0.5$ м³/с.

На рис. 2 представлены границы и осевая линия струи и шлейфа (а) и зависимости скорости течения от вертикальной координаты (б). Рассмотрен случай когда течение отсутствует. Координаты перехода между этапами струи и шлейфа: $z_{jp} = 3.23$ м, а также между этапами шлейфа и капельно-пузырькового режима $z_{pb} = 13.27$ м.

Рассмотрим динамику изменения координаты раздела для этапов течения струи и шлейфа при различных начальных условиях. Для расчета использовано уравнение (1). Начальные объемные расходы соответствуют значениям $Q_g^e = 0.01$ м³/с, $Q_0^e = 0.01$ м³/с, диаметр источника $d = 0.2$ м. На рис. 3 представлена зависимость отношения z_{jp}/d (координаты раздела двух этапов течения к диаметру источника) от Q (общий объемный расход нефти и газа). С целью определения влияния массового содержания компонент струйного течения на динамику миграции углеводородов и перехода струйного течения в шлейфовое была проведена серия вычислительных экспериментов. В первом случае изменялся начальный объемный расход газа (белые символы). Было проведено 10 вычислительных экспери-

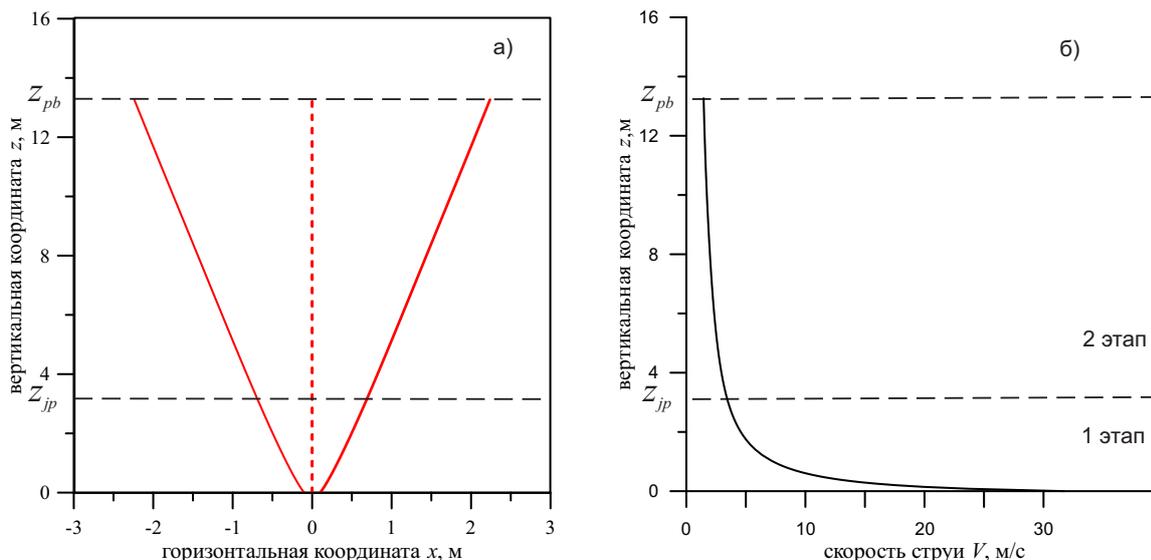


Рис. 2. Границы и осевая линия струи и шлейфа при отсутствии течения (а), зависимость скорости углеводородов от вертикальной координаты для первых двух этапов течения (б)

ментов, каждый раз начальный объемный расход газа увеличивался на 20 %. Во втором случае аналогично изменялся начальный объемный расход нефти (черные символы). Из графика видно, что зависимость z_{jp}/d от Q имеет линейный характер, однако, в случае, когда изменялся объемный расход газа (белые символы), координата раздела растет интенсивнее. Это связано с более высокой скоростью миграции углеводородов (эта зависимость представлена на рис. 4).

4. Заключение

В работе рассмотрены этапы течения углеводородов, которые возникают при аварийных глубоководных истечениях из поврежденной скважины: турбулентная струя, шлейф, капельно-пузырьковый режим. Получены траектория течения углеводородов для случая отсутствия течения и зависимость скорости миграции углеводородов от вертикальной координаты для этапов 1 и 2 течения. Проанализирована динамика изменения координаты перехода струйного течения в шлейфовое в зависимости от начальных условий и состава течения.

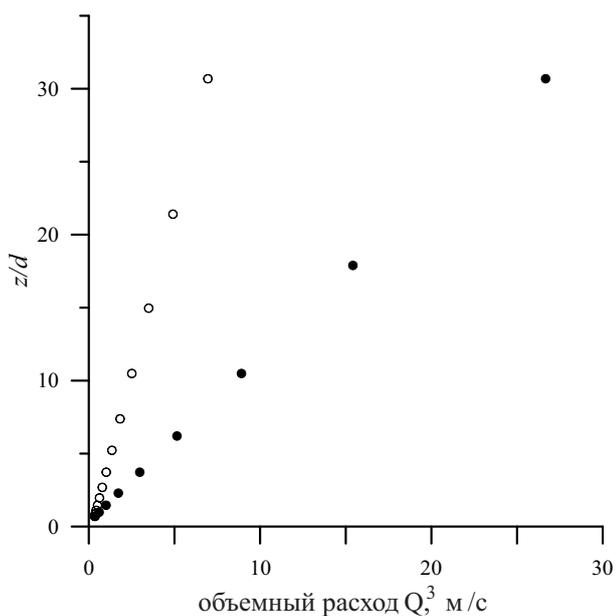


Рис. 3. Зависимость отношения координаты раздела этапов к диаметру источника от объемного расхода

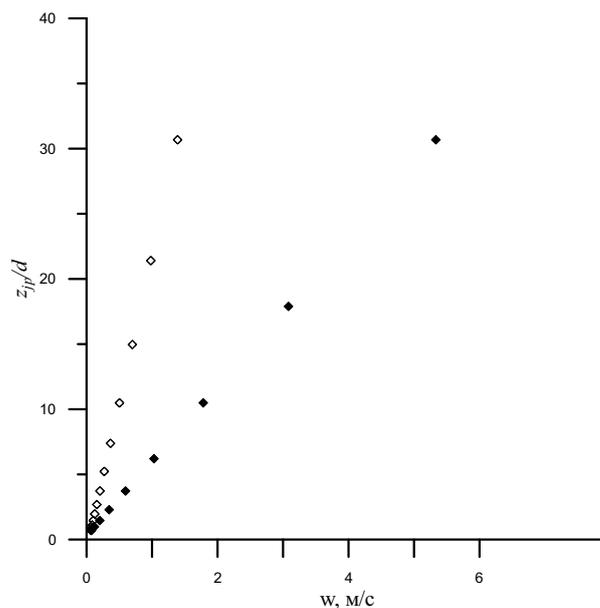


Рис. 4. Зависимость z_{jp}/d от скорости

Список литературы / References

- [1] Бондарев Э.А., Рожин И.И., Аргунова К.К. Обобщенная математическая модель образования гидратов в магистральных газопроводах // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60, № 3(355). С. 120–127.
DOI: [10.15372/PMTF20190312](https://doi.org/10.15372/PMTF20190312)
Bondarev E.A., Rozhin I.I., Argunova K.K. Generalised Mathematical Model of Hydrate Formation in Main Gas Pipelines // Applied Mechanics and Technical Physics. 2019. Vol. 60 (3). Pp. 503–509.
DOI: [10.1134/S002189441903012X](https://doi.org/10.1134/S002189441903012X)
- [2] Рожин И.И., Иванов Г.И. Моделирование образования гидратных пробок при совместной работе газоносного пласта и скважины для случая зависимости равновесных условий гидратообразования от состава пластовых вод // Прикладная механика и техническая физика. 2023. Т. 64, № 2(378). С. 127–142.
Rozhin I.I., Ivanov G.I. Modelling of hydrate plug formation during joint operation of gas-bearing reservoir and well for the case of dependence of equilibrium conditions of hydrate formation on the composition of formation water // Applied Mechanics and Technical Physics. 2023. V. 64, No. 2(378). Pp. 127–142 (In Russian).
DOI: [10.15372/PMTF202215120](https://doi.org/10.15372/PMTF202215120)
- [3] Мусакаев Н.Г., Уразов Р.Р., Шагапов В.Ш. Динамика образования гидратов при транспортировке природного газа // Теплофизика и аэромеханика. 2006. Т. 13, № 2. С. 295–302.
EDN: [hvuvkq](https://www.edn.ru/hvuvkq)
Musakaev N.G., Urazov R.R., Shagapov V.Sh. Hydrate formation kinetics in piped natural-gas flows // Thermophysics and Aeromechanics. 2006. Vol. 13, No. 2. Pp. 275–281.
DOI: [10.1134/S0869864306020090](https://doi.org/10.1134/S0869864306020090)
- [4] Уразов Р.Р., Чиглинцев И.А., Насыров А.А. Образование склеротических отложений гидрата в трубе для отбора газа из купола-сепаратора // Инженерно-физический журнал. 2017. Т. 90, № 5. С. 1223–1231.
DOI: [10.1007/s10891-017-1670-2](https://doi.org/10.1007/s10891-017-1670-2)
Urazov R.R., Chiglintsev I.A., Nasyrov A.A. Formation of Sclerotic Hydrate Deposits in a Pipe for Extraction of a Gas from a Dome Separator // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2017. Vol. 90, No. 5. Pp. 1162–1169.
DOI: [10.1007/s10891-017-1670-2](https://doi.org/10.1007/s10891-017-1670-2)
- [5] Chiglintsev I.A., Nasyrov A.A. Modeling of the process of filling a dome separator with the decomposition of a gas hydrate formed during the mounting of the installation // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2016. V. 89, No. 4. Pp. 854–863.
DOI: [10.1007/s10891-016-1446-0](https://doi.org/10.1007/s10891-016-1446-0)
- [6] Sammarco P.W., Kolian S.R., Warby R.A.F., Bouldin J.L., Subra W.A., Porter S.A., Distribution and concentrations of petroleum hydrocarbons associated with the BP/Deepwater Horizon Oil Spill, Gulf of Mexico // Marine Pollution Bulletin. 2013. V. 73, No. 1. Pp. 129–143.
DOI: [10.1016/j.marpolbul.2013.05.029](https://doi.org/10.1016/j.marpolbul.2013.05.029)
- [7] Кильдибаева С.Р., Столповский М.В. Этапы накопления капель нефти и пузырьков газа в куполе для случаев глубоководных разливов: часть 1 // Электронный научный журнал Нефтегазовое дело. 2023. № 6. С. 57–75.
Kildibaeva S.R., Stolpovsky M.V. Stages of Accumulation of Oil Droplets and Gas Bubbles in the Dome for Cases of Deep-Sea Spills: Part 1 // Oil and Gas Business. 2023. No. 6. Pp. 57–75. (in Russian)
DOI: [10.17122/ogbus-2023-6-57-75](https://doi.org/10.17122/ogbus-2023-6-57-75)
- [8] Кильдибаева С.Р., Гималтдинов И.К. Динамика многофазной затопленной струи с учетом образования гидратов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Т. 1, № 3. С. 92–101.
Kildibaeva S.R., Gimaltdinov I.K. Dynamics of multiphase flooded jet with consideration of hydrate formation // Bulletin of Tyumen State University. Physico-mathematical modelling. Oil, gas, energy. 2015. Vol. 1, No. 3. Pp. 92–101 (In Russian).
EDN: [vvrhnz](https://www.edn.ru/vvrhnz)
- [9] Kildibaeva S.R., Gimaltdinov I.K., Kharisov E.I. Conduction of a Laboratory Experiment with the Goal of Researching Submerged Flow Peculiarities // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2022. V. 988. Pp. 042049.
DOI: [10.1088/1755-1315/988/4/042049](https://doi.org/10.1088/1755-1315/988/4/042049)
- [10] Кильдибаева С.Р., Харисов Э.И. Трехмерная визуализация модели течения многофазной затопленной струи // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2023. Т. 16, № 1. С. 69–80.
Kildibaeva S.R., Kharisov E.I. Three-Dimensional visualization of the submerged jet flow model // Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2023. Vol. 16. No. 1. Pp. 69–80. (in Russian)
DOI: [10.14529/mmp230106](https://doi.org/10.14529/mmp230106)
- [11] Daskiran C., Cui F., Boufadel M.C., Zhao L., Socolofsky S.A., Ozgokmen T. Hydrodynamics and dilution of an oil jet in crossflow: The role of small-scale motions from laboratory experiment and large eddy simulations // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2020. V. 85. P. 108634.
DOI: [10.1016/j.ijheatfluidflow.2020.108634](https://doi.org/10.1016/j.ijheatfluidflow.2020.108634)
- [12] Lee J.H.W., Chu V.H. Turbulent jets and plumes – a Lagrangian approach. Kluwer, 2003. 390 p.
- [13] Yapa P.D., Dasanayaka L.K., Bandara U.C., Nakata K. A model to simulate the transport and fate of gas and hydrates released in deepwater // Journal of Hydraulic Research. 2010. V. 48(5). Pp. 559–572.
DOI: [10.1080/00221686.2010.507010](https://doi.org/10.1080/00221686.2010.507010)
- [14] Zheng L., Yapa P.D., Chen F. A model for simulating deepwater oil and gas blowouts – part I: theory and model formulation // Journal of Hydraulic Research. 2002. V. 41, No. 4. Pp. 339–351.
DOI: [10.1080/00221680309499980](https://doi.org/10.1080/00221680309499980)
- [15] Yapa P.D., Li Z. Simulation of oil spills from underwater accidents I: Model development // Journal of Hydraulic Research. 1997. V. 5(5). Pp. 673–688.
DOI: [10.1080/00221689709498401](https://doi.org/10.1080/00221689709498401)
- [16] Chen F., Yapa P.D. Modeling gas separation from a bent deepwater oil and gas jet/plume // Journal of Marine Systems. 2004. No. 45. Pp. 189–203.
DOI: [10.1016/j.jmarsys.2003.11.005](https://doi.org/10.1016/j.jmarsys.2003.11.005)

Сведения об авторах / Information about the Authors

Светлана Рустамовна Кильдибаева

канд. физ.-мат. наук, доцент
Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Стерлитамак, Россия

Эмиль Ирекович Харисов

Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Стерлитамак, Россия

Svetlana Rustamovna Kildibaeva

Ph.D. (Phys. & Math.), Assist. Prof.
Sterlitamak branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, Russia
freya.13@mail.ru
ORCID: [0000-0001-9586-8926](https://orcid.org/0000-0001-9586-8926)

Emil Irekovich Kharisov

Sterlitamak branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, Russia
e.i.harisov@strbsu.ru

Элина Эдуардовна Суяргулова

Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Стерлитамак, Россия

Elina Eduardovna Suyargulova

Sterlitamak branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, Russia
17elinushka17@gmail.com



Исследование возмущения давления в пласте и в трещине ГРП при собственных колебаниях столба жидкости в скважине

З.З. Мамаева

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

E-mail: zilia16@mail.ru

На сегодняшний день добыча нефти является сложным и высокотехнологичным процессом, который постоянно развивается и совершенствуется. Одной из актуальных проблем в нефтяной отрасли является снижение дебита большинства добывающих скважин и, как следствие, увеличение добычи трудноизвлекаемых запасов и необходимость проведения работ по обработке призабойной зоны с целью улучшения ее коллекторских характеристик, например, создание трещин гидравлического разрыва пласта. Данные процессы требуют исследования состояния пластов и получения информации о геометрии трещины. В настоящей работе представлен один из возможных методов исследования пластов и трещин гидравлического разрыва пласта, основанный на возбуждении собственных колебаний столба жидкости в скважине и анализе волновых характеристик колебаний. На основе теоретической модели собственных колебаний столба жидкости, полученных вследствие гидравлического удара, изучено влияние проводимости трещины гидравлического разрыва пласта на возмущения давления в пласте и в самой трещине. Выполнен анализ зависимости давления от времени и изменения амплитуды колебаний давления в различных точках пласта и трещины гидравлического разрыва пласта.

Ключевые слова: скважина, нефть, гидроудар, собственные колебания жидкости, частота колебаний, коэффициент и декремент затухания

Работа выполнена в рамках государственного задания № 124030400064-2 (FMRS-2024-0001)

Study of pressure disturbance in the reservoir and in the hydraulic fracture during natural oscillations of the liquid column in the well

Z.Z. Mamaeva

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

E-mail: zilia16@mail.ru

Today, oil production is a complex and high-tech process that is constantly evolving and improving. One of the pressing problems in the oil industry is the decline in the flow rate of most production wells and, as a consequence, an increase in the production of hard-to-recover reserves and the need to process the bottomhole zone in order to improve its reservoir characteristics, for example, creating hydraulic fracturing (HF) cracks. These processes require studying the state of the formations and obtaining information about the fracture geometry. This paper presents one of the possible methods for studying formations and HF cracks based on the excitation of natural oscillations of a liquid column in a well and the analysis of the wave characteristics of the oscillations. Based on a theoretical model of natural oscillations of a liquid column obtained as a result of a hydraulic shock, the effect of the conductivity of a hydraulic fracturing crack on pressure disturbances in the formation and the crack itself was studied. An analysis was made of the dependence of pressure on time and changes in the amplitude of pressure oscillations at various points in the formation and HF crack.

Keywords: well, oil, hydraulic shock, natural oscillations of liquid, oscillation frequency, damping coefficient and decrement

1. Введение

В настоящее время в нефтегазовой промышленности наблюдается снижение разработки месторождений с традиционными запасами нефти и газа, увеличивается доля трудноизвлекаемых источников углеводородов. Для извлечения нетрадиционных углеводородов необ-

ходимым является комплекс мер, важной частью которого считается исследование пластов и получение информации о физических характеристиках коллекторов. Одним из основных методов геофизических исследований скважин и пластов являются акустические методы, которые применяются для выявления и оценки запасов углеводородного сырья, а также контроля и анализа при

разработке, эксплуатации нефтегазовых месторождений и мониторинга технического состояния скважин. Многие исследователи изучают воздействие акустических волн на горные породы, скважину и призабойную зону с целью получения необходимой информации о коллекторских характеристиках пластов и техническом состоянии скважин.

Авторами статьи [1] представлены промышленные исследования воздействия упругими волнами на пласт с целью повышения продуктивности скважины. Упругие волны возбуждались проточными излучателями, которые были установлены на концах насосно-компрессорных труб (НКТ) в нагнетательных скважинах на уровне продуктивного пласта на протяжении шести месяцев. По окончании эксперимента удалось выявить повышение дебита скважин и снижение обводненности добываемой продукции. Полученный эффект возможно сохранить в течение нескольких месяцев.

В статье [2] рассмотрена задача локального акустического зондирования участка скважины с перфорацией. Изучен метод, позволяющий определить влияние качества вскрытия скважины при использовании радиальной перфорации на динамику акустических импульсов жидкости, находящейся между стенками зонда и скважины.

В ряде работ [3–6] представлено исследование динамики распространения импульса в трубопроводе с учетом фильтрации флюида в пористую среду через поврежденные участки, представленные в виде трещин. Дана оценка влияния проводимости перпендикулярной трещины гидравлического разрыва пласта (ГРП) на динамику сигнала акустического «телевизора». Установлено, что при помощи данного метода возможно обнаружить ГРП трещины (проводимости $10^{-13} \div 10^{-10} \text{ м}^3$) по прошедшему или отраженному сигналам.

