Растворы полимеров и их математические модели

В.В. Пухначев

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирский государственный университет
Email: pukhnachev@gmail.com

При добавлении в воду небольшого количества полимера вязкость и плотность раствора почти не изменяются, в отличие от его реологических свойств (B.A. Toms, 1948). Я.И. Войткунский, В.Б. Амфилохиев и В.А. Павловский (1970) предложили модель, описывающую движение водных растворов полимеров с учетом релаксационных свойств среды. Неизвестными функциями в этой модели являются поля скорости и давления жидкости. Модель также содержит два эмпирических параметра: время релаксации и релаксационную вязкость. Авторы исходили из варианта наследственной модели максвелловского типа для вязкоупругой жидкости с определяющим реологическим соотношением

$$P = -pI + 2\rho\nu D + 2\frac{\rho\kappa}{\theta}\int_{-\infty}^{t}\exp\left\{\frac{s-t}{\theta}\right\}\frac{d}{ds}D(s)ds.$$

Здесь P – тензор напряжений, D – тензор скоростей деформаций векторного поля $\mathbf{v}$, ν – кинематическая вязкость, ρ – плотность, θ – время релаксации, κ – нормализованный коэффициент релаксационной вязкости.

Модель 1

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} + \frac{\kappa}{\theta}\int_{-\infty}^{t}\exp\left\{\frac{s-t}{\theta}\right\}\frac{d\Delta\mathbf{v}}{ds}ds, \quad div\mathbf{v} = 0. \tag{1}$$

В.А. Павловский (1971) выполнил асимптотическое упрощение модели (1), используя малость параметра θ.

Модель 2

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} + \frac{\kappa}{\theta}\frac{d\Delta\mathbf{v}}{dt}, \quad div\mathbf{v} = 0. \tag{2}$$

Вопросы существования и единственности решения начально-краевых задач для системы (2) были рассмотрены А.П. Осколковым (1973-1995) и А.В. Звягиным (2011, 2013).

Еще одна модификация модели движения слабых водных растворов полимеров – введение в закон поведения объективной производной тензора *D,*

$$\frac{\tilde{d}D}{dt} = \frac{\partial D}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)D + DW - WD,$$

где W – антисимметричная часть тензора $\nabla\mathbf{v}$ (R.S. Rivlin and J.L. Ericksen, 1955).

Модель 3

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} + \frac{2\kappa}{\rho}Div\left(\frac{\tilde{d}D}{dt}\right), \quad div\mathbf{v} = 0. \tag{3}$$

Корректность постановок краевых и начально-краевых задач для системы (3) изучалась в работах G.P. Galdi (1995), D. Cioranescu and V. Girault (1997), A. Tani and C. le Roux (2005).

Системы (2) и (3) допускают преобразования расширенный группы Галилея, порожденной операторами

$$X_0 = \partial_t, \;\; X_{kl} = x_k \partial_{x_l} - x_l \partial_{x_k} + v_k \partial_{v_l} - v_l \partial_{v_k}; \;\; k, l = 1,2,3; \;\; k < l,$$
$$\Phi = \varphi \partial_p, \;\; \Psi_k = \psi_k \partial_{x_k} + \dot{\psi}_k \partial_{v_k} - x_k \ddot{\psi}_k \partial_p; \;\; k = 1,2,3.$$

Здесь $\varphi(t)$ и $\psi_i(t)$ – произвольные функции класса C^∞. Наличие широкой группы симметрий позволяет строить инвариантные и частично инвариантные решения указанных систем. Ряд таких решений представлены в докладе. Они описывают нестационарные слоистые течения, стационарные течения в трубе эллиптического сечения, стационарные и нестационарные движения вблизи критической точки, заполнение сферической полости, движение, вызванное вращением плоскости, ограничивающей полупространство, которое занято раствором полимера (аналог решения Кармана). Отмечены качественные отличия этих решений от соответствующих решений уравнений Навье-Стокса, в которые переходят уравнения (2) и (3) при $\kappa \to 0$. В заключение доклада сформулированы уравнения пограничного слоя в растворе полимера, изучены их групповые свойства и указан ряд их точных решений. Среди них – аналог решения Блазиуса и решение, описывающее нестационарное движение вблизи критической точки (последнее не имеет аналогов в механике вязкой жидкости).