Математическая модель продольной трещины стержня для задач идентификации

Утяшев И.М., Фатхелисламов А.Ф.

Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УФИЦ РАН, Уфа
Уфимский университет науки и технологий, Уфа

Задачам идентификации трещин посвящено большое число работ [1-4]. Поперечные раскрытые трещины, как правило, моделируют условиями сопряжения пружины [2].

Рассматривается однородный изотропный прямоугольный стержень длиной $L = 1$, плотностью ρ и площадью поперечного сечения *F* *c* продольной прямоугольной трещиной, проходящий не по всей длине стержня, а от некоторой точки x_c до правого конца (см. рис. 1). Стержень состоит из двух частей, то участок без трещины обозначаем индексом *m,* а участок с трещиной с индексом *p*. Предполагается, что оси симметрии поперечного сечения этих участков стержня совпадают. Стержень имеет жесткое закрепление на левом конце. Рассматриваются следующие краевые условия на правом конце: свободное, упругое, жесткое.

Поперечное сечение стержня имеет высоту *H* и ширину *B*. Прямоугольная трещина имеет длину $l = L - x_c$, глубину h и ширину b.

Продольные колебания стержня с постоянным поперечным сечением описывается следующим уравнением [4, с. 146]:

$$EF\,\frac{d^2U(x,t)}{dx^2} + \rho F\,\frac{d^2U(x,t)}{dt^2} = 0, \tag{1}$$

где $U = U(x, t)$ – продольное смещение, E – модуль упругости, ρ – плотность стержня, F – площадь поперечного сечения стержня.
Изгибные колебания стержня постоянного сечения относительно оси *Oy* и *Oz* описывается уравнением [4, с.152]:

$$EJ_y\,\frac{d^4Y(x,t)}{dx^4} + \rho F\,\frac{d^2Y(x,t)}{dt^2} = 0\,, \tag{2}$$

$$EJ_z\,\frac{d^4Z(x,t)}{dx^4} + \rho F\,\frac{d^2Z(x,t)}{dt^2} = 0\,, \tag{3}$$

где *Y(x,t), Z(x,t)* – поперечное смещение относительно оси *Oy* и *Oz* соответственно
J_y, J_z -моменты инерции поперечного сечения.

где u_m, u_p – продольные смещения левее и правее точки x_c.

$$F_p = BH - bh, \quad F_m = BH\,, \quad P = \frac{F_p}{F_m}. \tag{4}$$

В точке начала надреза x_c применим условия сопряжения для участков стержня:

$$u_m(x_c) = u_p(x_c), \quad u'_m(x_c) = u'_p(x_c)P\,, \tag{5}$$

где $P = \dfrac{F_p}{F_m}$, $F_p = BH - bh, \quad F_m = BH$.

Решение уравнения (1) ищем в виде $U(x, t) = u(x)\cos\omega t$. Тогда (1) сводится к следующему уравнению:

$$u''+\lambda^2 u = 0,, \tag{6}$$

где спектральный параметр $\lambda^2 = \dfrac{\rho F\omega^2}{E}$. Поскольку стержень слева и справа от точки x_c имеет разную форму поперечного сечения, то уравнения продольных колебаний слева и справа от точки x_c запишутся в следующей форме:

$$u''_m+\lambda^2 u_m = 0, \quad u''_p+\lambda^2 u_p = 0,, \tag{7}$$

Общее решение уравнений (6) примем в виде

$$u_m = C_{m1}\cos\lambda x + C_{m2}\frac{\sin\lambda x}{\lambda}, \quad u_p = C_{p1}\cos\lambda x + C_{p2}\frac{\sin\lambda x}{\lambda}. \tag{8}$$

Подставим решения (8) в (5), (6) и получим следующую систему уравнений:

$$u_m(0) = C_{m1}1 + C_{m2}0 = C_{m1} = 0. \tag{9}$$

$$u'_p(1) = -\lambda C_{p1}\sin\lambda + C_{p2}\cos\lambda + \mathrm{k}(C_{p1}\cos\lambda + C_{p2}\sin\lambda) = 0. \tag{10}$$

$$C_{m1} + C_{m2}\frac{\sin\lambda x_c}{\lambda} - C_{p1}\cos\lambda x_c - C_{p2}\frac{\sin\lambda x_c}{\lambda} = 0. \tag{11}$$

$$-\lambda C_{m1} + C_{m2}\cos\lambda x_c - P\left(-\lambda C_{p1}\sin\lambda x_c + C_{p2}\cos\lambda x_c\right) = 0. \tag{12}$$