В работе Andsager R. L., Knapp R. M. [7] представлен метод акустического прогнозирования уровня жидкости в газовых скважинах. Звуковая волна, генерируемая в устье скважины, отражается от поверхности жидкости; расстояние до поверхности жидкости определяется по времени отражения звуковой волны и скорости звуковой волны в системе природного газа. Таким образом, влияние акустических волн в нефтегазовой отрасли имеет достаточно значимую роль как при добыче углеводородов, так и при разработке месторождений и повышении их продуктивности.

В настоящей статье представлено теоретическое исследование одного из возможных акустических методов исследования пластов и трещин ГРП, основанный на возникновении собственных колебаний столба жидкости в скважине. Отметим, что анализ волновых характеристик собственных колебаний несет важную информацию о параметрах пласта, трещины ГРП и техническом состоянии самой скважины. На основе полученной математической модели в работе [8] получены новые численные результаты, описывающие возмущение давления в пласте и трещине ГРП для различных случаев.

2. Возмущение давления в пласте и в трещине ГРП

В настоящей статье представлены численные результаты, полученные с использованием математической модели из [8], в предположении, что вертикальная нефтяная скважина заполнена жидкостью, а именно, водой, на устье движение жидкости ограничено тяжелой крышкой. В начальный момент времени жидкость находится в покое. Подвергаясь некоторым воздействиям, например, резкой остановке насосов, жидкость в скважине начинает колебаться в системе «скважина–трещина ГРП–пласт» (рис. 1).

В работе [8] получены выражения для возмущения давления в пласте и трещине ГРП в виде:

$$P_p = c_1 \cos(kl) \frac{K_0(rq_p)}{K_0(aq_p)} e^{i\omega t},$$

$$P_f = c_1 \cos(kl) e^{-iK_f x} e^{i\omega t},$$

где $q_p = \sqrt{\omega/\chi_p}$; $K_f = \sqrt{\chi_f \sqrt{i\omega}}$; $K_0(x) = \int_0^\infty e^{-xch\xi} d\xi$ — функция Макдональда нулевого порядка; $\omega = \Omega + i\delta$ — комплексная частота собственных колебаний; Ω — круговая частота; δ — коэффициент затухания; $k^2 = (1 + 2/b)\omega^2/C^2$ — комплексное волновое число; — скорость звука в среде; $b = \sqrt{i\omega a_c^2/\nu}$; $\chi_f = \frac{k_f \rho_0 C^2}{m_f \mu}$, k_f — проницаемость трещины ГРП.

Далее, на основе математической модели получено трансцендентное уравнение для нахождения комплексной собственной частоты:

$$\text{tg}(kl) = \left(\frac{a}{a_c}\right)^2 l_p k \left(\frac{2m}{a q_p} \frac{K_0'(aq_p)}{K_0(aq_p)} - \frac{2m_f d_f i K_f}{\pi(aq_f)^2} - 1\right),$$

где $q_p = \sqrt{i\omega/\chi_p}$; $q_f = \sqrt{i\omega/\chi_f}$; a — радиус обсадной колонны скважины; a_c — радиус НКТ; l_p — протяженность открытого участка скважины; m — пористость пласта; m_f — пористость материала в трещине; d_f — ширина трещины.

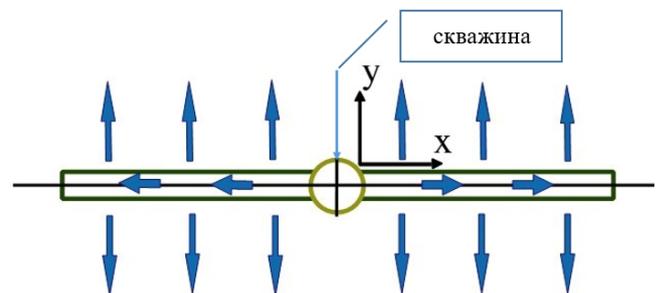


Рис. 1. Схема фильтрации жидкости по трещине и в пласте

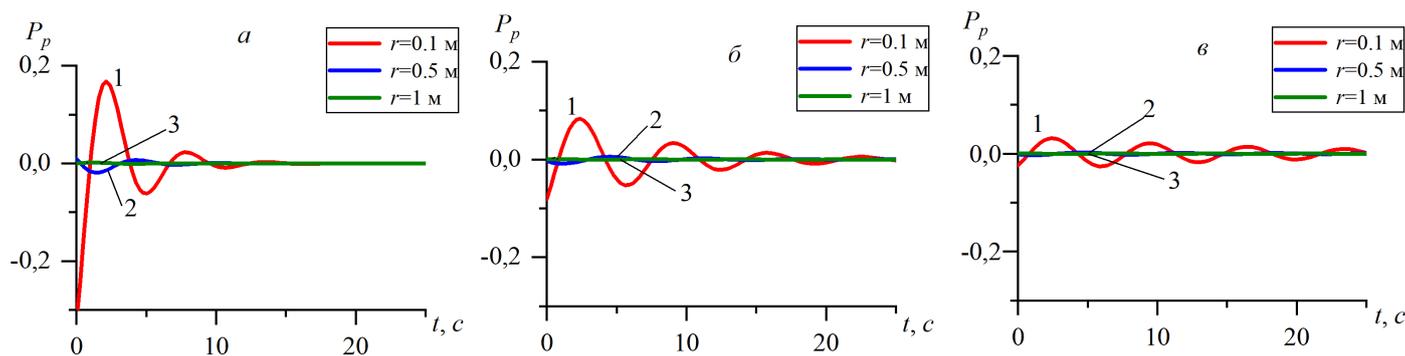


Рис. 2. Зависимости возмущения давления от времени для различных точек пласта: 1 – $r = 0.1$ м, 2 – $r = 0.5$ м, 3 – $r = 1$ м при значениях параметра проводимости трещины: а) $C_f = 5 \cdot 10^{-13} \text{ м}^3$, б) $C_f = 5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^3$, в) $C_f = 5 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3$

При получении численных расчетов будем полагать, что решение для закона изменения давления в скважине определено с точностью до произвольного постоянного множителя c_1 , т.е. распределение давления нормировано относительно значения при $z = 0$ и вместо P будем использовать нормированное значение при $c_1 = 1$:

$$P_p = \cos(kl) \frac{K_0(rq_p)}{K_0(aq_p)} e^{i\omega t},$$

$$P_f = \cos(kl) e^{-iK_f x} e^{i\omega t}.$$

Численные результаты получены в предположении, что в скважине находится вода со следующими параметрами: $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $C = 1500 \text{ м/с}$, $\mu = 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$. Для скважины и пласта принято: $a_c = 0.035 \text{ м}$, $a = 0.0775 \text{ м}$, $l = 2600 \text{ м}$, $l_p = 20 \text{ м}$, $m_p = 0.1$. Для трещины гидроразрыва: $m_f = 0.02$, $C_f = d_f \cdot k_f$, где C_f – проводимость трещины ГРП.

На основе указанных решений в настоящей статье приведены численные расчеты для возмущений давления в пласте и трещине ГРП.

На рис. 2(а),(б),(в) проиллюстрирована зависимость возмущения давления от времени затухания в

пласте для различных расстояний от забоя скважины: $r = 0.1 \text{ м}$, $r = 0.5 \text{ м}$, $r = 1 \text{ м}$.

Показано, что для низкой проводимости трещины ГРП на графиках наблюдается более высокая амплитуда колебаний, которая с увеличением параметра проводимости трещины заметно снижается. Таким образом, с увеличением проводимости трещины уменьшается амплитуда колебаний и растет время затухания колебаний во всех трех точках пласта.

На рис. 3(а),(б),(в) показана динамика возмущения давления на различных расстояниях в трещине ГРП, а именно: 1 м, 15 м, и 30 м.

Видно, что рост значения проводимости трещины ГРП приводит к увеличению времени затухания колебаний и снижению амплитуды во всех трех рассматриваемых точках трещины. Заметим, что для высокой проводимости трещины, а именно, для $C_f = 5 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3$, различия между значениями амплитуды и периодом колебаний для точек трещины $x = 1, 15, 30 \text{ м}$ минимальны. Также отметим, что с увеличением расстояния наблюдается рост амплитуды колебаний в диапазоне проводимости трещины $10^{-15} \div 10^{-11} \text{ м}^3$.

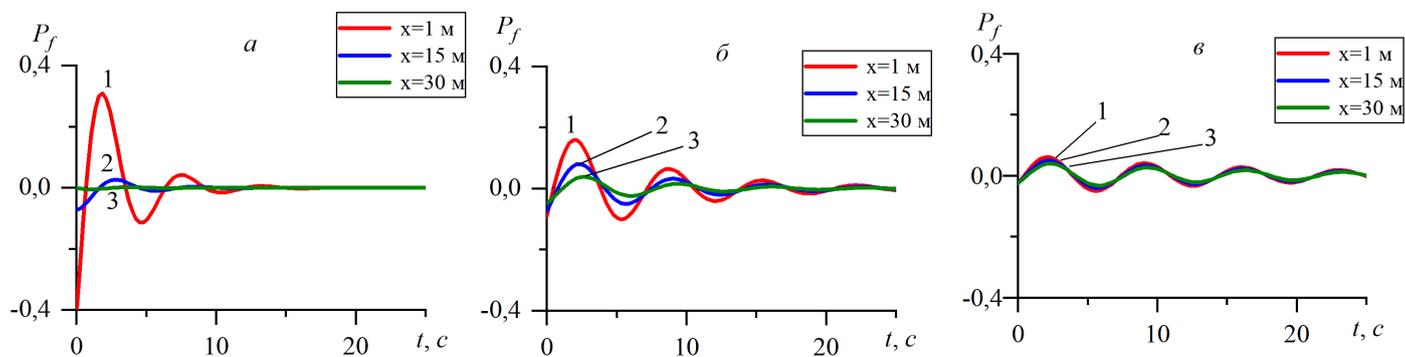


Рис. 3. Зависимость давления от времени в различных точках трещины ГРП: 1 – $x = 1$ м, 2 – $x = 15$ м, 3 – $x = 30$ м при значениях коэффициента проводимости трещины: а) $C_f = 5 \cdot 10^{-13} \text{ м}^3$, б) $C_f = 5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^3$, в) $C_f = 5 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3$

3. Заключение

На основе математической модели получены новые численные результаты, описывающие динамику возмущения давления в пласте и трещине ГРП. Рассмотрена зависимость давления от времени для различной проводимости трещины ГРП в определенных точках пласта и трещины. Установлено, что с ростом проводимости трещины в диапазоне $10^{-15} \div 10^{-11} \text{ м}^3$ амплитуда возмущения давления в пласте снижается и тем самым уменьшается время затухания колебаний. Для колебаний в трещине в данном диапазоне проводимости в случаях $x = 15 \text{ м}$ и $x = 30 \text{ м}$ заметно растут амплитуда и время затухания возмущений.

Список литературы / References

- [1] Марфин Е.А., Кравцов Я.И., Абдрашитов А.А., Гатауллин Р.Н. Промысловые испытания волнового воздействия на процесс добычи нефти на Первомайском месторождении // Георесурсы. 2014. № 2(57). С. 14–16.
Marfin E.A., Kravtsov Ya.I., Abdrashitov A.A., Gataullin R.N. Field Tests of Wave Action on Oil Production in the Pervomaysky Field. // Georesources [Georesources]. 2014. No. 2(57). Pp. 14–16. (in Russian)
DOI: [10.18599/grs.57.2.3](https://doi.org/10.18599/grs.57.2.3)
- [2] Шагапов В.Ш., Хусаинов И.Г., Ишмухаметова А.А. К теории акустического зондирования перфорированной скважины // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. 2007. № 6. С. 42–48.
Shagapov V.Sh., Khusainov I.G., Ishmukhametova A.A. On the theory of acoustic sounding of a perforated well // News of higher educational institutions. Oil and gas. 2007. No. 6. Pp. 42–48 (in Russian).
EDN: [umgmnq](https://www.edn.ru/umgmnq)
- [3] Галиакбарова Э.В., Хакимова З.Р. Акустическое сканирование трубчатых каналов с узкими трещинами // Вестник Башкирского университета. 2017. Т. 22, № 3. С. 590–596.
Galiakbarova E.V., Khakimova Z.R. Acoustic scanning of tubular channels with narrow cracks // Bulletin of the Bashkir University. 2017. Vol. 22, No. 3. Pp. 590–596 (in Russian).
EDN: [yvlblz](https://www.edn.ru/yvlblz)
- [4] Шагапов В.Ш., Галиакбарова Э.В., Хусаинов И.Г., Хакимова З.Р. Акустическое сканирование поврежденных трубопроводов, находящихся в грунте // Прикладная механика и техническая физика. 2018. Т. 59, № 4. С. 169–178.
DOI: [10.15372/PMTF20180420](https://doi.org/10.15372/PMTF20180420)
Shagapov V.Sh., Galiakbarova E.V., Khusainov I.G., Khakimova Z.R. Acoustic Scanning of Damaged Pipelines in Soil // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2018. Vol. 59, No. 4. Pp. 724–732.
DOI: [10.1134/S002189441804020X](https://doi.org/10.1134/S002189441804020X)
- [5] Шагапов В.Ш., Галиакбарова Э.В., Хакимова З.Р. Эволюция акустических импульсов в поврежденных подземных трубопроводах // Ученые записки казанского университета. Серия физико-математические науки. 2021. Т. 163, № 1. С. 48–58.
Shagapov V.Sh., Galiakbarova E.V., Khakimova Z.R. Evolution of acoustic pulses in damaged underground pipelines // Scientific Notes of Kazan University. Series: Physical and Mathematical Sciences. 2021. V. 163, No. 1. Pp. 48–58 (in Russian).
DOI: [10.26907/2541-7746.2021.1.48-58](https://doi.org/10.26907/2541-7746.2021.1.48-58)
- [6] Шагапов В.Ш., Галиакбарова Э.В., Хакимова З.Р. К теории акустического сканирования поврежденных подземных трубопроводов // Акустический журнал. 2021. Т. 67, № 6. С. 583–594.
Shagapov V.Sh., Galiakbarova E.V., Khakimova Z.R. On the Theory of Acoustic Scanning of Underground Pipeline Damage // Acoustic Journal. 2021. V. 67, No. 6. Pp. 583–594 (in Russian).
DOI: [10.31857/S0320791921060113](https://doi.org/10.31857/S0320791921060113)
- [7] Andsager R.L., Knapp R.M. Acoustic Determination of Liquid Levels in Gas Wells // J. Pet. Technol. 1967. V. 19(05). Pp. 601–605.
DOI: [10.2118/1640-PA](https://doi.org/10.2118/1640-PA)
- [8] Шагапов В.Ш., Рафикова Г.Р., Мамаева З.З. Динамика полей давления в пласте и в трещине ГРП при собственных колебаниях столба жидкости в скважине // Инженерно-физический журнал. 2023. Т. 96, № 6. С. 1494–1501.
Shagapov V.Sh., Rafikova G.R., Mamaeva Z.Z. Dynamics of pressure fields in the reservoir and in the hydraulic fracture during natural oscillations of the liquid column in the well // Engineering and Physical Journal. 2023. V. 96, No. 6. Pp. 1494–1501 (in Russian).
EDN: [ummvzt](https://www.edn.ru/ummvzt)

Сведения об авторах / Information about the Authors

Зилия Зайтовна Мамаева

канд. физ.-мат. наук

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа,
Россия

Ziliya Zaitovna Mamaeva

PhD (Phys. & Math.)

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

zilia16@mail.ru

ORCID: [0000-0002-7783-1211](https://orcid.org/0000-0002-7783-1211)



<http://mfs.uimech.org/mfs2024.4.022>

DOI: [10.21662/mfs2024.4.022](https://doi.org/10.21662/mfs2024.4.022)

УДК / UDC: 002.2:531/534

Получена / Received: 8.11.2024

Принята / Accepted: 16.12.2024



Задача о течении термовязкой жидкости в канале с каверной, содержащей охлаждающий элемент

А.А. Мухутдинова

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

E-mail: mukhutdinova23@yandex.ru

Моделирование течения жидкостей в каналах с каверной является актуальным для решения инженерных задач, связанных с конструктивными особенностями устройств, например, с переработкой и транспортировкой углеводородов, системами охлаждения. Наличие каверны может привести к возникновению локальных гидродинамических эффектов, таких как автоколебания или другие сложные режимы течения. Численно исследуется влияние реологических параметров жидкости, условий теплообмена и геометрических параметров каверны и канала на характеристики потока. Математическая модель задачи состоит из уравнений неразрывности, модифицированных уравнений Навье–Стокса с учетом переменной вязкости и сохранения энергии. Для численного решения этих уравнений применялись метод контрольного объема и алгоритм SIMPLE, модифицированный для учета переменного коэффициента вязкости. Для демонстрации влияния различных условий теплообмена на характер течения на дне каверны расположена пластина, на которой задавалась температура, отличавшаяся от температуры окружающей среды. Проведено экспериментальное измерение вязкости 45%-го водного раствора пропиленгликоля в диапазоне температур от -8 до 70°C с использованием ротационного реометра «Thermo Scientific HAAKE MARS» лаборатории «Экспериментальная гидродинамика» ИМех УФИЦ РАН. Сопоставлены результаты численного моделирования с фотографиями эксперимента ползущего течения при обтекании прямоугольной каверны для трех случаев при соотношении геометрических параметров $b/h = 0.5, 1, 2$. Рассмотрено влияние высоты основного слоя жидкости и параметров каверны на основной поток и на процесс образования завихренности в каверне.

Ключевые слова: термовязкая жидкость, пропиленгликоль, плоский канал с каверной

Работа выполнена в рамках государственного задания № 124030400064-2 (FMRS-2024-0001)

The problem of the flow of a thermoviscous fluid in a channel with a cavity containing a cooling element

A.A. Mukhutdinova

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

E-mail: mukhutdinova23@yandex.ru

Modeling of fluid flow in channels with a cavity is relevant for solving engineering problems, for example, related to the design features of devices associated, for example, with the processing and transportation of hydrocarbons, cooling systems. The presence of a cavity can lead to the occurrence of local hydrodynamic effects, such as self-oscillations or other complex flow regimes. The influence of rheological parameters of the fluid, heat exchange conditions and geometric parameters of the cavity and channel on the flow characteristics is numerically studied. The mathematical model of the problem consists of continuity equations, modified Navier-Stokes equations taking into account variable viscosity and energy conservation. To numerically solve these equations, the control volume method and the SIMPLE algorithm modified to take into account the variable viscosity coefficient were used. To demonstrate the influence of various heat exchange conditions on the flow character, a plate was located at the bottom of the cavity, on which a temperature was set that differed from the ambient temperature. An experimental measurement of the viscosity of a 45% aqueous solution of propylene glycol was carried out in the temperature range from -8 to 70°C using a Thermo Scientific HAAKE MARS rotational rheometer of the Experimental Hydrodynamics laboratory of the Institute of Mechanics of the Ufa Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences. The results of numerical modeling were compared with photographs of the experiment of creeping flow around a rectangular cavity for three cases with the ratio of geometric parameters $b/h = 0.5, 1, 2$. The influence of the height of the main liquid layer and the parameters of the cavity on the main flow and on the process of vorticity formation in the cavity was considered.

