Аналитическая модель гравитационного осаждения дисперсной примеси в движущемся потоке

Тукмаков Д.А.

ИММ ФИЦ КазНЦ РАН, Казань

Одним из разделов современной механики жидкостей и газов является динамика неоднородных сред [1-16]. Помимо вопросов, связанных с аэродинамическими проблемами очищения газодисперсных сред [1,2] динамика неоднородных сред рассматривает также процессы движения частиц взвешенных в жидкостях. Необходимость исследования и моделирования диффузионных процессов дисперсных примесей в водотоках возникает по причине экологических проблем углубления русла рек. В работе [3] описана методика проведения расчета условных фоновых концентраций химических веществ в воде водных объектов вне зоны влияния на качество воды проектируемого или действующего выпуска сточных вод для установления нормативов допустимых сбросов сточных вод. В публикации [4] рассмотрены особенности задания коэффициентов Шези для русловых потоков. Дан анализ современных подходов к оценке коэффициентов Шези при грядовом режиме. Продемонстрировано, что данные коэффициенты очень существенно влияют на гидроморфологические параметры русловых потоков. В статье [5] показано влияние коэффициента турбулентной диффузии дисперсной примеси и формы частиц на точность прогнозирования распространения взвешенных примесей и их осаждения в водотоках. Предложена модель позволяющая более точно рассчитать толщину слоя наилка и площади загрязненного дна. В публикации [6] рассмотрена методика расчета скорости осаждения частиц в водной среде для моделирования динамики концентрации взвешенных веществ на примере проведения дноуглубительных работ и дампинга грунта. Выполнен обзор различных подходов к расчету динамики концентрации взвешенных веществ, определены основные входные параметры модели. Предложены модель горизонтального рассеивания загрязняющих веществ и методика расчета скорости осаждения частиц, в основу которой положены теоретические и эмпирические формулы. Путем сравнения результатов расчетов сделаны выводы об универсальности эмпирической формулы и возможности комбинации формулы Стокса в случае ламинарного и турбулентного режимов. В статье [7] проанализирована роль мелкодисперсных наносов техногенного происхождения в русловом процессе, рассматриваются особенности осаждения частиц различной плотности и формы, вопросы хлопьеобразования и консолидации осадков в придонной области потока, приводятся экспериментальные данные о величине сцепления между частицами, предложена зависимость для его расчета, определен класс наносов, для которых сцепление определяет критическую скорость размыва. На основе сопоставления процессов самоочищения речной воды и осаждения мелкодисперсных наносов показано, что седиментационные процессы играют важную роль в самоочищении речной воды. В работе [8] представлена усредненная двухмерная численная модель для моделирования гидродинамики и переноса связных наносов в эстуарной системе реки. Модель описывает притоки, а также основной ствол эстуарной системы.

В данной работе представлены результаты теоретического исследования диффузии твердой примеси оценивается влияние различных методик расчетов чисел Шези и дисперсности частиц. Таким образом можно сделать вывод о том, что исследование диффузии твердых примесей в водотоках является актуальным для экологической безопасности гидротехнического строительства. При этом в различных исследованиях для моделирования диффузии твердых примесей применяются различные подходы в разработке моделей, как в выводе дифференциальных уравнений описывающих процесс, так и в определении параметров задающих гидродинамические свойства дисперсных примесей. В данной работе на основе математической модели трехмерной нестационарной диффузии методом разделения переменных получено аналитическое решение, с помощью которого исследуется влияние параметров математической модели и моделируемого объекта на процесс конвективной диффузии. Рассматривались различные формулы вычисления числа Шези, проводились расчеты для различных дисперсностей частиц.

Уравнение трехмерной нестационарной диффузии (1) имеет вид [9]:

$$\frac{\partial C}{\partial t}+u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}+w\frac{\partial C}{\partial z}=D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right) \quad (1)$$

Здесь $C(t,x,y,z), q, u, v, w, D$ – концентрация, расход массы, скорости потока в пространственных направлениях, коэффициенты диффузии для соответствующих пространственных направлений. В данной работе водоток предполагается прямолинейным, постоянной глубины H, со средней (по расходу) продольной скоростью U=const, поперечная и вертикальная скорости водотока считают равными нулю. Ось Ox направлена вдоль берега в сторону течения, ось Oy –поперек потока, ось Oz – вертикально вниз. Рассматривается малоинерционная примесь, у которой $u=U$, $v=0$, $w=W$, где W – скорость установившегося осаждения частиц [5], таким образом математическая модель будет иметь вид (2):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right) - u\frac{\partial C}{\partial x} - w\frac{\partial C}{\partial z} \quad (2)$$

С помощью подстановки [9], неоднородное уравнение (2) сводится к однородному уравнению (3):

$$\frac{\partial C^*}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 C^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C^*}{\partial z^2}\right) \quad (3)$$

Решение однородного уравнения (3) возможно представить в виде произведения функций (4):

$$C(x,y,z,t) = C_1(x,t)C_2(y,t)C_3(z,t) \quad (4)$$

Каждая из функций в выражении (5) удовлетворяет одномерному однородному уравнению диффузии :

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C_i}{\partial x_i^2} \quad (4^*)$$