Из уравнения (9) следует $C_{m1} = 0.$ Система уравнений (10)–(12) относительно неизвестных констант C_{p1}, C_{p2}, C_{m2} имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда равен нулю определитель этой системы

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda\sin\lambda + \mathrm{k}\cos\lambda & \cos\lambda + \dfrac{\mathrm{k}\sin\lambda}{\lambda} \\ \dfrac{\sin\lambda x_c}{\lambda} & -\cos\lambda x_c & -\dfrac{\sin\lambda x_c}{\lambda} \\ \cos\lambda x_c & P\lambda\sin\lambda x_c & -P\cos\lambda x_c \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Вычислив определитель (13) получим уравнение для нахождения собственных значений (собственных частот).
Найдем собственные частоты изгибных колебаний стержня, описываемых уравнениями (2) и (3).

Решение уравнения (2) ищем в виде $Y(x,t) = y(x)\cos\nu t$, где ν - круговая чистота. Тогда (2) сводится к следующему уравнению:

$$y^{(4)}(x) = s_y{}^4 y(x), \tag{14}$$

Условие сопряжения в точке x_c для участков стержня запишется так:

$$\begin{gathered} y_m(x_c) = y_p(x_c), \quad y'_m(x_c) = y'_p(x_c), \\ y''_m(x_c) = \frac{J_{yp}}{J_{ym}} y''_p(x_c), \quad y'''_m(x_c) = \frac{J_{yp}}{J_{ym}} y'''_p(x_c) \end{gathered}. \tag{15}$$

Так как стержень заделан на левом конце и упруго закреплен на правом, то краевые условия, следующие:

$$y_m(0) = 0, \quad y'_m(0) = 0, \quad y''_p(1) = 0, \quad y'''_p(1) - k \cdot y_p(1) = 0. \tag{16}$$

Общее решение уравнений (2) примем в виде:

$$y_m = C_{11}y_{1m} + C_{12}y_{2m} + C_{13}y_{3m} + C_{14}y_{4m}, \, y_p = C_{21}y_{1p} + C_{22}y_{2p} + C_{23}y_{3p} + C_{24}y_{4p}. \tag{17}$$

Где $y_{1m} = cos(d_1\lambda x)$, $y_{2m} = \sin(d_1\lambda x)$, $y_{3m} = \cosh(d_1\lambda x)$, $y_{4m} = \sinh(d_1\lambda x)$, $y_{1p} = cos(d_2\lambda x)$, $y_{2p} = \sin(d_2\lambda x)$, $y_{3p} = \cosh(d_2\lambda x)$, $y_{4p} = \sinh(d_2\lambda x)$.

Подставив (17) в (15) – (16) получим систему. Данная система имеет нетривиальное решение относительно коэффициентов C_{ij} (i=1..2,j=1..4) тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{vmatrix}, \tag{18}$$

Приравняв к нулю (18) получим частотное уравнение.

Частотное уравнение относительно горизонтальной оси Oz получается аналогично, разница заключается только в моментах инерции, где

$$J_{zp} = \frac{B^2H^4 - 4h\left(H^2 - 1.5Hh + h^2\right)HhB + b^2h^4}{12\left(HB - hb\right)}, \qquad J_{zm} = \frac{BH^3}{12}. \tag{19}$$

Для решения задачи стержень с продольной трещиной моделируется в виде двух стержней, причем первый не имеет надреза, а второй имеет. В месте соединения используются условия сопряжения, в которых приравниваются колебания, углы поворота, изгибающие моменты и перерезывающие силы. Предложен метод решения, позволяющий однозначно определять искомые параметры трещины, где требуется найти первые собственные значения изгибных колебаний с разных осей и первое собственное значение продольных колебаний.

Исследование выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00420, https://rscf.ru/project/23-21-00420/

Список литературы

[1] Ахтямов А. М., Ильгамов М. А. Модель изгиба балки с надрезом: прямая и обратная задачи // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 1. С. 152-162

[2] Narkis Y. Identification of crack location in vibrating simply-supported beames // Journal of sound and vibrations. 1994. V. 172. P. 549–558.

[3] Утяшев, И. М. Идентификация продольного надреза стержня по собственным частотам колебаний / И. М. Утяшев, А. Ф. Фатхелисламов // Russian Technological Journal. 2023. – Т. 11, № 2. – С. 92-99.

[4] Болотин В. В. Вибрации в технике. Справочник. М.: Машиностроение. 1978. 352 с.