Keywords: thermoviscous liquid, propylene glycol, flat channel with a cavity

1. Введение

Процессы теплообмена потока жидкости с внешней средой в значительной мере определяют особенности течения, учет зависимости вязкости и теплофизических констант от температуры вносит существенный вклад не только в количественные, но и в качественные характеристики течения. В предположении экспоненциально убывающей зависимости вязкости от температуры выполнено значительное количество гидродинамических исследований для решения различных проблем в геофизике, экологии, металлургии и химической промышленности [1].

Моделирование течения жидкостей в каналах с каверной актуально для решения инженерных задач, связанных с конструктивными особенностями устройств, например, с переработкой и транспортировкой углеводородов, системами охлаждения. Наличие каверны может привести к возникновению локальных гидродинамических эффектов, таких как автоколебания [2] или другие сложные режимы течения [3].

2. Постановка задачи

Проведено численное исследование течения жидкости с монотонно убывающей зависимостью вязкости от температуры в канале с каверной, содержащей охлаждающий элемент. На рис. 1 показана схема канала и линии тока жидкости при течении в канале с каверной.

Математическая модель задачи состоит из уравнений неразрывности, модифицированных уравнений Навье–Стокса и с учетом переменной вязкости и сохранения энергии [4] имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(T) \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu(T) \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu(T) \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu(T) \frac{\partial v_y}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} &= \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \end{aligned}$$

где v_y, v_x — радиальная и осевая компоненты вектора скорости; P — давление; T — температура; μ — коэффициент динамической вязкости жидкости; α — коэффициент температуропроводности.

Во входном ($x = 0$) и выходном ($x = L$) сечениях плоского канала задаются фиксированные значения давления, а на стенках ($y = y_0, y = y_1, y = H$) — условия прилипания для скорости. Граничные условия для давления и компонент вектора скорости принимают

вид:

$$\begin{aligned} p(0) &= 1, \quad p(L) = 0, \\ v_x(y = y_0, x) &= v_x(y = y_1, x) = v_x(y = H, x) = 0, \\ v_y(y = y_0, x) &= v_y(y = y_1, x) = v_y(y = H, x) = 0. \end{aligned}$$

Температура на входе канала задается постоянной:

$$T(y, x = 0) = T_{\max},$$

на выходе ($x = L$) устанавливается условие отсутствия изменения температуры вдоль оси канала:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = 0.$$

На стенках канала ($y = y_1, y = H$) накладываются граничные условия первого рода:

$$T(y = y_1, x) = T(y = H, x) = T_{\max},$$

$$T(y, x = x_1) = T(y, x = x_2) = T_{\max}.$$

Для дна каверны ($x_1 \leq x \leq x_2$) температура задается следующим образом:

$$T(y = y_0, x = x_1) = T(y = y_0, x = x_2) = T_{\min}.$$

В начальный момент времени жидкость в канале покоится и имеет постоянную температуру:

$$v_y(y, x) = v_x(y, x) = 0,$$

$$p(y, x) = 0, T(y, x) = 0.$$

Входящая в уравнения Навье–Стокса функция $\mu = \mu(T)$ представляет собой температурную зависимость вязкости жидкости. Зависимость вязкости от температуры следующего вида:

$$\mu(T) = \mu_0 \exp[-\alpha(T - T_0)],$$

где $\alpha > 0$ — параметр, описывающий характер изменения вязкости; μ_0 — вязкость при T_0 .

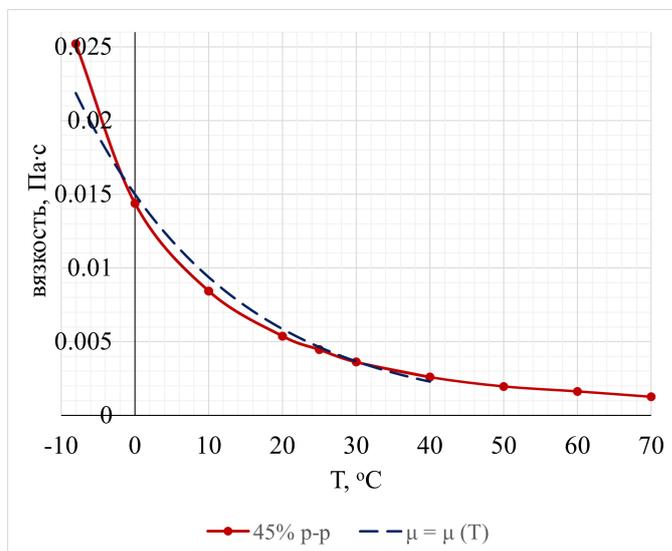


Рис. 1. Схема канала

3. Результаты

В ходе исследований проведена серия экспериментальных измерений вязкости 45%-го водного раствора пропиленгликоля с использованием ротационного реометра «Thermo Scientific HAAKE MARS» лаборатории «Экспериментальная гидродинамика» ИМех УФИЦ РАН.

Полученные результаты представлены на рис. 2 в диапазоне температур от -8 до 70 °С. Кривая красного цвета иллюстрирует экспериментально полученную зависимость вязкости 45%-го водного раствора пропиленгликоля, черного — экспоненциальную аппроксимацию данной зависимости на интервале от -8 до 40 °С.

Уравнения математической модели реализованы с помощью компьютерного кода на основе метода контрольного объема и алгоритма SIMPLE [5], модифицированных для учета переменного коэффициента вязкости. Оригинальный компьютерный код реализован на языке программирования C++ в кроссплатформенной среде разработки Qt Creator.

Структура течения, очевидно, должна существенно зависеть от теплового режима на пластине, находящейся на дне каверны. Если температура пластины равна температуре, поступающих в канал жидкостей, получим изотермические режимы течения, соответствующие фотографиям экспериментов, приведенных в известном альбоме Ван Дайка [6]. На рис. 3 показано сравнение численного решения с фотографиями эксперимента ползущего течения при обтекании прямоугольной каверны для трех случаев при соотношении геометрических параметров $b/h = 0.5, 1, 2$. При соотношении $b/h = 0.5$ наблюдается узкая зона циркуляции в каверне, поток над каверной остается линейным, а вихрь симметричный и располагается ближе к потоку. Для случая $b/h = 1$ зона циркуляции становится более выраженной, а поток над каверной слегка отклоняется, вихрь симметричный. При увеличении соотношения до $b/h = 2$ зона циркуляции расширяется, охватывая практически всю каверну, и поток над каверной отклоняется.

В случае, если на пластине задается температура ниже окружающей среды, то при экспоненциально убывающей зависимости вязкости от температуры зона циркуляции в каверне будет смещаться в зависимости от параметров течения и геометрии самой каверны. В начальный момент времени канал заполнен жидкостью при температуре 0 °С, далее начинает поступать нагретая жидкость, и на стенках поддерживается постоянная температура равная 40 °С, на дне каверны температура равна -8 °С.

На рис. 4 показано неустановившееся распределение температуры, вязкости и линий тока в момент времени t_1 при $b/h = 1$. Отмечен процесс перемешивания жидкостей с разными температурами, при котором изменение вязкости оказывает влияние на формирование и развитие вихря при числе $Re < 2000$.

Далее рассматривается влияние каверны на поток термовязкой жидкости и формирование завихренности при фиксированной высоте потока $H = 5$ см. На рис. 5(a) представлены линии тока жидкости для случая, когда вместо каверны используется охлаждающая пластина, ширина которой равна ширине каверны. В области около пластины наблюдается повышение вязкости и незначительное обтекание данной области. На рис. 5(b) показано, что при высоте каверны, составляющей пятую часть высоты основного потока, образование вихрей не происходит. Структура основного потока не меняется, но наблюдается огибание верхней части каверны. На рис. 5(c) видно, что при увеличении высоты каверны до 3 см вихри начинают формироваться в углах каверны и основной поток значительно отклоняется. При дальнейшем увеличении высоты каверны до $H = h$ (рис. 5(d)) наблюдается образование крупного симметричного вихря, расположенного в центре канала. Взаимодействие основного потока и вихря в каверне показано неравномерным распределением линий тока. При максимальном соотношении $2H = h$ (рис. 5(e)) формируется устойчивый вихрь и сохраняется симметрия, но его центр смещается ближе к основному потоку.

Изучено влияние высоты основного слоя жидкости на процесс образования завихренности в каверне при фиксированной глубине самой каверны. На рис. 6(a),(b) показано, что при соотношении $H = 2h$ или $H = h$ вихрь симметричный и располагается либо ближе к основному потоку, либо в центре каверны. Однако, в первом случае линии тока проходят над каверной практически без деформаций, а во втором случае слегка изгибаются в зоне каверны, не влияя на основной поток. Уменьшение высоты основного слоя (рис. 6(c),(d)) приводит к снижению центра устойчивого вихря, его смещению в сторону одной из стенок канала и полному огибанию каверны основным потоком. Также отмечается формирование зоны циркуляции с появлением угловых вихрей (рис. 6(d),(e)).

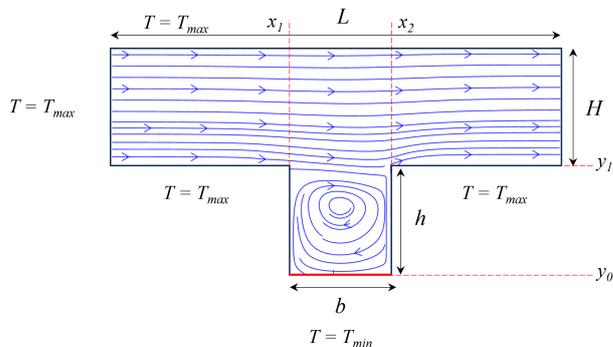
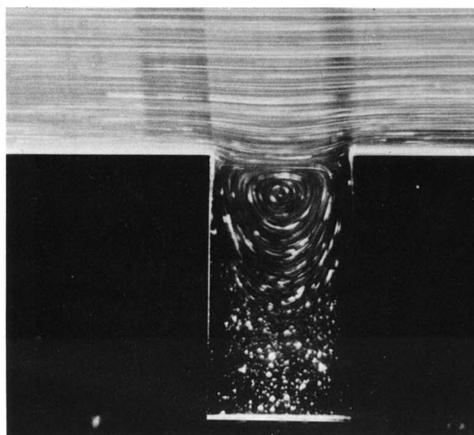
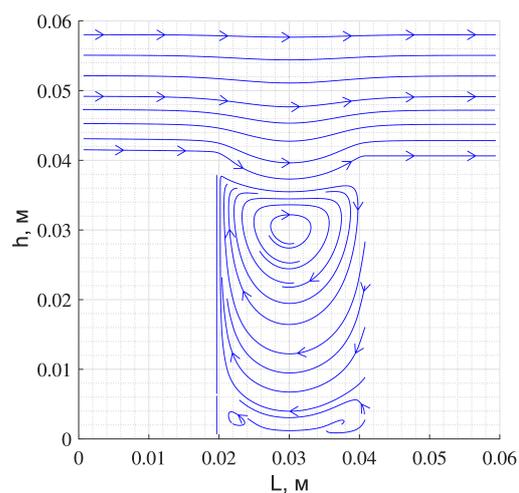


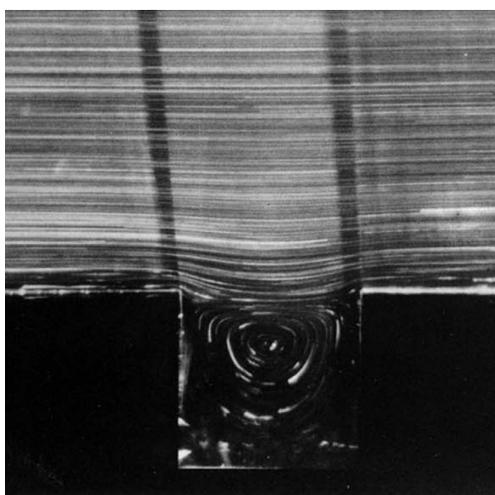
Рис. 2. Зависимость вязкости от температуры



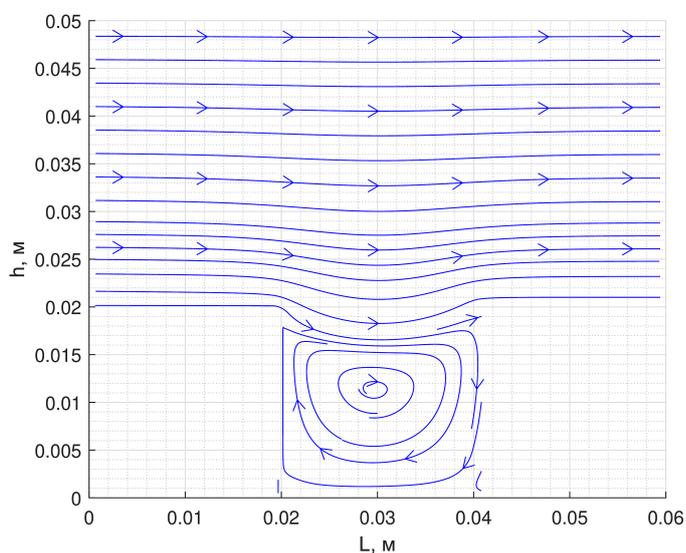
(a)



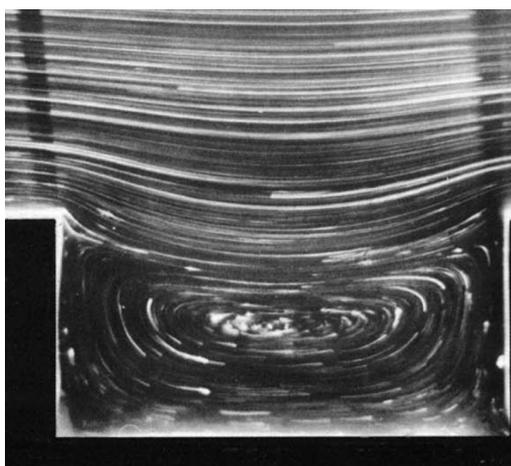
(b)



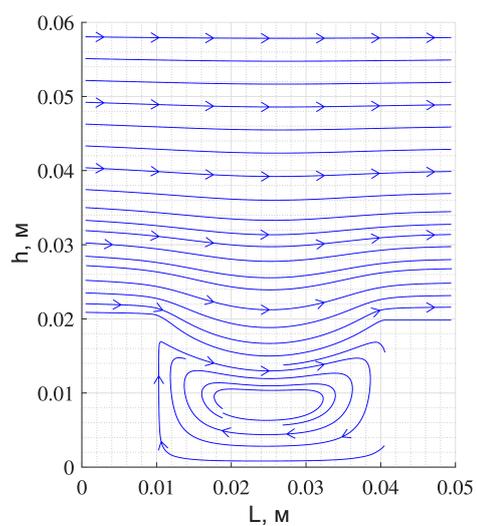
(c)



(d)



(e)



(f)

Рис. 3. Сравнение ползущего течения при обтекании прямоугольной каверны при числе $Re = 0.01$: фото эксперимента (a) и численное решение (b) при $b/h = 0.5$, фото эксперимента (c) и численное решение (d) при $b/h = 1$, фото эксперимента (e) и численное решение (f) при $b/h = 2$

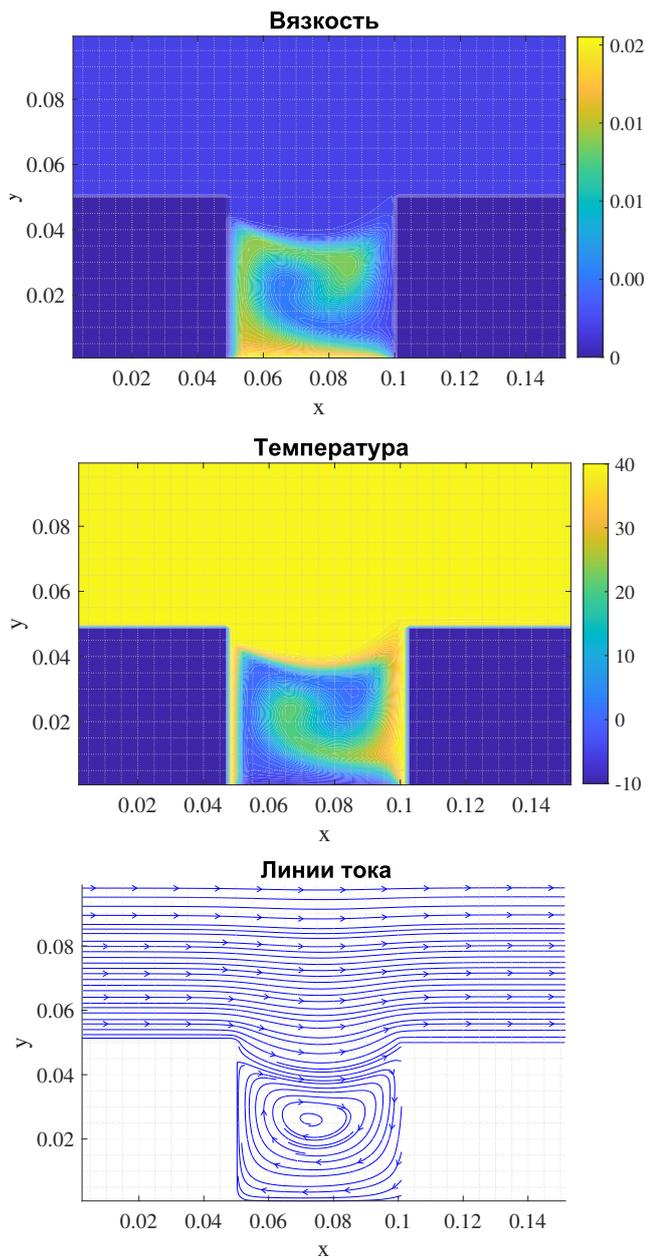


Рис. 4. Распределение параметров в канале с каверной при соотношении $b/h = 1$ при течении жидкости с монотонной зависимостью

4. Заключение

В работе исследовано течение термовязкой жидкости в плоском канале с каверной и показано, что гидродинамические особенности течения определяются размером и формой каверны. При фиксированном перепаде давления положение и форма вихря зависят от высоты основного потока. Увеличение глубины каверны (h) приводит к усилению завихренности внутри нее. Уменьшение высоты основного слоя приводит к снижению центра устойчивого вихря, его разбиению на два и смещению в сторону стенок канала, огибанию каверны основным потоком. Эти результаты подчеркивают важность учета как геометрических, так и реологических параметров при анализе течения жидкости.