по советующему пространственному направлению, i=1,2,3, $x = x_1, x_2 = y$, $x_3 = z$. Рассмотрим метод разделения переменных [9,10,16] решения дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа применительно к уравнению (4*). Предположим, что $C_i(x_i,t) = X_i(x_i)T_i(t)$. В таком случае уравнение (4*) будет иметь вид:

$$X_i'(x_i)T_i(t) = \frac{D}{U}X_i(x_i)T_i''(t) \quad (5)$$

Перепишем уравнение (5) в виде уравнения (5*),(6),(6*),(6**):

$$\frac{T_i(t)}{DT_i(t)} = \frac{X_i''(x_i)}{X_i(x_i)} = -\lambda_{ik}^2 \qquad (5^*)$$

$$\frac{dT_i}{dt} = -D\lambda_{ik}^2 T_i, T_i = e^{-D\lambda_{ik}^2 t} \quad (6)$$

$$\frac{d^2 X_i(x_i)}{dx_i^2} = -\lambda_{ik}^2 X_i(x_i) \quad (6^*)$$

$$X_i(x_i) = A_{ik}\cos\lambda_{ik}x_i + B_{ik}\sin\lambda_{ik}x_i \quad (6^{**})$$

Для функций $C_i(x_i,t)$ зададим граничные условия (7) описывающие отсутствие притока массы дисперсной компоненты:

$$C_i'(0,t) = C_i'(L_i,t) = 0 \quad (7)$$

Из граничных условий получаем следующее выражение для слагаемых ряда Фурье $X_{ik}(x_i,t)$:

$$X_{ik}\left(x_i,t\right)=A_{ik}\cos\lambda_{ik}x_i,\lambda_{ik}=\frac{\pi k}{L_i},\ k=1,2....n_i \qquad (8)$$

$$X_i\left(x_i,t\right)=\sum_k A_{ik}\cos\lambda_{ik}x_i \qquad (8^*)$$

Таким образом решение уравнения (2) имеет вид (9):

$$C\left(x_1,x_2,x_3,t\right)=c_0+exp\left(ux_1/\left(2D\right)+wx_3/\left(2D\right)-t\left(w^2+u^2\right)/\left(4D\right)\right)\prod_i\sqrt[3]{\left(1-c_0/c_1\right)}\cdot\left(\sum_k e^{-D\lambda_{ik}^2 t}A_{ik}\cos\lambda_{ik}x_i\right) \qquad (9)$$

Здесь c_0 и c_1 это соответственно фоновая и максимальная концентрация дисперсной компоненты на поверхности канала, z=0. Коэффициенты A_{ik} определяются следующим образом:

$$A_{ik}=\frac{2}{L_i}\int_0^{L_i}f_{i0}\left(x_i\right)\cos\lambda_k x_i dx_i \qquad (10)$$

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 23-21- 00363 «Моделирование процесса осаждения капель двухфазной газокапельной среды»

Список литературы

[1] Кутушев А. Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. СПб.: Недра, 2003.

[2] Тукмаков А.Л. Модель движения и осаждения заряженной газовзвеси в электрическом поле Инженерно-физический журнал. 2014. № 1. С. 35-44.

[3] Геков В.Ф., Клименко О.А. Порядок проведения расчета условных фоновых концентраций химических веществ в воде водных объектов для установления нормативов допустимых сбросов сточных вод // Гидрохимический институт. 2019. 95 с.

[4] Лепихин А.П., Богомолов А.В., Дальков М.П. Оценка коэффициента Шези: традиция и современное состояние //Водное хозяйство России: проблемы, технологии, управление. 2012. № 3. С. 57-77.

[5] Наумов В. А. Математическое моделирование распространения взвешенных примесей от точечного источника и их осаждения в водотоке// Известия КГТУ. 2017. № 44. С.46–58.

[6] Студёнов И.И., Шилова Н.А. Расчет гидравлической крупности взвеси при моделировании динамики концентрации взвешенных веществ в приустьевых районах арктических морей на примере Белого моря// Научные исследования в Арктике. 2015. №3. С.40–47.

[7] Суйкова Н.В., Брянская Ю.В., Боровков В.С. Свойства мелкодисперсных техногенных наносов и их влияние на русловой процесс и самоочищение речной воды//Водные ресурсы. 2012. № 2. С. 186-194.

[8] Liu W.C., Hsu M.H., Kuo A.Y. //Marine Pollution Bulletin. 2002. Vol. 44. Is. 10. P. 1076-1088.

[9] Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.

[10] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Издательство «Наука», 1977. 736 с.

[11] Тукмаков Д.А. Численное исследование скоростного скольжения фаз при прохождении ударной волны малой интенсивности из чистого газа в запылённую среду // Многофазные системы. 2019.№2. С. 125-131.

[12] Тукмаков Д.А. Математическое моделирование взаимодействия ударной волны с электрически заряженной запылённой средой//Многофазные системы. 2020. Т. 15. № 1-2. С. 101.

[13] Тукмаков Д.А. Численное моделирование динамики скоплений твердых частиц.//Многофазные системы. 2023. Т.18. №3.С. 244–246.

[14] Тукмаков Д.А. Трехмерная нестационарная математическая модель загрязнения канала осаждающейся дисперсной примесью // Экологические системы и приборы. 2022. №11. С. 26-35.

[15] Тукмаков Д.А. Исследование загрязнения водотока взвесью с помощью стационарной двухмерной математической модели //Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Прикладная экология. Урбанистика. 2022. № 1 (45). С. 88-98.

[16] Флетчер К. Вычислительные методы в дина-мике жидкостей: В 2-х томах: Т. 1: Пер. с англ. — М.: Мир, 1991. 504 с.