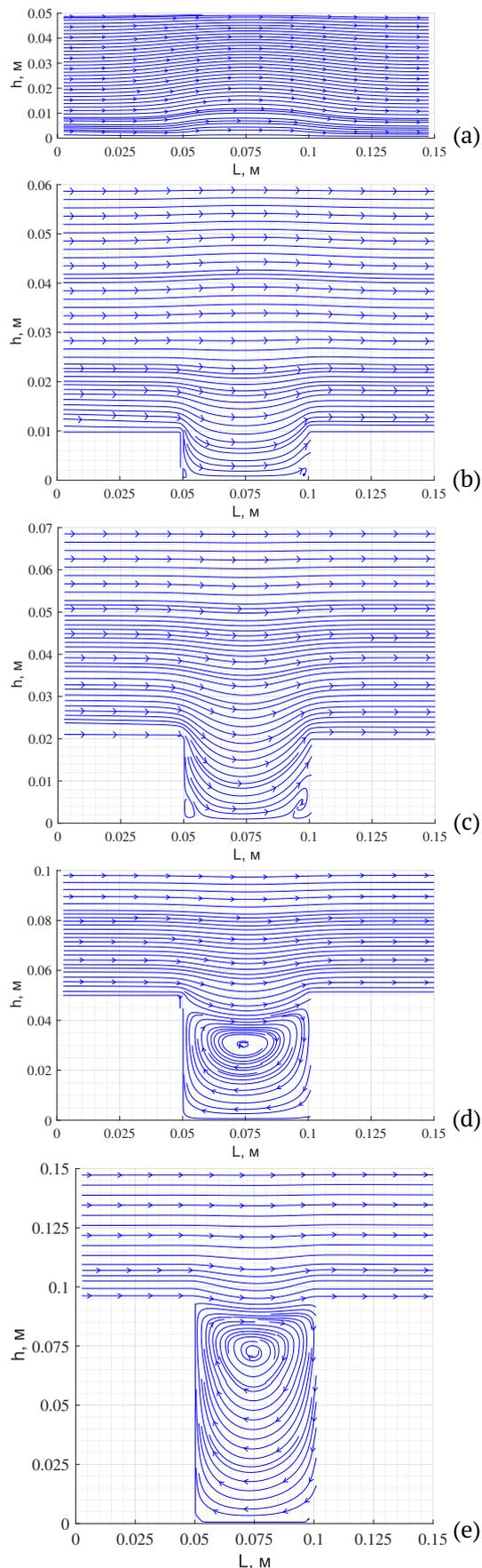


Рис. 5. Влияние параметров каверны на основной поток и на завихренность термовязкой жидкости: (а) $h = 0$ см, (б) $h = 1$ см, (с) $h = 3$ см, (д) $h = 5$ см, (е) $h = 10$ см

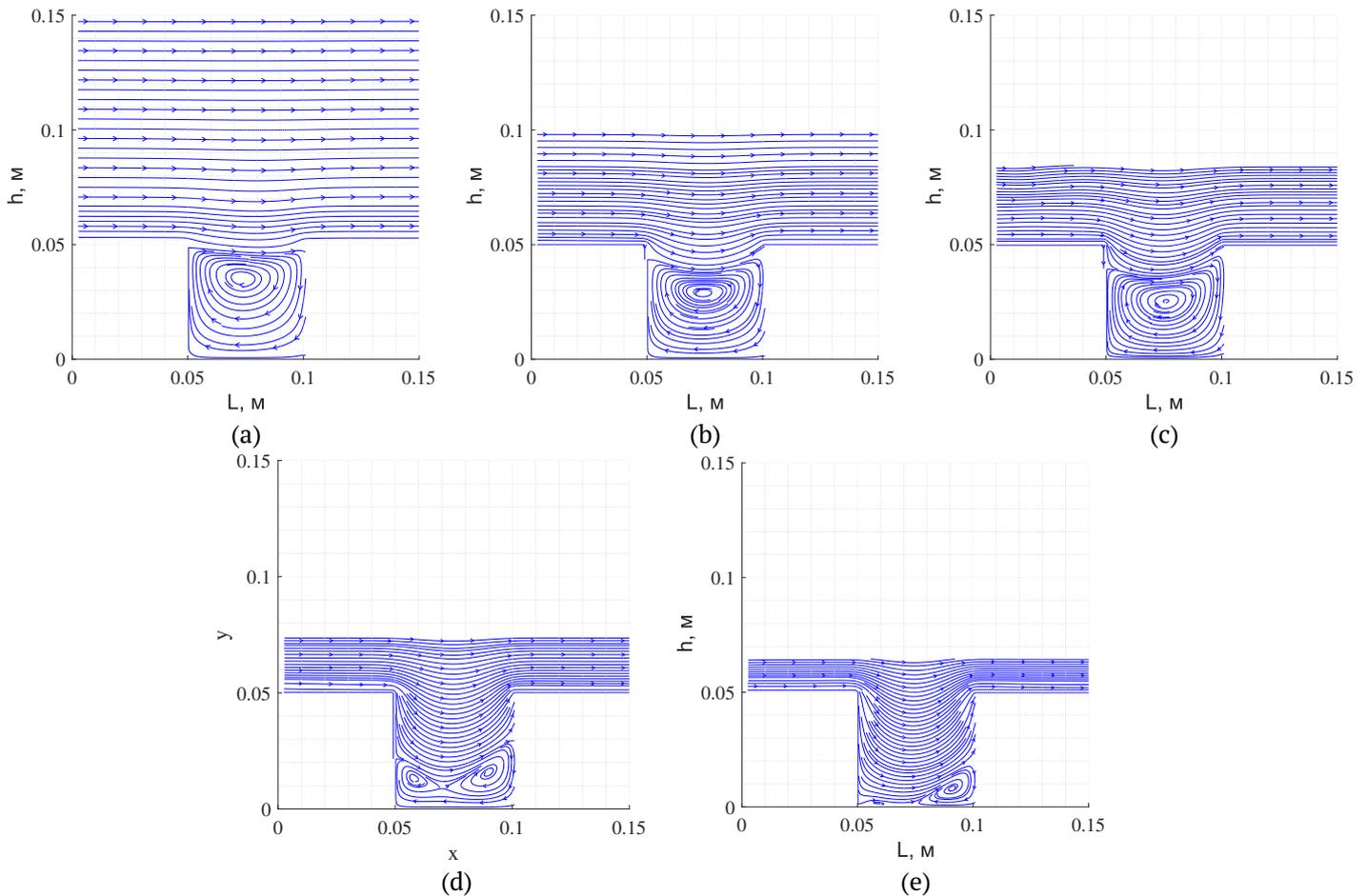


Рис. 6. Влияние основного потока на завихренность термовязкой жидкости в каверне $h = 5$ см при: (a) $H = 10$ см, (b) $H = 5$ см, (c) $H = 3.5$ см, (d) $H = 2.5$ см, (e) $H = 1.5$ см

Список литературы / References

[1] Виноградов Г.В., Малкин А.Я. Реология полимеров. М.: Химия, 1977. 438 с.
 Vinogradov G.V., Malkin A.Ya. Rheology of polymers. M.: Khimiya, 1977. P. 438 (in Russian).

[2] Adibi T., Ahmed S.F., Adibi O., Athari H., Badruddin I.A., Javed S. Fluid flow and mixed heat transfer in a horizontal channel with an open cavity and wavy wall // Intelligent Automation & Soft Computing. 2023. Vol. 37, No. 1. Pp. 147–163.
 DOI: [10.32604/iasc.2023.035392](https://doi.org/10.32604/iasc.2023.035392)

[3] Агеев А.И., Осипцов А.Н. Сдвиговое течение вязкой жидкости над каверной, содержащей пульсирующий пузырек газа // Доклады РАН. 2020. Т. 493. С. 38–41.
 DOI: [10.31857/S2686740020030037](https://doi.org/10.31857/S2686740020030037)

Ageev A.I., Osipov A.N. Shear Flow of a Viscous Fluid over a Cavity with a Pulsating Gas Bubble // Doklady Physics. 2020. Vol. 65, No. 7. Pp. 242–245.
 DOI: [10.1134/S1028335820050031](https://doi.org/10.1134/S1028335820050031)

[4] Kireev V.N., Mukhutdinova A.A., Urmancheev S.F. On the Critical Conditions of Heat Transfer for a Fluid Flow with a Nonmonotonic Dependence of the Viscosity on the Temperature in an Annular Channel // Fluid Dynamics. 2023. Vol. 58. Pp. 1310–1317.
 DOI: [10.1134/S0015462823602036](https://doi.org/10.1134/S0015462823602036)

[5] Patankar S.V. Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere Publ. Corp., New York, 1980. Т. 58. 288 p.

[6] Ван Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1986. 184 с.
 Van Dyke M. An Album of Fluid Motion. The Parabolic Press, Stanford. 1982. 176 p.

Сведения об авторах / Information about the Authors

Айгуль Айратовна Мухутдинова
 Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа,
 Россия

Aigul Airatovna Mukhutdinova
 Mavlutov Institute of Mechanics UFRS RAS, Ufa, Russia
mukhutdinova23@yandex.ru
 ORCID: [0000-0002-5009-002X](https://orcid.org/0000-0002-5009-002X)



Поверхностные волны вертикальной поляризации на границе пористых сред, насыщенных гидратом и льдом

Э.В. Галиакбарова*, Г.Р. Каримова**

*Уфимский государственный нефтяной технический университет, Уфа

**Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

E-mail: gulnazkar69@gmail.com

В настоящей работе рассматривается процесс распространения волны вертикальной поляризации, то есть отсутствует горизонтальное поперечное перемещение вдоль границы раздела двух сред, где верхняя среда представлена песком, насыщенным льдом, а нижняя – песком, насыщенным газогидратом, при положительных температурах по шкале Цельсия и давлениях, соответствующих стабильному существованию газогидратов по лабораторным данным. В прямоугольной системе координат выбраны направления осей для случая, когда плоскостью раздела является $z = 0$. Гармоническая волна распространяется на достаточно удаленном расстоянии от источника взрыва и представлена суммой продольных и поперечных волн. Для описания математической модели использованы волновые уравнения, уравнения для смещения частиц и компонентов тензоров напряжения, которые дополнены граничными условиями. Для численных расчетов использовались экспериментальные значения скоростей, продольных и поперечных волн в насыщенных пористых средах в зависимости от различных параметров пористой среды. Установлено, что глубина проникания поперечной волны в насыщенный песок почти в 2 раза выше, чем для продольной волны.

Ключевые слова: поверхностные акустические волны, волна вертикальной поляризации, дисперсионное уравнение

Vertical polarization surface waves at the boundary of porous media saturated with hydrate and ice

E.V. Galiakbarova*, G.R. Karimova**

*Ufa State Petroleum Technological University, Ufa, Russia

**Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

E-mail: gulnazkar69@gmail.com

This paper considers the process of wave propagation of vertical polarization, there is no horizontal transverse motion, along the interface between two media, where the upper medium is represented by sand saturated with ice, and the lower medium is represented by sand saturated with gas hydrate, at positive temperatures on the Celsius scale and pressures corresponding to the stable existence of gas hydrates according to laboratory data. In the rectangular coordinate system, the axis directions are chosen for the case when the interface plane is $z = 0$. The harmonic wave propagates at a sufficiently distant distance from the explosion source, which is represented by the sum of longitudinal and transverse waves. To describe the mathematical model we used wave equations, equations for particle displacement and components of stress tensors, which we supplement with boundary conditions. Experimental values of velocities, longitudinal and transverse waves in saturated porous media depending on various parameters of porous media were used for numerical calculations. The depth of penetration of transverse wave in saturated sand is almost 2 times higher than that of longitudinal wave.

Keywords: surface acoustic waves, vertical polarization wave, dispersion equation

1. Введение

Исследователи проявляют значительный интерес к поверхностным акустическим волнам, учитывая их разнообразные области применения и изучения в механике сплошных сред [1]. Такие исследования могут быть полезны для разведки газогидратных залежей в придонных зонах морей и океанов, а также в слоях земной коры с вечной мерзлотой. В России крупные газогидратные месторождения расположены в акваториях

Охотского и Черного морей, а также в озере Байкал, где дно состоит из песчаников и глинистых минералов [2, 3]. Поверхностные акустические волны распространяются вдоль свободной поверхности твердых тел или их границ с другими средами и постепенно затухают при удалении от этих границ. На сегодняшний день теория акустических волн осуществляет значительный вклад в понимание множества явлений. Многочисленные работы посвящены физическим характеристикам, применениям и особенностям этих волн в различных средах

и условиях с многообразными усложняющими факторами [4–6]. Известно, что поверхностные волны могут иметь как вертикальную, так и горизонтальную поляризацию, среди которых наиболее распространены волны Рэлея, Лява и Стоунли [7, 8].

Особый интерес представляет проблема распространения гармонической поверхностной волны вдоль границы между двумя жестко склеенными средами, впервые представленная в 1924 году британским сейсмологом Робертом Стоунли [9]. Существование этой волны зависит от плотностей и упругих характеристик граничащих сред. Эти волны продолжают изучаться, особенно в области геофизики и сейсмологии, для оценки проницаемости пород, распределения и мощности пластов и других характеристик. Например, в работе [10] анализируется влияние контакта различных сред на свойства акустических волн Стоунли, получено соответствующее дисперсионное уравнение. Высокочастотные волны Стоунли могут предоставить информацию о физических свойствах окружающих слоев и выявить межфазные трещины [11]. Практическое применение волн Стоунли продемонстрировано в исследованиях газогидратных месторождений в Малике (Канада) [12]. Анализ данных с сейсмографов позволил оценить проницаемость пород и мощность гидратных пластов, а также определить скорость волн Стоунли.

В исследовании [13] предложен метод определения наличия газогидрата в пласте через определение глубины залегания газогидрата по зависимости коэффициента отражения от частоты колебаний, что позволяет оценивать запасы и особенности пластов с газогидратами, основываясь на зависимости скоростей и коэффициентов затухания волн от частоты и насыщенности [14].

Основной целью настоящего исследования является анализ распространения волн вертикальной поляризации вдоль границы между песком, насыщенным водой, и песком, насыщенным газогидратом. Для достижения цели поставлены следующие задачи: 1) описание математической модели распространения волн на границе «гидратонасыщенный песок – льдонасыщенный песок»; 2) получение аналитических решений в виде гармонических бегущих волн для давления, смещений и потенциалов векторов продольной и поперечной волн; 3) анализ глубины проникания волн.

2. Постановка задачи

Рассмотрим процесс распространения волны вертикальной поляризации вдоль границы раздела двух сред «пористая среда, насыщенная гидратом – пористая среда, насыщенная льдом» (рис. 1). В декартовой системе координат выбираем направления осей и плоскостью раздела является $z = 0$. Гармоническая волна распространяется на достаточно удаленном расстоянии от источника взрыва. Допущения: пористая среда – упругое изотропное тело, гидратонасыщенный песок обозначен индексом 1, льдонасыщенный песок – 2.

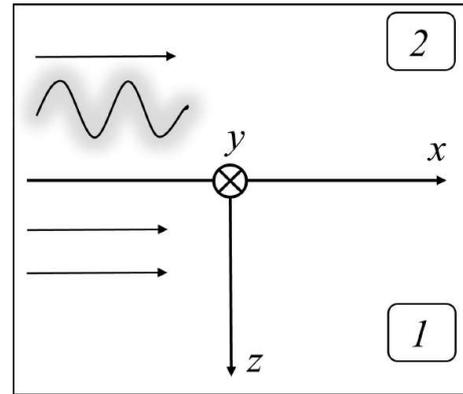


Рис. 1. Схема распространения волны на границе раздела сред

Для области песка, насыщенного гидратом, выписаны следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial t^2} &= C_l^{(1)2} \left(\frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial t^2} &= C_t^{(1)2} \left(\frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

$$C_l^{(1)2} = (\lambda_1 + 2\mu_1) / \rho^{(s_1)}, \quad C_t^{(1)2} = \mu_1 / \rho^{(s_1)},$$

$$W_x^{(1)} = \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial z}, \quad (2)$$

$$W_z^{(1)} = \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x},$$

$$P_{xz}^{(1)} = \mu_1 \left(\frac{\partial W_x^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial W_z^{(1)}}{\partial x} \right), \quad (3)$$

$$P_{zz}^{(s_1)} = \lambda_1 \left(\frac{\partial W_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial W_z^{(1)}}{\partial z} \right) + 2\mu_1 \frac{\partial W_z^{(1)}}{\partial z},$$

где φ, ψ – скалярный и векторные потенциалы для векторов продольной и поперечной волны в средах; λ, μ – упругие параметры Ламе; $C_l^{(1)}, C_t^{(1)}$ – скорости продольных и поперечных волн; $W_x^{(1)}, W_z^{(1)}$ – смещения частиц по координатам x и z в средах; $P_{xz}^{(1)}, P_{zz}^{(1)}$ – компоненты тензора напряжений; l – продольная волна; t – поперечная волна.

Для области песка, насыщенного льдом выписаны следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial t^2} &= C_l^{(2)2} \left(\frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial t^2} &= C_t^{(2)2} \left(\frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$C_l^{(2)2} = (\lambda_2 + 2\mu_2) / \rho^{(2)}, \quad C_t^{(2)2} = \mu_2 / \rho^{(2)},$$

$$W_x^{(2)} = \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial z}, \quad (5)$$

$$W_z^{(2)} = \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x},$$

$$\begin{aligned}
 P_{xz}^{(2)} &= \mu_2 \left(\frac{\partial W_x^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial W_z^{(2)}}{\partial x} \right), \\
 P_{zz}^{(2)} &= \lambda_2 \left(\frac{\partial W_x^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial W_z^{(2)}}{\partial z} \right) + 2\mu_2 \frac{\partial W_z^{(2)}}{\partial z},
 \end{aligned} \quad (6)$$

где $C_l^{(2)}$, $C_t^{(2)}$ — скорости продольных и поперечных волн; $W_x^{(2)}$, $W_z^{(2)}$ — смещения частиц по координатам x и z в средах; $P_{xz}^{(2)}$, $P_{zz}^{(2)}$ — компоненты тензора напряжений.

Система уравнений (1)–(6) дополнена граничными условиями:

$$\begin{aligned}
 z = 0: \quad W_x^{(1)} &= W_x^{(2)}, \quad W_z^{(1)} = W_z^{(2)}, \\
 P_{xz}^{(1)} &= P_{xz}^{(2)} = 0, \quad P_{zz}^{(1)} = P_{zz}^{(2)}.
 \end{aligned} \quad (7)$$

3. Аналитическое и численное решение

Для волновых уравнений (1) и (4) решения для двух областей ищем в виде гармонической бегущей волны, приходим к дифференциальным уравнениям второго порядка:

$$\frac{d^2 a(z)}{dz^2} - \left(k^2 - k_l^{(1)2} \right) a(z) = 0,$$

Заменяя волновые числа k , $k_l^{(i)}$, $k_t^{(i)}$ через скорости C , $C_l^{(i)}$, $C_t^{(i)}$ ($i = 1, 2$) и согласно лабораторным измерениям значений скоростей продольных и поперечных волн [15] получено, что дисперсионное уравнение будет иметь действительный корень, когда пористая среда насыщена льдом.

На рис. 2 показана зависимость глубины проникания волны ($h_{l,t}^{(1,2)} = s_{l,t}^{(1,2)-1}$) в пористую среду от частоты с учетом (8). Значения физических параметров: $m = 0,4$, $\rho_h = 910 \text{ кг/м}^3$, $\rho_q = 2700 \text{ кг/м}^3$, $\rho_g = 0,7168 \text{ кг/м}^3$, $\rho_{ice} = 916,7 \text{ кг/м}^3$, где ρ_j — плотность; индексы $j = h, ice$ соответствуют гидрату и льду; ρ_g — плотность метана; ρ_q — плотность кварца; m — пористость. В расчетах пористая среда, насыщенная гидратом обозначена индексом 1, а пористая среда, насыщенная льдом — 2.

Насыщенности $S^{(i)}$, где $i = 1, 2$ для 1 и 2 среды равны — 0,1 (линия 1); 1 среда — 0,6,

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 b(z)}{dz^2} - \left(k^2 - k_t^{(1)2} \right) b(z) &= 0, \\
 \frac{d^2 c(z)}{dz^2} - \left(k^2 - k_l^{(2)2} \right) c(z) &= 0, \\
 \frac{d^2 r(z)}{dz^2} - \left(k^2 - k_t^{(2)2} \right) r(z) &= 0,
 \end{aligned}$$

где $k_l^{(1)2} = \omega^2 / C_l^{(1)2}$, $k_t^{(1)2} = \omega^2 / C_t^{(1)2}$, $k_l^{(2)2} = \omega^2 / C_l^{(2)2}$, $k_t^{(2)2} = \omega^2 / C_t^{(2)2}$ — волновые числа.

Уравнения (2) и (5) примут вид:

$$\begin{aligned}
 W_x^{(1)} &= ikAe^{i(kx-\omega t)-s_l^{(1)}z} + s_t^{(1)}Be^{i(kx-\omega t)-s_t^{(1)}z}, \\
 W_z^{(1)} &= -s_l^{(1)}Ae^{i(kx-\omega t)-s_l^{(1)}z} + ikBe^{i(kx-\omega t)-s_t^{(1)}z}, \\
 W_x^{(2)} &= ikFe^{i(kx-\omega t)+s_l^{(2)}z} - s_t^{(2)}Ge^{i(kx-\omega t)+s_t^{(2)}z}, \\
 W_z^{(2)} &= s_l^{(2)}Fe^{i(kx-\omega t)+s_l^{(2)}z} + ikGe^{i(kx-\omega t)+s_t^{(2)}z},
 \end{aligned}$$

где $s_l^{(i)} = \sqrt{k^2 - k_l^{(i)2}}$, $s_t^{(i)} = \sqrt{k^2 - k_t^{(i)2}}$ — коэффициенты затухания; $i = 1, 2$ — индексы для области гидратонасыщенного песка и водонасыщенного песка.

С учетом граничных условий (7) получаем систему с четырьмя неизвестными амплитудами A, B, F, G . Условием существования решения системы уравнений относительно неизвестных амплитуд является равенство определителя нулю, что приводит к дисперсионному уравнению:

$$\begin{vmatrix}
 ik & -s_t^{(1)} & -ik & -s_t^{(2)} \\
 -s_l^{(1)} & -ik & -s_l^{(2)} & ik \\
 -2iks_l^{(1)}\mu_1 & \mu_1 \left(s_l^{(1)2} + k^2 \right) & 2iks_l^{(2)}\mu_2 & \mu_2 \left(s_l^{(2)2} + k^2 \right) \\
 -\lambda_1 k_l^{(1)2} + 2\mu_1 s_l^{(1)2} & 2iks_t^{(1)}\mu_1 & \lambda_2 k_l^{(2)2} - 2\mu_2 s_l^{(2)2} & 2iks_t^{(2)}\mu_2
 \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

2 среда — 0,3 (линия 2); 1 среда — 0,7, 2 среда — 0,4 (линия 3). Значения скоростей продольных и поперечных волн: $C_l^{(1)} = 2470, 3705, 4078 \text{ м/с}$; $C_l^{(2)} = 2506, 3702, 4035 \text{ м/с}$; $C_t^{(1)} = 1621, 2320, 2595 \text{ м/с}$; $C_t^{(2)} = 1612, 2335, 2517 \text{ м/с}$.

Получено, что глубина проникания поперечной волны в насыщенный песок почти в два раза выше, чем для продольной волны, и повышается при снижении частоты. Также некоторый рост глубины проникания волн происходит при наличии в песке гидрата (линии 2 и 3 относительно линии 1 расположены немного выше).

4. Заключение

Предложена математическая модель динамики волны вертикальной поляризации на границе раздела между двумя упругими изотропными средами (со скользящим контактом) с учетом акустических свойств продоль-

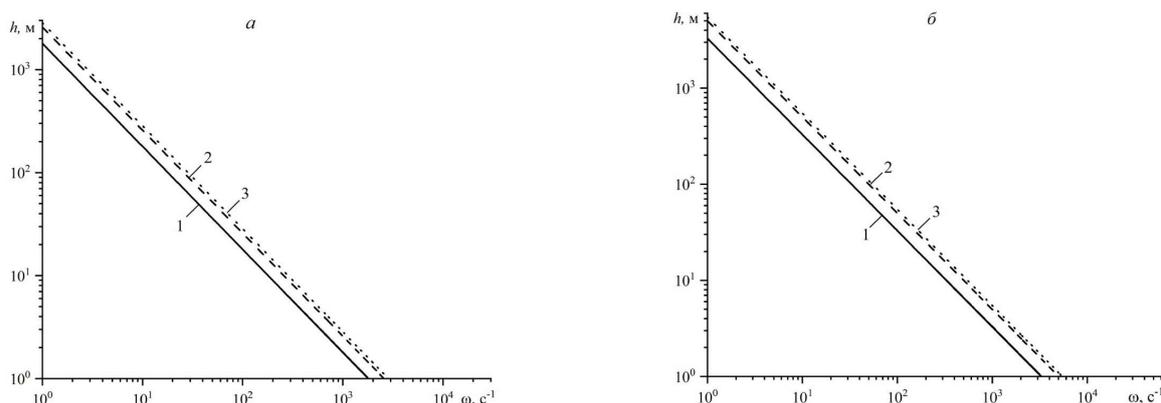


Рис. 2. Зависимости глубины проникания волны вертикальной поляризации в пористую среду от частоты для продольной (а) и поперечной (б) волн

ных и поперечных волн в таких средах, принятых из лабораторных данных. Установлено, глубина проникания поперечной волны в гидратонасыщенный песок почти в два раза выше, чем для продольной волны.

Список литературы / References

- [1] Олинер А.А. Поверхностные акустические волны. Москва: Мир, 1981. 390 с.
Oliner A.A. Acoustic Surface Waves. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1978. 331 p.
DOI: [10.1007/3-540-08575-0](https://doi.org/10.1007/3-540-08575-0)
- [2] Макогон Ю.Ф. Газогидраты. История изучения и перспективы освоения // Геология и полезные ископаемые мирового океана. 2010. № 2(20). С. 5–21.
Makogon Y.F. Gas hydrates. History of study and prospects of development // Geology and Mineral Resources of the World Ocean. 2010. № 2 (20). Pp. 5–21. (in Russian)
EDN: [msydrp](https://www.edn.ru/msydrp)
- [3] Сапарлиев Х.М., Нургельдыев Н. Основные типы сейсмических волн // Новое слово в науке и практике: гипотезы и апробация результатов исследований. 2015. № 18. С. 17–26.
Saparliev H.M., Nurgeldiev N. Main types of seismic waves // New word in science and practice: hypotheses and approbation of research results. 2015. № 18. Pp. 17–26. (in Russian)
EDN: [ugxolp](https://www.edn.ru/ugxolp)
- [4] Лепендин Л.Ф. Акустика. Москва: Высшая школа, 1978. 448 с.
Lependin L.F. Acoustics. Moscow: Higher School, 1978. 448 p. (in Russian).
- [5] Исакович М.А. Общая акустика. Москва: Наука, 1973. 496 с.
Isakovich M.A. General acoustics. Moscow: Nauka, 1973. 496 p. (in Russian).
- [6] Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. Москва: Наука, 1973. 343 с.
Brekhovskikh L.M. Waves in layered media. Moscow: Nauka, 1973. 343 p. (in Russian).
- [7] Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. Москва: Наука, 1981. 287 с.
Viktorov I.A. Sound surface waves in solids. Moscow: Nauka, 1981. 287 p. (in Russian).
- [8] Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. К.: Наук. думка, 1981. 284 с.
Grinchenko V.T., Meleshko V.V. Harmonic vibrations and waves in elastic bodies. K.: Nauk. dumka, 1981. 284 p.
- [9] Stoneley R. Elastic Waves at the Surface of Separation of Two Solids // Proceedings of the Royal Society of London. Series A Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. 1924. V. 106, No. 738. Pp. 416–428.
DOI: [10.1098/rspa.1924.0079](https://doi.org/10.1098/rspa.1924.0079)
- [10] Абакумов К.Е., Коновалов Р.С. Распространение акустических волн Стоунли в области границы твердых полупространств при нарушенном акустическом контакте // Известия СПбГЭТУ ЛЭТИ. 2007. № 3. С. 3–7.
Abbakumov K.E., Konovalov R.S. Distribution of Stoneley acoustic waves near to border of solid half-spaces at the broken acoustic contact // Izvestiya SPBGETU LETI. 2007. No. 3. Pp. 3–7. (in Russian)
EDN: [thjidi](https://www.edn.ru/thjidi)
- [11] Ilyashenko A.V. Stoneley waves in a vicinity of the Wiechert condition // International Journal of Dynamics and Control. 2021. V. 9, Is. 1. Pp. 30–32.
DOI: [10.1007/s40435-020-00625-y](https://doi.org/10.1007/s40435-020-00625-y)
- [12] Ji J., Milkereit B. Full Waveform Sonic Data From A Fast Formation // CSEQ National Convention. 2004.
https://old.cseg.ca/assets/files/resources/abstracts/2004/052S0131-Ji_Full_Waveform_Sonic_Data.pdf
- [13] Губайдуллин А.А., Болдырева О.Ю. Волны в пористой среде со слоем, содержащим газовый гидрат // Прикладная механика и техническая физика. 2020. Т. 61, № 4(362). С. 31–38.
DOI: [10.15372/PMTF20200404](https://doi.org/10.15372/PMTF20200404)
Gubaidullin A.A., Boldyreva O.Y. Waves in a porous medium with a gas hydrate containing layer // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2020. V. 61, No. 4. P. 525–531.
DOI: [10.1134/S0021894420040045](https://doi.org/10.1134/S0021894420040045)
- [14] Губайдуллин А.А., Болдырева О.Ю., Дудко Д.Н. Скорость и поглощение линейных волн в пористых средах, насыщенных газом и его гидратом // Прикладная механика и техническая физика. 2022. Т. 63, № 4(374). С. 56–63.
DOI: [10.15372/PMTF20220406](https://doi.org/10.15372/PMTF20220406)
Gubaidullin A.A., Boldyreva O.Y., Dudko D.N. Velocity and attenuation of linear waves in porous media saturated with gas and its hydrate // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2022. V. 63, No. 4. P. 599–605.
DOI: [10.1134/s002189442204006x](https://doi.org/10.1134/s002189442204006x)
- [15] Дучков А.Д., Дучков А.А., Дугаров Г.А., Дробчик А.Н. Скорости ультразвуковых волн в песчаных образцах, содержащих воду, лед или гидраты метана и тетрагидрофурана // Доклады Академии наук. 2018. Т. 478, № 1. С. 94–99.
DOI: [10.7868/S086956521801019X](https://doi.org/10.7868/S086956521801019X)
Duchkov A.D., Duchkov A.A., Dugarov G.A., Drobchik A.N. Velocities of Ultrasonic Waves in Sand Samples Containing Water, Ice, or Methane and Tetrahydrofuran Hydrates (Laboratory Measurements) // Doklady Earth Sciences. 2018. V. 478, No. 1. Pp. 74–78.
DOI: [10.1134/S1028334X18010014](https://doi.org/10.1134/S1028334X18010014)

Сведения об авторах / Information about the Authors**Эмилия Вильевна Галиакбарова**

доктор физ.-мат. наук, доцент
Уфимский государственный нефтяной технический
университет, Уфа, Россия

Emilia Vilevna Galiakbarova

Sc.D. (Phys. & Math.), Assist. Prof.

Ufa State Petroleum Technical University, Ufa, Russia

emi.galiakbar@yandex.ru

ORCID: [0000-0002-7773-3451](https://orcid.org/0000-0002-7773-3451)

Гульназ Римовна Каримова

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа,
Россия

Gulnaz Rimovna Karimova

Mavlyutiv Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

gulnazkar69@gmail.com

ORCID: [0009-0004-8595-1186](https://orcid.org/0009-0004-8595-1186)



Отражение падающего газа от стенки

Р.Ф. Никонорова*, Л.З. Уразбахтина**

*Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

**Уфимский университет науки и технологий, Уфа

E-mail: renatanikon@gmail.com

Для модели движения одноатомного газа в пространстве рассматривается инвариантная подмодель на трехмерной подалгебре из операторов переноса, операторов растяжения и проективного оператора, сведенная к уравнению Абеля. В работе исследуется приближенное решение, полученное по асимптотике интегральных кривых на бесконечности. Решение описывает вихревое движение газа, частицы газа движутся по плоским кривым, лежащим на поверхности вращения. С течением времени газ растекается и остывает. Решение можно интерпретировать как отражение падающего газа от стенки.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, проективный оператор, инвариантная подмодель, приближенное решение

Reflection of the incident gas from the wall

R.F. Nikonorova*, L.Z. Urazbakhtina**

*Mavlyutov Institute of Mechanics of UFRS RAS, Ufa, Russia

**Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

E-mail: renatanikon@gmail.com

The project explores the motion of a monatomic gas in space using an invariant submodel based on a three-dimensional subalgebra. This subalgebra includes translation operators, dilatation operators, and a projective operator, reducing the problem to the Abel equation. An approximate solution is derived using the asymptotics of integral curves at infinity. This solution characterizes the vortex motion of the gas, with particles following planar curves on a rotational surface. As the gas spreads, it cools down, and the solution can be interpreted as a reflection of the incident gas from a wall.

Keywords: equations of gas dynamics, projective operator, invariant submodel, approximate solution

1. Введение

Систематическое исследование уравнений газовой динамики с точки зрения наиболее полного использования заложенных в них свойств симметрии и построения всевозможных подмоделей получило существенное развитие в работах Л.В. Овсянникова и его последователей [1, 2].

В работе рассматривается система уравнений газовой динамики

$$\begin{aligned} \rho D\vec{u} + \nabla p &= 0, \\ D\rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} &= 0, \\ DS &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

с уравнением состояния одноатомного газа [1]

$$S = p\rho^{-\frac{5}{3}}, \quad (2)$$

где $D = \partial_t + \vec{u} \cdot \nabla$ — оператор полного дифференцирования; ∇ — градиент; \vec{u} — вектор скорости; ρ — плот-

ность; p — давление; S — функция энтропии. Газодинамические функции $\vec{u} = (u, v, w)$, p, ρ, S зависят от времени t и пространственных декартовых координат x, y, z .

Система (1)–(2) допускает 14-и параметрическую группу преобразований. Ей соответствует 14-мерная алгебра Ли, в качестве базисных операторов которой можно выбрать следующие:

$X_i, i = 1, 2, 3$: $\partial_{\vec{x}}$ — переносы по пространству,

X_{i+3} : $t\partial_{\vec{x}} + \partial_{\vec{u}}$ — галилеевы переносы,

X_{i+6} : $\vec{x} \times \partial_{\vec{x}} + \vec{u} \times \partial_{\vec{u}}$ — вращения,

$X_{10} = \partial_t$ — перенос по времени,

$X_{11} = t\partial_t + \vec{x} \cdot \partial_{\vec{x}}$ — равномерное растяжение,

$X_{12} = t^2\partial_t + t\vec{x} \cdot \partial_{\vec{x}} + (\vec{x} - t\vec{u}) \cdot \partial_{\vec{x}} - 3t\rho\partial_\rho - 5tp\partial_p$ — проективный оператор,

$X_{13} = t\partial_t - \vec{u} \cdot \partial_{\vec{u}} - 3\rho\partial_\rho - 5p\partial_p$, $X_{14} = \rho\partial_\rho + p\partial_p$ — операторы растяжения.

Особенностью данной алгебры является наличие проективного оператора [1]. Остальные операторы допускаются в случае произвольного политропного газа. Для этой алгебры в работе [3] построена оптимальная система неподобных подалгебр.

2. Инвариантная подмодель ранга 1

В работе [4] рассмотрена трехмерная подалгебра с базисом из операторов

$$aX_2 + X_6, -X_3 + aX_5, X_{10} + X_{12} + b(X_{11} - X_{13}), \quad a > 0,$$

и для нее получено следующее представление инвариантного решения:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u}(\bar{x})e^{b\tau}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} + t\bar{x}(1+t^2)^{-1}, \\ v &= \bar{v}(\bar{x})e^{b\tau}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} + (t\bar{y} - a\bar{z})(1+t^2)^{-1}, \\ w &= -\bar{w}(\bar{x})e^{b\tau}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} + (t\bar{z} + a^{-1}\bar{y})(1+t^2)^{-1}, \\ \rho &= \bar{\rho}(\bar{x})e^{3b\tau}(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}, \\ p &= \bar{p}(\bar{x})e^{5b\tau}(1+t^2)^{-\frac{5}{2}}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$S = \bar{S}(\bar{x}), \quad \bar{x} = xe^{-b\tau}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \tau = \arctg t.$$

После подстановки представления решения в уравнения газовой динамики получена инвариантная подмодель ранга 1 (с одной новой независимой переменной \bar{x}):

$$\begin{aligned} (\bar{u} - b\bar{x})\bar{u}_{\bar{x}} + \frac{\bar{p}_{\bar{x}}}{\bar{\rho}} &= -b\bar{u} - \bar{x}, \\ (\bar{u} - b\bar{x})\bar{v}_{\bar{x}} &= -b\bar{v} - a\bar{w}, \\ (\bar{u} - b\bar{x})\bar{w}_{\bar{x}} &= -b\bar{w} + a^{-1}\bar{v}, \\ (\bar{u} - b\bar{x})\bar{\rho}_{\bar{x}} + \bar{\rho}\bar{u}_{\bar{x}} &= -3b\bar{\rho}, \\ (\bar{u} - b\bar{x})\bar{S}_{\bar{x}} &= 0, \quad \bar{S} = \bar{p}\bar{\rho}^{-\frac{5}{3}}. \end{aligned} \quad (4)$$

При $\bar{u} - b\bar{x} \neq 0$ и $b \neq 0$ после введения новой независимой переменной s по формуле $\bar{x}_s = \bar{u} - b\bar{x}$ подмодель частично проинтегрирована с точностью до допускаемых (4) преобразований:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{x}_s + b\bar{x}, \quad \bar{v} = a \sin(s)e^{-bs}, \\ \bar{w} &= -\cos(s)e^{-bs}, \\ \bar{\rho}\bar{x}_s e^{4bs} &= \pm 1, \quad \bar{S} = \pm 1, \quad \bar{p} = \bar{S}\bar{\rho}^{\frac{5}{3}}, \end{aligned} \quad (5)$$

и сведена к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению 2-ого порядка [4]:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{ss} + 2b\bar{x}_s + (b^2 + 1)\bar{x} &= \\ = \frac{5}{3}e^{-\frac{8}{3}bs}\bar{x}_s^{-\frac{5}{3}}(\bar{x}_{ss}\bar{x}_s^{-1} + 4b). \end{aligned} \quad (6)$$

Понижением порядка уравнения (6) заменами

$$\bar{x} = k(s)e^{-bs}, \quad k_s = bk + m^3(k) \quad (7)$$

и растяжением

$$m \rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{8}} m, \quad k \rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{8}} b^{-1}k$$

уравнение (6) приведено к дробно-рациональному виду [4]:

$$\frac{dm}{dk} = \frac{-\varepsilon km^6 + m(3 - m^8)}{3(k + m^3)(m^8 - 1)}, \quad \varepsilon = (1 + b^2)b^{-2} > 1. \quad (8)$$

В работе [4] численно построена картина интегральных кривых этого уравнения и исследовано приближенное решение $k \approx -m^3/4$ при малых значениях k , полученное для сепаратрисы седла. В настоящей работе исследуется приближенное решение, соответствующее асимптотике интегральных кривых на бесконечности.

3. Асимптотика на бесконечности

В уравнении (8) вводится малый параметр δ :

$$k = \delta^{-5}k_1, \quad m = \delta m_1,$$

для представления интегральных кривых $m = m(k)$ при $k \rightarrow \pm\infty$:

$$\frac{dm_1}{dk_1} = \frac{-\varepsilon k_1 m_1^6 + m_1(3 - \delta_1 m_1^8)}{3(k_1 + \delta_1 m_1^3)(\delta_1 m_1^8 - 1)}, \quad \delta_1 = \delta^8. \quad (9)$$

Раскладывая правую часть (9) в ряд по степеням δ_1 , представляя решение в виде ряда

$$m_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_1^i m_1^i(k_1),$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях δ_1 , получим уравнения:

$$\frac{dm_1^0}{dk_1} = \frac{\varepsilon}{3}(m_1^0)^6 - \frac{m_1^0}{k_1}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{dm_1^1}{dk_1} &= (3k_1^2)^{-1} \left[6\varepsilon k_1^2 m_1^1 (m_1^0)^5 + \varepsilon k_1^2 (m_1^0)^{14} - \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon k_1 (m_1^0)^9 + 3(m_1^0)^4 - 3k_1 m_1^1 - 2k_1 (m_1^0)^9 \right], \\ &\dots \end{aligned}$$

Решая уравнение (10) для нулевого приближения, получаем

$$m_1^0 = k_1^{-1} \left(C^{-5} + \frac{5\varepsilon}{12} k_1^{-4} \right)^{-\frac{1}{5}},$$

откуда $m_1^0 \sim Ck_1^{-1}$ при $k_1 \rightarrow \pm\infty$.

Возвращаясь к переменным m, k , получаем, что при $m \rightarrow 0, k \rightarrow \pm\infty$ интегральные кривые уравнения (8) имеют асимптотику

$$m \sim C_1 k^{-1}, \quad C_1 = \delta^{-4}C. \quad (11)$$

По замечанию рецензента отметим, что данная асимптотика верна не для всех решений уравнения (8), в чем можно убедиться сделав замену $r = \frac{1}{k}$ в уравнении (8) и исследовав окрестность неэлементарной особой точки (0;0).

Асимптотике (11) соответствует приближенное решение уравнения (6)

$$\bar{x}^4 = \bar{x}_0^4 - \tilde{C}_1 e^{-4bs}, \quad \tilde{C}_1 = C_1^3 \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{2}} b^{-4}, \quad s \rightarrow \infty,$$

заданное в окрестности \bar{x}_0 :

$$\bar{x} \simeq \bar{x}_0. \tag{12}$$

Для этого приближенного решения формулы (5) принимают вид:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{b\bar{x}_0^4}{\bar{x}^3}, \\ \bar{v} &= -a \sin \left(\frac{1}{4b} \ln \left| \frac{\bar{x}_0^4 - \bar{x}^4}{\tilde{C}_1} \right| \right) \sqrt[4]{\left| \frac{\bar{x}_0^4 - \bar{x}^4}{\tilde{C}_1} \right|}, \\ \bar{w} &= -\cos \left(\frac{1}{4b} \ln \left| \frac{\bar{x}_0^4 - \bar{x}^4}{\tilde{C}_1} \right| \right) \sqrt[4]{\left| \frac{\bar{x}_0^4 - \bar{x}^4}{\tilde{C}_1} \right|}, \\ \bar{\rho} &= \pm \frac{\bar{x}^3}{b\tilde{C}_1}, \quad \bar{S} = \pm 1, \quad \bar{p} = \pm \bar{S} \frac{\bar{x}^5}{(b\tilde{C}_1)^{\frac{5}{3}}}. \end{aligned} \tag{13}$$

С формулами (13) представление решения (3) задает решение уравнений газовой динамики (1), не приведенное здесь в силу громоздкости.

Уравнение движения

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}$$

определяет мировые линии частиц для этого решения в $R^4(x, \bar{y} = \frac{y}{a}, z, t)$:

$$\begin{aligned} x^4 &= (\bar{x}_0^4 (e^{4b\tau} - 1) + \bar{x}_0^4) (1 + t^2)^2, \\ \bar{y} &= - \left(\sin \left(\frac{1}{4b} \ln \left| \frac{\bar{x}_0^4 - x_0^4}{\tilde{C}_1} \right| \right) \sqrt[4]{\left| \frac{\bar{x}_0^4 - x_0^4}{\tilde{C}_1} \right|} + z_0 \right) t + \bar{y}_0, \\ z &= \left(\cos \left(\frac{1}{4b} \ln \left| \frac{\bar{x}_0^4 - x_0^4}{\tilde{C}_1} \right| \right) \sqrt[4]{\left| \frac{\bar{x}_0^4 - x_0^4}{\tilde{C}_1} \right|} + \bar{y}_0 \right) t + z_0, \end{aligned} \tag{14}$$

где x_0, \bar{y}_0, z_0 — начальные положения частицы при $t = 0$ (лагранжевы координаты).

Движение газа является изэнтропическим и вихревым. При $t \rightarrow \infty$ газ растекается до вакуума

$$\begin{aligned} \rho &= \pm \frac{x^3}{b\tilde{C}_1(1+t^2)^3} \rightarrow 0, \\ p &= \pm S \frac{x^5}{(b\tilde{C}_1)^{\frac{5}{3}}(1+t^2)^5} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Температура определяется формулой (R — газовая постоянная)

$$T = p\rho^{-1}R^{-1} = SR^{-1} \frac{x^2}{(b\tilde{C}_1)^{\frac{2}{3}}(1+t^2)^2}$$

и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

4. Движение частиц

Из представления для инвариантной переменной \bar{x} , условия (12) и формул (14) следует, что $x_0 \simeq \bar{x}_0$. Тогда (14) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} x &\simeq x_0 e^{b\tau} \sqrt{1+t^2}, \\ \bar{y} &\simeq -z_0 t + \bar{y}_0, \\ z &\simeq \bar{y}_0 t + z_0. \end{aligned} \tag{15}$$

Якобиан перехода от лагранжевых координат к эйлеровым по формулам (15) равен $J = e^{b\tau}(1+t^2)^{\frac{3}{2}} > 0$. Мировые линии частиц не пересекаются. Только частица, находящаяся в точке с координатами (0;0;0), будет оставаться в покое. Частицы, находящиеся на оси OX , будут двигаться вдоль этой оси.

Проекция мировых линий частиц (15) на плоскость (x, t) представлена на рис. 1. График имеет точку минимума при $t = -b : x_{min} = x_0 e^{-b \arctg b} \sqrt{1+b^2}$ и наклонные асимптоты при $t \rightarrow +\infty : x_+ = x_0 e^{\frac{b\tau}{2}}(t-b)$ и при $t \rightarrow -\infty : x_- = -x_0 e^{-\frac{b\tau}{2}}(t-b)$. При $x_0 = \pm 1$ угол между асимптотами будет равен 90 градусам для любого b .

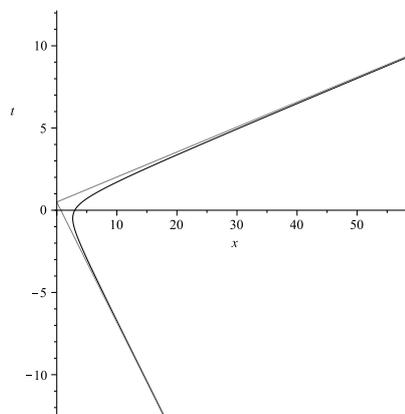


Рис. 1. Проекция кривых (15) на плоскость (x, t) при $b = 0.5, x_0 = 3$

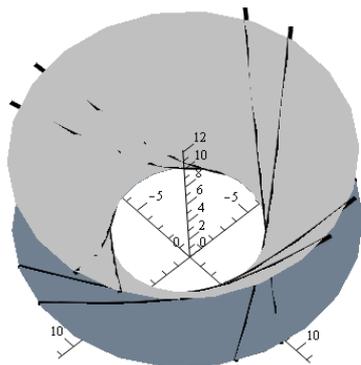


Рис. 2. Поверхность, на которой находятся траектории частиц $b = 0.5, x_0 = 3, r = 5, t = -2..2$ (вид сверху)

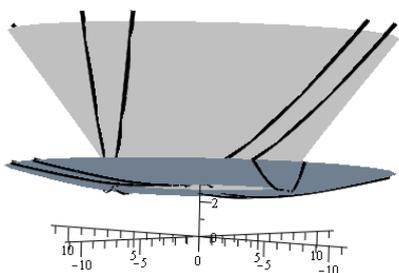


Рис. 3. Поверхность, на которой находятся траектории частиц $b = 0.5, x_0 = 3, r = 5, t = -2..2$ (вид сбоку)

Проекция движения частиц на плоскость (\bar{y}, z) являются прямыми линиями с направляющим вектором $\vec{q} = (-z_0, \bar{y}_0)$. Нахождение кривой $F(\bar{y}_0, z_0)$, с которой точки начинают двигаться по касательным, требует выполнения условия коллинеарности касательной вектору \vec{q} . Тогда направление нормали $\vec{n} = (F_{\bar{y}_0}, F_{z_0})$ должно быть коллинеарно (\bar{y}_0, z_0) :

$$\frac{F_{\bar{y}_0}}{\bar{y}_0} = \frac{F_{z_0}}{z_0}.$$

Искомая кривая есть окружность с центром в точке $(0,0)$ произвольного радиуса r :

$$\bar{y}_0^2 + z_0^2 = r^2. \tag{16}$$

Из равенств (15) выражаются \bar{y}_0, z_0 :

$$\bar{y}_0 = \frac{\bar{y} + zt}{1 + t^2}, z_0 = \frac{z - \bar{y}t}{1 + t^2}.$$

Из (16) следует равенство:

$$\bar{y}^2 + z^2 = r^2(1 + t^2). \tag{17}$$

Проекция частиц на плоскость (\bar{y}, z) , в начальный момент времени находящихся на окружности (16), в

момент времени t будут находиться на окружности (17). Уравнение (17) совместно с первым уравнением (15) задают поверхность, на которой будут находиться траектории частиц (рис. 2, 3).

Итак, при $x \neq 0$ частицы будут двигаться по плоским кривым, лежащим на поверхностях вращения с осью вращения, совпадающей с осью Ox . При $t < -b$ ($b > 0$) частицы будут приближаться к плоскости $x = x_0 e^{-b \operatorname{arctg} b \sqrt{1 + b^2}}$, при $t > -b$ отдаляться от нее. Частицы, лежащие в плоскости $x = 0$ в момент времени $t = 0$ на окружности (16), будут оставаться в этой плоскости на окружностях (17), приближаясь ($t < 0$) к окружности (16) или отдаляясь ($t > 0$) от нее. Описанное движение можно рассматривать как отражение падающего газа от стенки $x = 0$. Параметр b влияет на то, насколько полого будет падать и отражаться газ.

5. Заключение

Полученные в работе решения (13), (3) обобщают частное решение подмодели (4) при $\bar{u} = b\bar{x}$ и $b = 0$ ($m = 0$ в уравнении (8)). Это решение исследовано в работе [5], где показано, что оно задает движение частиц газа по гиперболам, лежащим на конусах.

Исследованное в работе [4] приближенное решение в сравнении с решением (13), (3) задает более сложную конфигурацию траекторий частиц, кроме того, поверхности вращений из траекторий для него имеют разные оси вращений.

Список литературы / References

- [1] Овсянников Л.В. Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55. Ovsyannikov L.V. The «podmodeli» program. Gas dynamics // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1994. V. 58, Iss. 4. Pp. 601–627. DOI: 10.1016/0021-8928(94)90137-6
- [2] Овсянников Л.В. Некоторые итоги выполнения программы «ПОДМОДЕЛИ» для уравнений газовой динамики // Прикладная математика и механика. 1999. Т. 63, № 3. С. 362–372. EDN: yhiucd Ovsyannikov L.V. Some results of the implementation of the "Podmodeli" program for the gas dynamics equations // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1999. V. 63, Iss. 3. Pp. 349–358. DOI: 10.1016/S0021-8928(99)00046-5
- [3] Черевко А.А. Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых системой уравнений газовой динамики с уравнением состояния $p = f(S)\rho^{5/3}$ / Препр. СО РАН. Ин-т гидродинамики; № 4–96. Новосибирск, 1996. 39 с. Cherevko A.A. [An optimal system of subalgebras for the Lie algebra of operators allowed by the system of equations of gas dynamics with the equation of state $p = f(S)\rho^{5/3}$] / Preprint SO RAN. In-t gidrodinamiki. No. 4. 1996. 39 p. (in Russian).
- [4] Шаяхметова Р.Ф. Вихревой разлет одноатомного газа вдоль плоских кривых // Прикладная механика и техническая физика. 2018. Т. 59, № 2. С. 63–73. DOI: 10.15372/PMTF20180107 Shayakhmetova R.F. Vortex Scattering of Monatomic Gas Along Plane Curves // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2018. V. 59. Pp. 241–250. DOI: 10.1134/S0021894418020074
- [5] Шаяхметова Р.Ф. Завихренный разлет одноатомного газа // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. Вып. 10. Под ред. Урманчеева С.Ф. Уфа: Нефтегазовое дело, 2014. С. 110–113. Shayakhmetova R.F. Vortex expansion of the monatomic gas // Proceedings of the Mavlyutov Institute of Mechanics. No. 10. 2014. Pp. 110–113. (in Russian). DOI: 10.21662/uim2014.1.021

Сведения об авторах / Information about the Authors

Рената Фуатовна Никонорова

канд. физ.-мат. наук

Институт Механики им. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа, Россия

Renata Fuatovna Nikonorova

Ph.D. (Phys. & Math.)

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Ufa, Russia

renatanikon@gmail.com

ORCID: [0000-0001-9378-5078](https://orcid.org/0000-0001-9378-5078)

Лилия Зинфировна Уразбахтина

канд. физ.-мат. наук

Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

Liliia Zinfirovna Urazbakhtina

Ph.D. (Phys. & Math.)

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

ylz@yandex.ru

ORCID: [0009-0006-9204-8424](https://orcid.org/0009-0006-9204-8424)



<http://mfs.uimech.org/mfs2024.4.025>

DOI: 10.21662/mfs2024.4.025

УДК / UDC: 539.311

Получена / Received: 31.10.2024

Принята / Accepted: 2.12.2024



Изгиб однослойного графена

А.Г. Хакимов

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа

E-mail: hakimov@anrb.ru

Представлена аналитическая геометрически нелинейная модель гибкого однослойного графена или гибкой балки, для элемента которой записываются уравнения равновесия в проекциях сил на естественные оси координат: касательную, нормальную оси и сумму моментов относительно оси совпадающей с бинормалью. Изгибающий момент определяется как произведение изгибающей жесткости на изменение кривизны, взятое в точном виде. Сформулирована в безразмерном виде нелинейная краевая задача для однослойного графена или гибкой балки в деформированном состоянии и получены точные аналитические общие решения в эллиптических функциях, на основе которых определяются формы деформирования гибкой балки, распределение усилий натяжения, перерезывающих сил, изгибающих моментов. Также дается точное аналитическое решение для случая действия на свободном конце безразмерного изгибающего момента при нулевой перерезывающей силе в эллиптических функциях. Действие усилия натяжения учитывается параметром, зависящим от кривизны и усилия натяжения на свободном конце. Получены формулы для нахождения формы однослойного графена или гибкой балки и безразмерных усилий натяжения, перерезывающей силы и изгибающего момента и проведены соответствующие расчеты. Если на свободном конце усилие натяжения равно нулю, то кривизна поперечного сечения также равна нулю, поэтому изгибающий момент равен нулю, тогда дифференциальное уравнение изгиба упрощается. Учет действия среднего давления задачу не усложняет. В дифференциальном уравнении при искомой функции появляется дополнительный параметр, учитывающий действие среднего давления. Влияние среднего давления зависит от толщины гибкого однослойного графена или гибкой балки.

Ключевые слова: однослойный графен, цилиндрический изгиб, форма, усилия, перерезывающие силы, изгибающий момент

Работа выполнена в рамках государственного задания FMRS-2023-0015

Bending of single-layer graphene

A.G. Khakimov

Mavlyutov Institute of Mechanics URFS RAS, Ufa, Russia

E-mail: hakimov@anrb.ru

An analytical geometrically nonlinear model of flexible single-layer graphene or a flexible beam is presented, for an element of which the equilibrium equations are written in projections of forces onto natural coordinate axes: tangent, normal to the axis, and the sum of moments relative to the axis coinciding with the binormal. The bending moment is defined as the product of the bending rigidity and the change in curvature taken in exact form. A nonlinear boundary value problem for single-layer graphene or a flexible beam in a deformed state is formulated in dimensionless form and exact analytical general solutions are obtained in elliptic functions, based on which the deformation modes of the flexible beam, distribution of tension forces, shear forces, and bending moments are determined. An exact analytical solution is also given for the case of a dimensionless bending moment acting at the free end with zero shear force in elliptic functions. The action of the tension force is taken into account by a parameter depending on the curvature and the tension force at the free end. Formulas for finding the shape of single-layer graphene or a flexible beam and dimensionless tension forces are obtained. The shear force and bending moment are calculated accordingly. If the tension force at the free end is zero, the curvature of the cross-section is also zero, so the bending moment is zero, then the differential equation of bending is simplified. Taking into account the effect of the average pressure does not complicate the task. In the differential equation, an additional parameter appears for the desired function, taking into account the effect of the average pressure. The effect of the average pressure depends on the thickness of the flexible single-layer graphene or flexible beam.

Keywords: single-layer graphene, cylindrical bending, shape, forces, shear forces, bending moment

1. Введение

Линейный изгиб консольного стержня, находящегося под всесторонним давлением и продольной силой, рассматривается в статической и динамической постановках. Учитывается поперечная распределенная сила на стержень, возникающая при изгибе в результате образования разности площадей выпуклой и вогнутой частей поверхности. Сжимающая сила может быть неизменного направления и изменяющейся при изгибе. В частности, следящая сила образуется в результате действия давления на концевое сечение стержня. Дается сравнение с классической задачей об устойчивости. Изучены особенности одновременного действия сил неизменного и изменяющегося направлений [1].

Как отмечено в [1], начиная с обобщающих работ по теории тонких пластин и оболочек [2, 3] до недавней монографии [4], поперечная распределенная сила принимается равной $q = p_1 - p_2$, где p_1 и p_2 — избыточные давления на поверхности, перпендикулярные плоскости изгиба. Данные давления положительны, если общее давление превышает атмосферное давление p_0 , и отрицательны при меньшем значении общего давления, чем p_0 . Учет разности площадей выпуклой и вогнутой поверхностей, появляющейся при изгибе стержня и цилиндрическом изгибе пластины, приводит к выражению, которое приводится в [5, 6], откуда следует, что распределенная поперечная сила, возникающая при изгибе в результате образования разности площадей выпуклой и вогнутой частей поверхности, направлена в сторону вогнутости.

В [7] представлена аналитическая геометрически нелинейная модель гибкого цилиндрического шпангоута (обода) трансформируемого прецизионного крупногабаритного рефлектора применяемого в космической технике антенн, изготовленного с использованием полимерных композиционных материалов с памятью формы. Сформулирована нелинейная краевая задача для шпангоута в деформированном (свернутом) состоянии и получены точные аналитические решения в эллиптических функциях и интегралах, описывающие формы деформирования обода. С использованием геометрически нелинейной модели получены точные аналитические решения, позволяющие определять предварительные геометрические размеры и оптимальную форму гибкого шпангоута, а также оценивать накопленную энергию.

В статье [8] исследуются задачи статической и динамической устойчивости тонкого гибкого стержня под действием осевого сжатия с точным учетом геометрической нелинейности и приводится обзор работ по нелинейным задачам, теории и расчету гибких упругих стержней.

В работах [9–11] исследованы задачи о струйном обтекании упругой пластины и цилиндрической оболочки малой кривизны. В [12] доказана теорема о существовании и единственности решения нелинейной задачи при заданных условиях на параметры, и это решение может

быть найдено методом простых итераций при любом начальном приближении. В линеаризованной постановке названная задача рассматривалась в [13]. Представлены результаты моделирования струйного безотрывного обтекания упругой цилиндрической оболочки с нелинейными граничными условиями. Учитывается действие среднего давления на оболочку. Решение получено в виде рядов по степеням параметра аэрогидроупругости. Приводятся формы поперечного сечения оболочки, распределение давлений на деформированной и недеформированной оболочках, распределение безразмерного изгибающего момента, перерезывающей силы, усилия натяжения [14].

В настоящей работе представлена аналитическая геометрически нелинейная модель гибкого однослойного графена или гибкой балки с учетом действия среднего давления.

2. Постановка задачи

Рассматривается цилиндрический изгиб однослойного графена (рис. 1). Ставится задача определения формы, усилий и моментов в однослойном графене. Рассматривается цилиндрический изгиб однослойного графена, для элемента которого запишем уравнения равновесия [15]:

$$\frac{dT}{ds} + \frac{Q}{R} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{dQ}{ds} - \frac{T}{R} = 0; \tag{2}$$

$$Q = \frac{dM}{ds}, \tag{3}$$

где T, Q, M — усилие натяжения, перерезывающая сила и изгибающий момент; R, s — радиус кривизны и длина дуги поперечного сечения однослойного графена. Изгибающий момент определяется как

$$M = D \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_N} \right), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \tag{4}$$

где E, ν, h — модуль упругости, коэффициент Пуассона и толщина однослойного графена; D — цилиндрическая изгибная жесткость однослойного графена; R_N — радиус кривизны в недеформированном начальном

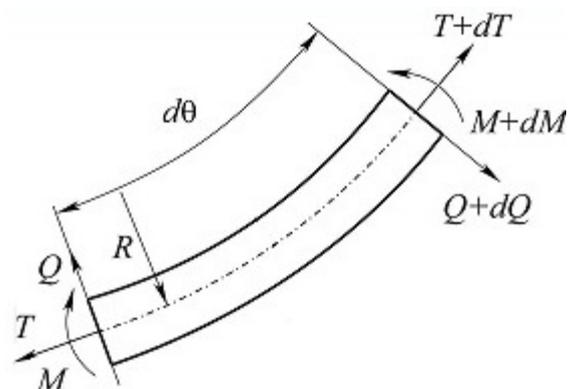


Рис. 1. Расчетная схема

состоянии. Для однослойного графена $R_N = \infty$. Из (1) с учетом (3) и (4) следует

$$T = T_0 - \frac{D}{2} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_0^2} \right), \quad (5)$$

где T_0, R_0 — усилие натяжения и радиус кривизны линии поперечного сечения деформированного однослойного графена в точке O .

Уравнение (2) с учетом (3) и (5) запишется как

$$\frac{d^2(1/R)}{ds^2} + \frac{1}{2R^3} - \left(\frac{1}{2R_0^2} + \frac{T_0}{D} \right) \frac{1}{R} = 0. \quad (6)$$

Используя соотношения

$$u = \frac{a}{R}, \quad \xi = \frac{s}{a}, \quad x = \frac{x^*}{a}, \quad y = \frac{y^*}{a}, \quad t = \frac{Ta^2}{D},$$

$$q = \frac{Qa^2}{D}, \quad m = \frac{Ma}{D}, \quad \alpha = a^2 \left(\frac{1}{2R_0^2} + \frac{T_0}{D} \right),$$

уравнение (6) примет вид:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{u^3}{2} - \alpha u = 0, \quad (7)$$

где x^*, y^* — размерные координаты. Общее решение дифференциального уравнения (7) выражается через эллиптический синус $\text{sn}(\xi)$:

$$u(\xi) = 2C_2 \text{sn} \left[(\eta_1 \xi + 2C_1) \eta, \frac{C_2}{\eta_2} \right] \eta,$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\alpha}{-1 + 4\alpha + C_2^2}}, \quad \eta_1 = \sqrt{1 - 4\alpha},$$

$$\eta_2 = \sqrt{-1 + 4\alpha},$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования. Решение уравнения (7) с условиями при $\xi = 0$: $u = m_0, du/d\xi = 0$ выражается через эллиптический синус $\text{sn}(\xi)$ и обратный эллиптический синус $\text{arcsn}(\xi)$:

$$u(\xi) = m_0 \eta_3 \text{sn} \left[\frac{1}{2} \text{Im}_0 \xi + \text{arcsn} \left((\eta_3)^{-1}, \eta_3 \right), \eta_3 \right],$$

$$\eta_3 = \frac{\sqrt{4\alpha - m_0^2}}{m_0}.$$

Производная $du(\xi)/d\xi$ определяется через эллиптический косинус $\text{cn}(\xi)$ и дельта амплитуду $dn(\xi)$:

$$\frac{du(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{2} \text{Im}_0^2 \eta_3 [\text{cn}(\eta_4) \text{dn}(\eta_4)],$$

$$\eta_4 = \left[\frac{1}{2} \text{Im}_0 \xi + \text{arcsn} \left((\eta_3)^{-1}, \eta_3 \right), \eta_3 \right].$$

Угол θ между касательной к линии поперечного сечения графена и осью x находится

$$\theta(\xi) = \int_0^\xi u(\xi_1) d\xi_1.$$

Интегрированием уравнений

$$\frac{dx}{d\xi} = \cos \theta, \quad \frac{dy}{d\xi} = \sin \theta,$$

$$x(\xi) = \int_0^\xi \cos \theta(\xi_1) d\xi_1, \quad y(\xi) = \int_0^\xi \sin \theta(\xi_1) d\xi_1$$

находится безразмерная форма однослойного графена.

Безразмерные усилия натяжения t , перерезывающая сила q и момент m ищутся:

$$t = \frac{Ta^2}{D} = \frac{T_0 a^2}{D} - \frac{D}{2D} \left(\frac{a^2}{R^2} - \frac{a^2}{R_0^2} \right) =$$

$$= t_0 - \frac{1}{2} (u^2 - m_0^2),$$

$$q = \frac{du}{d\xi}, \quad m = u, \quad \alpha = \frac{m_0^2}{2} + t_0.$$

На рис. 2(а) приводится форма поперечного сечения графена. Распределение безразмерного усилия t , изгибающего момента m , перерезывающей силы q в графене приводятся на рис. 2(б). Видно, что усилия натяжения меньше в точках, удаленных от оси x .

Отметим, что при стремлении безразмерного усилия натяжения t_0 к нулю безразмерный изгибающий момент m стремится к m_0 .

Если в точке O усилие натяжения равно нулю $T_0 = 0$, кривизна поперечного сечения k также равна нулю, изгибающий момент $m_0 = 0$, поэтому $T = -\frac{D}{2} \frac{1}{R^2}$.

Уравнение (2) с учетом (3) запишется

$$\frac{d^2(1/R)}{ds^2} + \frac{1}{2R^3} = 0. \quad (8)$$

Переходя к безразмерным переменным, запишем уравнение (8) в следующем виде:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{u^3}{2} = 0, \quad (9)$$

Решение уравнения (9) с условиями при $\xi = 0$: $u = 0, du/d\xi = q_0$ выражается через эллиптический синус:

$$u(\xi) = \sqrt{2} \sqrt{q_0} \text{sn} \left(\frac{\sqrt{2q_0}}{2} \xi, i \right).$$

Безразмерные усилия и момент определяются:

$$q = \frac{du}{d\xi} = q_0 \text{cn} \left(\frac{\sqrt{2q_0}}{2} \xi, i \right) \cdot \text{dn} \left(\frac{\sqrt{2q_0}}{2} \xi, i \right),$$

$$t = -\frac{u^2}{2}, \quad m = u,$$

где перерезывающая сила определяется через эллиптические косинус cn и дельта амплитуду dn . На рис. 3(а) приводятся формы поперечного сечения графена при различных q_0 . С ростом перерезывающей силы q_0 происходит увеличение прогибов однослойного графена. Распределение безразмерного усилия t , изгибающего момента m , перерезывающей силы q в графене для $q_0 = 2$ приводится на рис. 3(б). Видно, что усилия натяжения меньше в точках, удаленных от оси x .

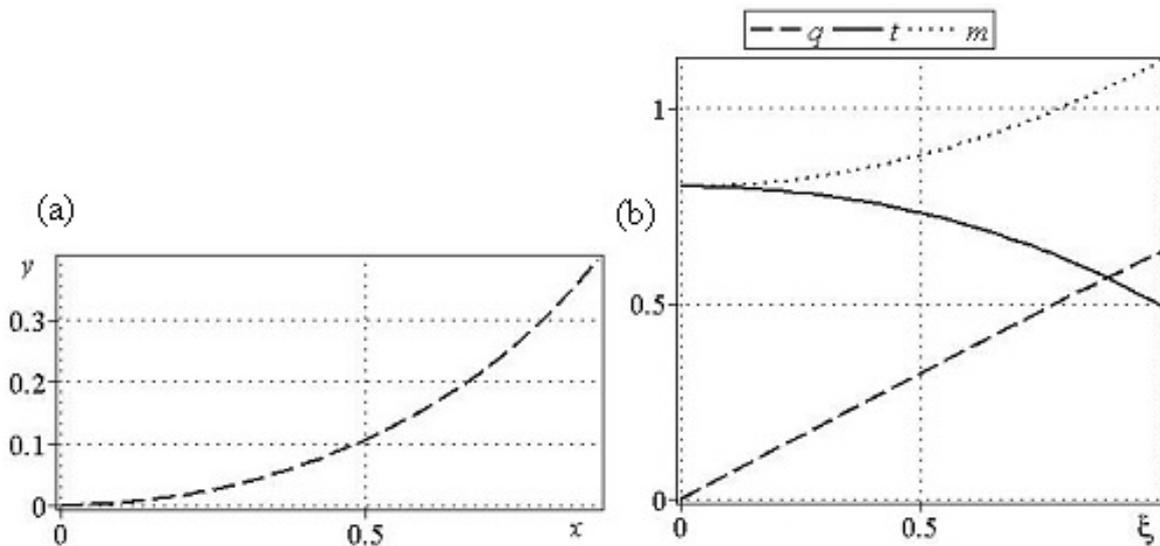


Рис. 2. Для параметров $m_0 = 0.8, t_0 = 0.8$: (a) форма поперечного сечения графена; (b) зависимости безразмерного усилия t , изгибающего момента m , перерезывающей силы q в графене от безразмерной дуговой абсциссы ξ

3. Цилиндрический изгиб однослойного графена под действием среднего давления

В этом случае уравнения (1)–(3) примут вид:

$$\frac{dT}{ds} + \frac{Q}{R} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{dQ}{ds} - \frac{T}{R} - \frac{Ph}{R} = 0, \tag{11}$$

$$Q = \frac{dM}{ds}, \tag{12}$$

где P — давление в окружающей среде, которое не действует на торец однослойного графена. Изгибающий момент определяется как

$$M = D \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_N} \right), \tag{13}$$

где R_N — радиус кривизны поперечного сечения однослойного графена в недеформированном начальном состоянии.

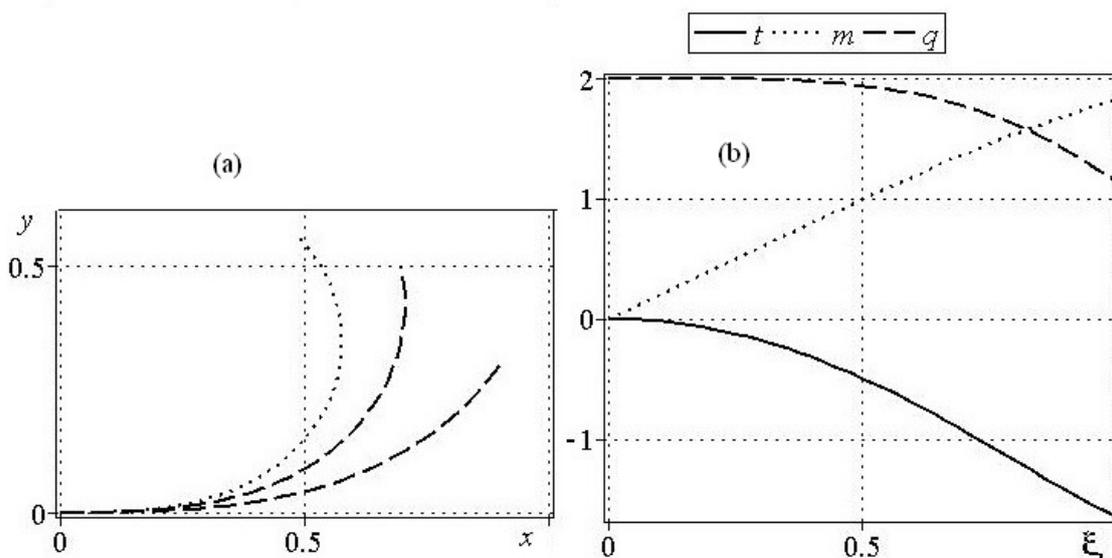


Рис. 3. Для параметров $m_0 = 0, t_0 = 0$: (a) формы поперечного сечения графена при различных $q_0 = 6; 4; 2$ (пунктирная, штриховая, сплошная линии соответственно); (b) зависимости безразмерного усилия t , изгибающего момента m , перерезывающей силы q в графене от безразмерной дуговой абсциссы ξ $q_0 = 2$

Из (10) с учетом (12) и (13) следует

$$T = T_0 - \frac{D}{2} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_0^2} \right). \quad (14)$$

Уравнение (11) с учетом (12) и (14) запишется

$$\frac{d^2(1/R)}{ds^2} + \frac{1}{2R^3} - \frac{Ph}{DR} - \left(\frac{1}{2R_0^2} + \frac{T_0}{D} \right) \frac{1}{R} = 0. \quad (15)$$

Используя соотношения

$$u = \frac{a}{R}, \quad \xi = \frac{s}{a}, \quad x = \frac{x^*}{a}, \quad y = \frac{y^*}{a}, \quad t = \frac{Ta^2}{D},$$

$$q = \frac{Qa^2}{D}, \quad m = \frac{Ma}{D}, \quad \alpha = a^2 \left(\frac{1}{2R_0^2} + \frac{T_0}{D} \right),$$

$$\beta = \frac{Pha^2}{D},$$

уравнение (15) примет следующий вид:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{u^3}{2} - (\alpha + \beta)u = 0, \quad (16)$$

Отметим, что учет действия среднего давления задачу не усложняет, а в дифференциальном уравнении (16) при искомой функции появляется дополнительный параметр, учитывающий действие среднего давления. Влияние среднего давления зависит от толщины гибкого однослойного графена или гибкой балки.

Решение уравнения (16) с условиями при $\xi = 0$: $u = m_0, du/d\xi = 0$ выражается через эллиптический си-

нус $\text{sn}(\xi)$ и обратный эллиптический синус $\text{arcsn}(\xi)$:

$$u(\xi) = m_0 \eta_5 \text{sn} \left[\frac{1}{2} \text{Im}_0 \xi + \text{arcsn} \left(\frac{1}{\eta_5}, \eta_5 \right), \eta_5 \right],$$

$$\eta_5 = \frac{1}{m_0} \sqrt{4(\alpha + \beta) - m_0^2}.$$

Производная $du(\xi)/d\xi$ определяется через эллиптический косинус $\text{cn}(\xi)$ и дельта амплитуду $\text{dn}(\xi)$:

$$\frac{du(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{2} \text{Im}_0^2 \eta_5 [\text{cn}(\eta_6) \text{dn}(\eta_6)],$$

$$\eta_6 = \left(\frac{1}{2} \text{Im}_0 \xi + \text{arcsn} \left((\eta_5)^{-1}, \eta_5 \right), \eta_5 \right).$$

На рис. 4(а) приводится форма поперечного сечения графена. Распределение безразмерного усилия t , изгибающего момента m , перерезывающей силы q в графене приводится на рис. 4(б). Видно, что усилия натяжения меньше в точках, удаленных от оси x . С увеличением q происходит увеличение прогибов однослойного графена.

4. Заключение

С увеличением перерезывающей силы q_0 происходит увеличение прогибов однослойного графена. Усилия натяжения меньше в точках, удаленных от оси x . Учет действия среднего давления задачу не усложняет. В дифференциальном уравнении при искомой функции появляется дополнительный параметр, учитывающий действие среднего давления. Влияние среднего давления зависит от толщины гибкого однослойного графена или гибкой балки.

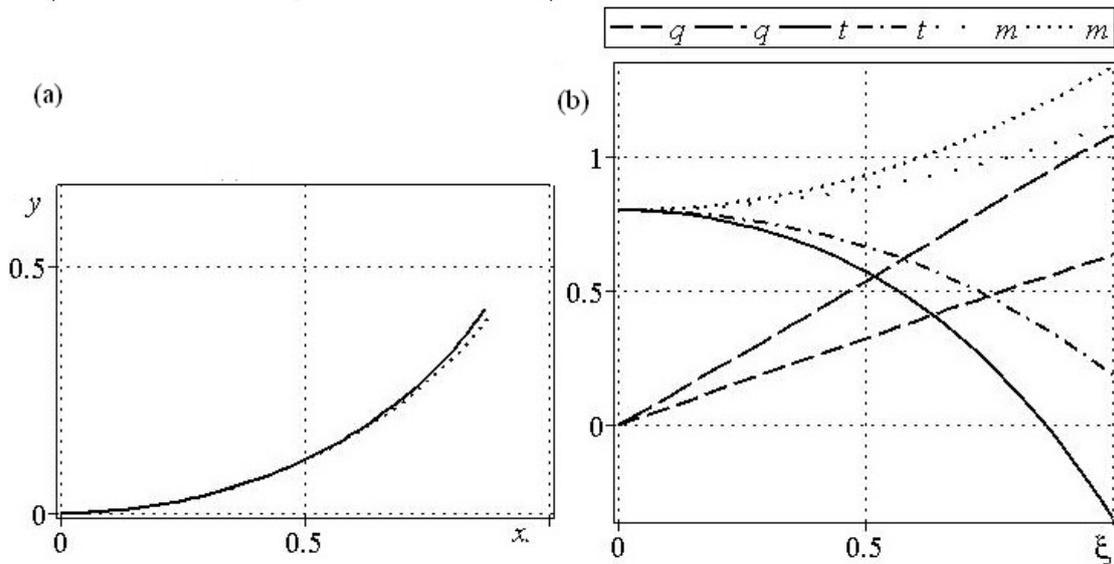


Рис. 4. Для параметров $m_0 = 0.8, t_0 = 0.8$: (а) форма поперечного сечения графена для параметра $\beta = 0.5; 0$ (сплошная и пунктирные линии соответственно); (б) зависимости безразмерного усилия t , изгибающего момента m , перерезывающей силы q в графене от безразмерной дуговой абсциссы ξ для параметра $\beta = 0.5$ (сплошная, пунктирная, длинная штриховая линии соответственно) и $\beta=0$ (штрихпунктирная, спецпунктирная, штриховая линии соответственно)

Автор благодарит член–корреспондента РАН Марата Аксановича Ильгамова за постановку и обсуждение задачи.

Список литературы / References

- [1] Ильгамов М.А. Изгиб и устойчивость консольного стержня под действием давления на его поверхности и продольной силы // Известия российской академии наук. Механика твердого тела. 2021. № 4. С. 77–88.
DOI: [10.31857/S0572329921040061](https://doi.org/10.31857/S0572329921040061)
Ilgamov M.A. Bending and stability of a cantilever bar under the action of pressure on its surface and longitudinal force // *Mechanics of Solids*. 2021. Vol. 56, No. 4. Pp. 495–504.
DOI: [10.3103/S0025654421040087](https://doi.org/10.3103/S0025654421040087)
- [2] Стрэтт Дж.В. Теория звука. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955. 504 с. Rayleigh Strutt J.W. *The Theory of Sound*. Vol. 1. London: Macmillan, 1894. 500 p.
- [3] Ляв А. Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 674 с. Love A. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge: Univ. Press, 1927. 643 p.
- [4] Shen H.Sh. *Postbuckling Behavior of Plates and Shells*. Shanghai Jiao Tong University, 2017. 675 p.
- [5] Ильгамов М.А. Влияние давления окружающей среды на изгиб тонкой пластины и плёнки // ДАН. 2017. Т. 476, № 4. С. 402–405.
DOI: [10.7868/S086956521728009X](https://doi.org/10.7868/S086956521728009X)
Ilgamov M.A. Influence of the ambient pressure on thin plate and film bending // *Doklady Physics*. 2017. Vol. 62, No. 10. Pp. 461–464.
DOI: [10.1134/S1028335817100020](https://doi.org/10.1134/S1028335817100020)
- [6] Ильгамов М.А. Изгибные колебания пластины при изменении среднего давления на ее поверхностях // Акустический журнал. 2018. Т. 64, № 5. С. 598–604.
Ilgamov M.A. Bending vibrations of a plate with a change in the average pressure on its surfaces // *Acoustic journal*. 2018. Vol. 64, No. 5. Pp. 598–604. (in Russian)
DOI: [10.1134/S0320791918050039](https://doi.org/10.1134/S0320791918050039)
- [7] Охоткин К.Г., Власов А.Ю., Захаров Ю.В., Аннин Б.Д. Аналитическое моделирование гибкого обода рефлекторов космических антенн // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 58, № 5. С. 190–200.
DOI: [10.15372/PMTF20170519](https://doi.org/10.15372/PMTF20170519)
Okhotkin K.G., Vlasov A.Y., Zakharov Y.V., Annin B.D. Analytical modeling of the flexible rim of space antenna reflectors // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2017. Vol. 58, No. 5. Pp. 924–932.
DOI: [10.1134/S0021894417050194](https://doi.org/10.1134/S0021894417050194)
- [8] Аннин Б.Д., Власов А.Ю., Захаров Ю.В., Охоткин К.Г. Исследование статической и динамической устойчивости гибких стержней в геометрически нелинейной постановке // Известия российской академии наук. Механика твердого тела. 2017. № 4. С. 6–18.
EDN: [zbpuwl](https://www.edn.ru/zbpuwl)
- [9] Киселев О.М., Рапопорт Э.Ф. О струйном обтекании упругой пластины // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1976. № 4. С. 35–42.
<https://mzg.ipmnet.ru/ru/get/1976/4/35-42>
Kiselev O.M., Rapoport, E.F. Jet flow around an elastic plate // *Fluid Dyn*. 1976. Vol. 11, No. 4. Pp. 520–526.
DOI: [10.1007/BF01012996](https://doi.org/10.1007/BF01012996)
- [10] Киселев О.М., Рапопорт Э.Ф. О струйном обтекании упругой оболочки // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1977. № 2. С. 24–32.
<https://mzg.ipmnet.ru/ru/get/1977/2/24-32>
Kiselev O.M., Rapoport E.F. Jet flow around an elastic shell // *Fluid Dyn*. 1977, Vol. 12, No. 2. Pp. 186–192.
DOI: [10.1007/BF01050686](https://doi.org/10.1007/BF01050686)
- [11] Хакимов А.Г. Обтекание гибкой цилиндрической оболочки плоским потоком идеальной жидкости // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1975. № 6. С. 147–151.
<https://mzg.ipmnet.ru/ru/get/1975/6/147-151>
Khakimov A.G. Flow around a flexible cylindrical shell by a plane stream of an ideal liquid // *Fluid Dyn*. 1975. Vol. 10, No. 6. Pp. 992–996.
DOI: [10.1007/BF01023279](https://doi.org/10.1007/BF01023279)
- [12] Киселев О.М., Безотрывное обтекание круговой цилиндрической оболочки // Тр. сем. по краев. задачам. 1982. Вып. 18. С. 104–115. Kiselev O.M., Non-separation flow around a circular cylindrical shell // *Proc. sem. on boundary value problems*. 1982. Issue 18. Pp. 104–115.
- [13] Ильгамов М.А. Изгиб и устойчивость цилиндрической оболочки при ее поперечном обтекании жидкостью // Прикл. мех. 1975. Т. 11, № 3. С. 12–19.
Ilgamov M.A. Bending and stability of a cylindrical shell during transverse flow of liquid around it // *Appl. mech. [Prikladnaya mehanika]* 1975. Vol. 11, No. 3. Pp. 12–19.
- [14] Хакимов А.Г. К задаче об обтекании круговой цилиндрической оболочки // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2020. № 2. С. 12–18.
DOI: [10.31857/S0568528120020073](https://doi.org/10.31857/S0568528120020073)
Khakimov A.G. Flow around a Circular Cylindrical Shell // *Fluid Dynamics*. 2020. Vol. 55, No. 2. Pp. 154–161.
DOI: [10.1134/S001546282002007X](https://doi.org/10.1134/S001546282002007X)
- [15] Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. М.: Изд-во Московского университета. 1969. 695 с. Ogibalov P.M., Koltunov M.A. *Shells and plates*. Moscow: Moscow University Publishing. 1969. 695 p.

Сведения об авторах / Information about the Authors

Аким Гайфуллинович Хакимов

канд. физ.-мат. наук, доцент
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа,
Россия

Akim Gayfullinovich Khakimov

PhD (Phys. & Math.), Assist. Prof.

Mavlyutov Institute of Mechanics URFS RAS, Ufa, Russia

hakimov@anrb.ru

ORCID: [0000-0003-4093-5380](https://orcid.org/0000-0003-4093-5380)



К юбилею Ахметова Альфира Тимирзяновича



2 января 2025 года 80-летний юбилей отмечает кандидат физико–математических наук, ведущий научный сотрудник и заведующий лабораторией «Экспериментальная гидродинамика» Института механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН (ИМех УФИЦ РАН) Альфир Тимирзянович Ахметов.

Альфир Тимирзянович в 1968 году окончил физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова по специальности «Физика». Там же он продолжил образование в аспирантуре, а с 1971 по 1976 год работал ассистентом на физическом факультете Башкирского государственного университета. Затем для завершения цикла начатых ранее исследований перешёл в Отдел физики и математики Башкирского филиала АН СССР. В 1980 году А.Т. Ахметов успешно защитил диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.15 – «Физика и технология наноструктур, атомная и молекулярная физика» на тему «Исследование спектров тонкой структуры линии рэлеевского рассеяния в жидкостях на кривой насыщения» в диссертационном совете Московского университета. В 1986 году вместе с группой молодых учёных, учеников и коллег профессора МГУ Р.И. Нигматулина переехал в

Тюмень. В этот период в Тюмени был образован Тюменский научный центр АН СССР, в состав которого вошёл Институт проблем освоения севера Сибирского отделения АН СССР. В этом институте Альфир Тимирзянович начал работу в должности старшего научного сотрудника, в 1989 году, после реорганизации Тюменского научного центра, продолжил работу уже в должности заведующего экспериментальной лабораторией сначала в Отделении механики Института теплофизики Сибирского отделения АН СССР, а затем, с 1990 г. — в Институте механики многофазных систем Сибирского отделения РАН. В 2003 году Альфир Тимирзянович вернулся в Уфу и в Институте механики Уфимского научного центра РАН организовал новую лабораторию «Экспериментальная гидродинамика».

Альфир Тимирзянович Ахметов является признанным в стране высококвалифицированным специалистом в области механики многофазных систем и экспертом по экспериментальным методам исследования волновых и фильтрационных процессов. Круг его научных интересов связан с гидродинамикой дисперсных систем в микроканалах, волновой динамикой гетерогенных и реологически сложных сред при наличии физико-химических взаимодействий.

Приведём важнейшие результаты научной деятельности Альфира Тимирзяновича:

- изучение механизма вытеснения нефти мицеллярными растворами из плоской прозрачной модели показало, что формирование зоны повышенной нефтенасыщенности связано с изменением характера смачиваемости нефти на границе с пористой средой и падением поверхностного натяжения на границе с вытесняющей жидкостью [1];
- сравнительный анализ прямых и обратных водоуглеводородных эмульсий с различным распределением размеров капель при одном и том же составе показал увеличение вязкости с ростом концентрации или дисперсности эмульсий [2, 3];
- обнаружен эффект динамического запираания: при течении эмульсии через микроканалы со ступенчатым сужением её объёмный расход через некоторый промежуток времени снижается на несколько порядков. Физическая суть эффекта состоит в увеличении внутреннего трения дисперсной системы из-за деформации капель эмульсии

и соответствующего увеличения их удельной поверхности контакта. Сброс перепада давления в капилляре приводит к кратковременному увеличению расхода благодаря восстановлению сферической формы капель и уменьшению зоны контакта между ними [4, 5];

- при течении цельной крови в канале со стенозом обнаружена преимущественная ориентация эритроцитов вдоль линий тока в вертикальной плоскости. Установлено, что в зоне торможения за сужением эритроциты переориентируются перпендикулярно линиям тока. Образующаяся упаковка параллельных друг другу эритроцитов после прохождения цельной кровью стеноза позволяет предположить, что процесс тромбообразования наиболее вероятен в области кровеносного сосуда, в котором ориентация движущихся эритроцитов перпендикулярна к линиям тока [6];
- серия экспериментов по изучению миграции раковых клеток через узкие микроканалы при взаимодействии с химическим веществом (аттрактантом) выявила способность эпителиоподобных клеток линии метастатического рака предстательной железы DU145 мигрировать в разработанной микрофлюидной системе, при этом показано, что характер миграции зависит от ширины канала и расположения клеток в момент добавления хемотаттанта: в более широких каналах клетки медленнее адгезируют и способны совершать катящиеся движения, а в более узких — расплываются по стеклу [7];
- предложено использование переотражённой волны в качестве зондирующего импульса для исследования изменения структуры насыщенной среды непосредственно после воздействия ударной волны [8, 9].

Научные исследования Альфира Тимирзяновича актуальны и имеют высокий потенциал промышленного применения. По результатам проведённых исследований опубликовано более 200 работ, в том числе более 60 статей в высокорейтинговых журналах, 2 авторских свидетельства и 3 патента. За время работы в ИМех УФИЦ РАН под его руководством успешно выполнены двенадцать хозяйственных работ и грант РФФИ «Поволжье» по теме: «Гидродинамика биологических дисперсных (клеточных) систем в микроканалах», в качестве основного исполнителя участвовал в двух грантах (РФФИ, Мегагрант), а в настоящее время участвует в исследованиях в рамках гранта РНФ. Под руководством Альфира Тимирзяновича выполнены и защищены 5 кандидатских диссертаций, 8 магистерских диссертаций и 12 дипломных работ.

В лаборатории «Экспериментальная гидродинамика» под руководством Альфира Тимирзяновича проводятся исследования довольно широкого спектра задач механики многофазных сред — от медленных

процессов фильтрации до распространения ударных волн в различных многофазных средах. Благодаря его самоотверженным усилиям лаборатория хорошо оснащена, в том числе ударной трубой высокого давления для исследования динамики волн давления в многофазных средах. Создана «чистая» комната для проведения высокоточных экспериментов, оснащена мастерская для изготовления необходимых деталей для экспериментальных установок.

Научную работу Альфир Тимирзянович успешно совмещал с преподавательской работой в Тюменском государственном университете, Башкирском государственном университете и Уфимском государственном нефтяном техническом университете. Кроме того, он принимает активное участие в мероприятиях по популяризации науки, проводимых для школьников в рамках проекта «Фестиваль академической науки». В Институте механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН данный Фестиваль, как правило, открывается его лекцией «Микрогидродинамика и биомеханика», где школьникам представляются результаты экспериментальных исследований движения водоуглеводородных эмульсий, полимеров, крови и раковых клеток в микроканалах различной топологии и геометрии; объясняются основы реологии и принципы добычи нефти, а также демонстрируются видеозаписи результатов динамического записывания водоуглеводородных эмульсий, асимметрии течения эритроцитов крови при стенозе кровеносных сосудов, проявления эластичной турбулентности при течении полимеров и показывается миграция раковых клеток в двухуровневой микромодели, предназначенной для дифференциации рака. А во время экскурсии по лабораториям Института Альфир Тимирзянович демонстрирует школьникам установку «ударная труба» в действии.

Альфир Тимирзянович в 2021 году получил звание «Почётный работник науки и высоких технологий Российской Федерации». Ему присуждена Областная Премия (Тюменской области) им. В.И. Муравленко в области научных и технических достижений в развитии нефтяной и газовой отрасли за работу «Механика многофазных систем в технологиях разведки и добычи нефти» (1999 г.), имеет Благодарность Губернатора Тюменской области (1999 г.), Благодарственные письма Главы Республики Башкортостан (2017 г.) и «За активное участие в организации Фестиваля Академической науки в УФИЦ РАН» (2023 г.); награждён Почётными грамотами Российской академии наук (2004, 2022 гг.), Администрации Октябрьского района г. Уфы (2020 г.), Администрации городского округа г. Уфы (2020 г.), Совета городского округа г. Уфы (2020 г.), Профсоюза работников Российской академии наук (2020 г.).

Коллектив Института механики им. Р.Р. Мавлютова и редакция журнала «Многофазные системы» от всей души поздравляют своего коллегу Альфира Тимирзяновича Ахметова с юбилеем и желают ему крепкого здоровья, благополучия и дальнейших творческих успехов на благо отечественной науки!

Список литературы / References

- [1] Ахметов А.Т., Нигматулин Р.И., Федоров К.М. О механизме вытеснения нефти из пористой среды мицеллярными растворами // Доклады Академии наук СССР. 1987. Т. 293, № 3. С. 558.
- [2] Ахметов А.Т., Телин А.Г., Мавлетов М.В. Новые принципы применения обратных водонефтяных эмульсий в потокоотклоняющих технологиях и глушении скважин // Нефтегазовое дело. 2005. № 3. С. 119–126.
- [3] Рахимов А.А., Ахметов А.Т. Экспериментальные исследования гидродинамических эффектов при течении обратных водоуглеводородных эмульсий в микроканалах // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2016. Т. 11, № 1. С. 30–37.
DOI: [10.21662/uim2016.1.006](https://doi.org/10.21662/uim2016.1.006)
- [4] Ахметов А.Т., Саметов С.П. Особенности течения дисперсии из микрокапель воды в микроканалах // Письма в журнал технической физики. 2010. Т. 36, № 22. С. 21–28.
Akhmetov A.T., Sametov S.P. Features of water microdrop dispersion flow in microchannels // Technical Physics Letters. 2010. Vol. 36, No. 11. P. 1034–1037.
DOI: [10.1134/S1063785010110180](https://doi.org/10.1134/S1063785010110180)
- [5] Khasanov M.M., Telin A.G., Bulgakova G.T., Akhmetov A.T. Non-equilibrium and nonlinear effects in water-in-oil emulsion flows in porous media // Energy and Fuels. 2011. Vol. 25, No. 3. P. 1173–1181.
DOI: [10.1021/ef101053k](https://doi.org/10.1021/ef101053k)
- [6] Ахметов А.Т., Саметов С.П., Рахимов А.А., Валиев А.А. Анизотропные свойства крови в сосуде со стенозом // Доклады Академии наук. 2018. Т. 483, № 2. С. 143–147.
DOI: [10.31857/S086956520003468-7](https://doi.org/10.31857/S086956520003468-7)
Akhmetov A.T., Valiev A.A., Rakhimov A.A., Sametov S.P. Anisotropic properties of blood in a vessel with stenosis // Doklady Physics. 2018. Т. 63, № 11. С. 476–480.
DOI: [10.1134/S1028335818110058](https://doi.org/10.1134/S1028335818110058)
- [7] Рахимов А.А., Ахметов А.Т., Валиев А.А., Данилко К.В., Саметов С.П., Хисматуллин Д.Б. К вопросу о механизме клеточной миграции // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 1. С. 17–26.
DOI: [10.21662/mfs2019.1.003](https://doi.org/10.21662/mfs2019.1.003)
- [8] Ахметов А.Т., Гималдинов И.К., Ситдикова Л.Ф. и др. О влиянии водонасыщенности на распространение ударных волн слабой интенсивности в насыпных средах // Инженерно-физический журнал. 2021. Т. 94, № 2. С. 418–423.
- [9] Ахметов А.Т., Гималдинов И.К., Азаматов М.А., Мухаметзянов А.Ф., Богданов Д.Р. Зондирование водогазонасыщенных насыпных сред переотраженными волнами непосредственно после воздействия ударной волны // Письма в Журнал технической физики. 2022. Т. 48, № 1. С. 23–26.
DOI: [10.21883/PJTF.2022.01.51874.18834](https://doi.org/10.21883/PJTF.2022.01.51874.18834)

Содержание

З.З. Мамаева

Исследование возмущения давления в пласте и в трещине ГРП
при собственных колебаниях столба жидкости в скважине 142–145

А.А. Мухутдинова

Задача о течении термовязкой жидкости в канале с каверной, содержащей охлаждающий элемент 146–151

Э.В. Галиакбарова, Г.Р. Каримова

Поверхностные волны вертикальной поляризации на границе пористых сред,
насыщенных гидратом и льдом 152–156

Р.Ф. Никонорова, Л.З. Уразбахтина

Отражение падающего газа от стенки 157–161

Механика твердого тела

А.Г. Хакимов

Изгиб однослойного графена 162–167

Портрет ученого

К юбилею Ахметова Альфира Тимирзяновича 168–170

Contents

Liquid & Gas Mechanics

S.R. Kildibaeva, E.I. Kharisov, E.E. Suyargulova

Characteristic modes of hydrocarbon leakage during deep-water accidents (in Russian) 137–141

Z.Z. Mamaeva

Study of pressure disturbance in the reservoir and in the hydraulic fracture

during natural oscillations of the liquid column in the well (in Russian) 142–145

A.A. Mukhutdinova

The problem of the flow of a thermoviscous fluid in a channel

with a cavity containing a cooling element (in Russian) 146–151

E.V. Galiakbarova, G.R. Karimova

Vertical polarization surface waves at the boundary of porous media

saturated with hydrate and ice (in Russian) 152–156

R.F. Nikonorova, L.Z. Urazbakhina

Reflection of the incident gas from the wall (in Russian) 157–161

Solid Mechanics

A.G. Khakimov

Bending of single-layer graphene (in Russian) 162–167

Profiles

For the anniversary of Alfir Timerzyanovich Akhmetov (in Russian) 168–170